Светуньков С.Г. Основы комплекснозначной экономики. СПб.: Издатель Василькина М.Н., 2011. 348 с.

В монографии обобщаются результаты научных исследований в области экономико-математического моделирования с помощью элементов теории функций комплексных переменных, которые проводились в Санкт-Петербургском государственном университете экономики и финансов с 2004 года под научным руководством автора. Поскольку новые научные результаты существенно расширяют инструментальную базу научных исследований в экономике, обладают собственной теоретической базой и логикой, этот раздел экономико-математического моделирования был назван «Комплекснозначная экономика». Монография представляет собой изложение основ этого нового научного направления в экономике.

В монографии излагаются последовательно принципы теории комплекснозначной экономики, её аксиоматическое ядро, основные концептуальные положения теории, методы и модели комплекснозначной экономики. Монография содержит примеры построения и использования комплекснозначных моделей на условных и реальных примерах.

Монография адресована научным работникам, аспирантам и докторантам, использующим в своей деятельности экономико-математическое моделирование. Она будет полезна тем экономистам, которые практикуют в своей профессиональной деятельности использование экономико-математических методов и моделей. Монография может быть полезна студентам старших курсов и магистерских программ.

Введение

Ещё в середине XVIII века математики открыли возможность использования моделей, включающих в себя комплексные переменные. С тех пор и по наши дни работа с комплексными переменными продолжается, и была сформирована "Теория функций комплексного переменного" как раздел математики. Эта теория в настоящее время широко применяется в целом ряде естественных наук, поскольку работа с комплексными переменными позволяет адекватно описать более сложные процессы, что не всегда получается сделать с помощью действительных переменных. Экономика, как объект для научного исследования и познания, не менее сложна, чем разделы естественных наук. Поэтому применительно к экономике комплексные переменные могут дать более точное описание протекающих в ней процессов, и с помощью этих переменных можно построить более сложные модели, чем это удаётся делать до сих пор с помощью действительных переменных. Комплексные переменные иногда встречаются в некоторых разделах экономико-математического моделирования, но в данной монографии предлагается рассматривать применение исключительно и только моделей комплексных переменных в качестве моделей экономико-математического моделирования.

Модели и математические методы работы с комплексными переменными в монографии рассматриваются не как некоторая альтернатива моделям и методам действительных переменных, а как инструмент, дополняющий и расширяющий существующий арсенал экономико-математического моделирования. В некоторых случаях модели комплекснозначной экономики показывают лучшие результаты, чем модели действительных переменных, в других – хуже. Принципиально важно, что комплекснозначная экономика даёт экономисту новый инструмент исследования, а чем многообразнее этот инструмент, тем более многообразны задачи, которые в состоянии решить исследователь.

В первой главе монографии излагаются основные принципы комплекснозначной экономики и приводятся некоторые сведения из теории функций комплексного переменного, которые необходимы для понимания дальнейших действий по формированию теории комплекснозначной экономики.

Весьма часто для того, чтобы понять некоторый смысл математических операций, используется графический метод описания этих операций. Поскольку в предлагаемой в монографии комплекснозначной экономике используются функции комплексных переменных, необходимо знать характеристики этих функций, в том числе и графические. Эта задача решается во второй главе монографии, где рассматриваются конформные отображения основных функций комплексных переменных. Эта глава не является простым изложением соответствующего раздела теории функций комплексного переменного, встречающегося в различных учебниках, нет. В учебниках по теории функций комплексного переменного в той части, которая посвящена конформным отображениям, не рассматривается, например, конформное отображение степенной комплекснозначной функции с комплексным коэффициентом – такой необходимости не было. В них рассматривается исключительно конформное отображение этой степенной комплекснозначной функции с действительным показателем степени. Для целей комплекснозначной экономики необходимость использования комплексных показателей степени есть, и не только применительно к степенным функциям, что и предопределило содержание и новые построения в этой главе монографии.

Третья глава монографии содержит в себе изложение инструмента практического применения комплекснозначной экономики - комплекснозначной эконометрики. Конечно, в этой главе содержатся лишь основы комплекснозначной эконометрики, поскольку разработать или адаптировать применительно к комплекснозначной экономике все разделы эконометрики действительных переменных – задача непосильная для той группы учёных, которая работает в данном направлении. И тем более невозможно эконометрику как раздел науки в полном объёме изложить в одной главе. Здесь, в третьей главе, обосновываются и адаптируются применительно к комплекснозначной экономике основные разделы корреляционно-регрессионного анализа математической статистики – вычисление комплексного коэффициента парной корреляции, метод наименьших квадратов оценки коэффициентов комплекснозначных моделей, метод построения доверительных границ для полученных расчётных статистических оценок, некоторые новые коэффициенты, отражающие адекватность эконометрических построений. Полученные результаты достаточны для решения последующих задач комплекснозначной экономики и развития комплекснозначной эконометрики. Следует отметить, что принятые сегодня в математической статистике представления о статистических характеристиках комплексных случайных переменных ведут в тупик. Это продемонстрированно на примере вывода комплексного коэффициента парной корреляции – полученные противоречивые результаты, которые вытекают из стандартных положений, свидетельствуют об их ошибочности. Это привело к необходимости формирования иных принципов статистики комплексных случайных переменных, на основе которых получены новые и не противоречивые выводы и рекомендации.

Четвёртая глава содержит в себе результаты исследования одного из самых простых типов моделей комплексных переменных – моделей комплексного аргумента, когда действительный результат зависит от комплексного аргумента. Эти функции в теории функций комплексного переменного практически не рассматриваются, но они имеют некоторые очень интересные свойства, приемлемые для удачного решения некоторых экономических задач. Для более чёткого понимания сути этих моделей они рассматриваются применительно к задачам моделирования производственных процессов с помощью соответствующих производственных функций комплексного аргумента. Здесь же демонстрируется одна замечательная особенность моделей комплексного аргумента – устойчивость её оценок в условиях мультиколлинеарности.

Производственные функции комплексного переменного, более сложного вида модели, нежели модели комплексного аргумента, рассматриваются в пятой главе монографии. Здесь комплексный производственный результат представляется в форме зависимости от комплексного ресурса. Поскольку функциональные зависимости между двумя комплексными переменными могут быть разного вида, основные из них в этой главе и рассматриваются.

Шестая глава монографии использует малоизученный случай в математике комплексных переменных, поскольку существующая теория оперирует только одной комплексной переменной, она, поэтому так и называется «Теория *функций комплексного переменного*», а в шестой главе монографии используются многофакторные комплекснозначные модели – то есть, *модели нескольких комплексных переменных*. Работы в математике по теории функций нескольких комплексных переменных малочисленны и в силу сложности этого математического аппарата в теории функций нескольких комплексных переменных рассматривается только один класс задач, не связанный с направлением комплекснозначной экономики. Поэтому в шестой главе монографии приводятся сформулированные впервые принципы и подходы новой теории – *теории функций комплексных переменных*. Эта необходимость была вызвана желанием построить более адекватные реальным экономическим процессам комплекснозначные производственные функции, а это можно сделать только увеличением объясняющих факторов, используемых в моделях комплекснозначной экономики. Свойства и характеристики простых многофакторных комплекснозначных моделей и излагаются в этой главе монографии.Многообразие возможных направлений использования моделей и методов комплекснозначной экономики не ограничивается только лишь моделями производственных функций. Но на примере производственных функций лучше всего было увидеть достоинства и недостатки комплекснозначных моделей. В четвёртой, пятой и шестой главах монографии делается это в сравнении с основными моделями производственных функций действительных переменных.

Другим ярким примером, выгодно выделяющим достоинства моделей комплексных переменных, является их применение в анализе фондового рынка. В седьмой главе монографии показывается, как можно использовать комплекснозначные индексы экономической конъюнктуры, и как с помощью свойств комплексных чисел получить фазовые портреты фондовых рынков, позволяющие увидеть закономерности, не выявляемые с помощью действительных переменных.

Материалы восьмой главы подчинены основной идее – показать, в каких направлениях, помимо описанных в предыдущих главах, может развиваться комплекснозначная экономика.

В ходе изложения материалов монографии в тексте делались ссылки на использованную литературу в виде постраничных сносок. В конце монографии приводится полный список всех публикаций коллектива учёных, работающих по формированию комплекснозначной экономики. При необходимости читатель может обратиться к этим первоисточникам.Большой объём новых научных результатов, который содержится в этой монографии, не был бы получен, если бы авторский коллектив не пользовался поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований. Те гранты коллектива, которые РФФИ выделял на конкурсной основе с 2006 по 2010 год, оказали неоценимую услугу - как с позиций финансовой поддержки, так и с позиций моральной поддержки.

Основные идеи, гипотезы и содержание излагаемых в монографии материалов принадлежат автору монографии, но реализация гипотез в сбалансированную теорию была бы невозможна без активной работы коллектива учёных, среди которых первую роль следует отдать к.э.н. И.С.Светунькову, вместе которым нам и удалось заложить основы комплекснозначной экономики, и научная работа которого в самом начале исследования позволила получить фундаментальные выводы, опираясь на которые и были получены многие другие научные результаты. Важное место в формировании комплекснозначной экономики принадлежит д.т.н. проф.Г.В.Савинову, который выступал рецензентом наших с И.С.Светуньковым первых работ, а в дальнейшем сформулировал ряд интересных предложений, часть из которых излагается в восьмой главе монографии. Существенный вклад в формирование отдельных разделов комплекснозначной экономики внесли к.э.н. Т.В.Корецкая, к.э.н. Е.В.Сиротина и к.э.н. А.Ф.Чанышева. Об их вкладе говорится в соответствующих разделах монографии, где при необходимости излагаются полученные ими научные результаты. Некоторые частные выводы и рекомендации, полученные другими молодыми учёными, излагаются на страницах книги с упоминанием их авторства в этих исследованиях и получении новых научных результатов.Научные положения комплекснозначной экономики, изложенные в монографии, докладывались на многих научных конференциях различного статуса – от международных до региональных, где подвергались всестороннему обсуждению со стороны научной общественности, участвовавшей в дискуссиях. Но наиболее ценными для формирования комплекснозначной экономики как нового научного направления, переосмысления полученных результатов, являлись критико-конструктивные предложения, высказываемые на постоянно действующем научном семинаре кафедры «Экономическая кибернетика и экономико-математическое моделирование» СПбГУЭФ сотрудниками кафедры д.т.н. проф. Г.М.Фридманом, д.э.н. проф. В.П.Черновым, к.э.н., доц. Ф.А.Ущевым и другими коллегами.

Поскольку материалы этой монографии являются новыми, впервые в таком системном виде включаемые в научный оборот, автор отдаёт себе отчёт в том, что её некоторые положения могут носить дискуссионный характер, а, возможно, содержать неточности. Задача учёного как раз и заключается в том, чтобы, получив новый научный результат, в ходе всестороннего его обсуждения найти истину. Поэтому любая конструктивная критика монографии будет приветствоваться её автором. Отзывы и замечания по монографии можно высылать в адрес издательства.

Глава первая. Концептуальные основы комплекснозначной экономики

1.1. Понятие «комплекснозначная экономика»

Современное экономико-математическое моделирование оперирует широким классом моделей и методов действительных переменных. И практически в каждом из направлений экономико-математического моделирования учёные наталкиваются на ограниченность математического аппарата, убеждаясь в том, что каким бы сложным этот аппарат не был, он не способен удовлетворительным образом описать всё многообразие реальной экономики. Можно привести, по крайней мере, десятки направлений экономико-математического моделирования, когда модели действительных переменных, упираясь в естественные рамки своих возможностей, описывают экономику весьма посредственно, что способствует переводу математических моделей из области решения практических задач в область теории условных объектов, имеющих мало общего с реальной экономикой. В этом случае учёные вынуждены вводить ограничения и предположения, которые преобразуют эти модели из множества абстрагированных образов в множество образов идеализированных, обладающих свойствами, которые ни один реальный экономический объект не имеет. Взять хотя бы модель «вечно живущего индивида», являющейся одной из множества ей подобных в анналах различных теоретических разделов экономики. Свойство «вечно» жить, как известно, не присуще ни одному из реально существующих индивидов, более того – оно абсолютно противоречит реальности. Построение подобных моделей и их серьёзное обсуждение в научных кругах, на мой взгляд, является выражением беспомощности современной науки продвинуться дальше в решении практических задач экономики.

Ограниченность экономико-математических моделей действительных переменных очевидна. Попытки развить их за счёт включения в модели новых переменных или усложнения вычислительного аппарата посредством всё более производительной вычислительной техники, - важное направление совершенствования экономико-математического моделирования, отрицать которое ни в коем случае не стоит. Но сегодня уже ощутима потребность в использовании иных принципов экономико-математического моделирования, и такие принципы нам представляются теорией функций комплексного переменного.

Следует отметить, что экономисты сталкивались с ситуациями, когда в ходе построения и реализации некоторых моделей им приходилось вычислять мнимые корни. Наиболее смелые из них исследовали поведение таких моделей с комплексными числами, но только как одно из интересных явлений в моделировании экономики, как интересный математический случай. Практических рекомендаций и предложений по широкому использованию комплексных переменных в экономико-математическом моделировании из таких построений не следовало. Вот, например, В.А.Колемаевым при рассмотрении однономенклатурной системы управления запасами как колебательным звеном предлагается решать дифференциальные уравнения[1], корни которых являются комплексными и сопряжёнными, модель в результате этого становится колебательной. Дальнейшего развития сам факт возможности использования комплексных переменных в экономико-математическом моделировании не получил.

Здесь следует отметить, что в естественно-научных и инженерно-технических науках без комплексных переменных сегодня вообще немыслимо что-либо рассчитать. Задачи гидродинамики и газовой динамики, теория упругости, расчёт электрических контуров и электрических переходных процессов, физика микро и макромира, авиастроение, самолётостроение и многие, многие другие разделы современной науки используют комплексные переменные как основной математический инструмент моделирования. А в экономике его нет.

Примерно сотню лет назад учёные начали использовать теорию функций комплексных переменных для описания неравномерных полей, для моделирования сложных потоков, для описания вращающихся полей и стали применять модели комплексных переменных, которые значительно проще описывают сложные объекты и явления, нежели модели действительных переменных. Теория функций комплексного переменного дала учёным удобный инструмент моделирования сложных объектов, но экономисты до сих пор игнорируют мощь и богатство инструментария этой теории.

Думаю, что вызвано это, в первую очередь, привычкой использования ряда общенаучных методов и принципов исследования, таких как метода аналогии и принципа простоты.

Принцип простоты учит использовать простые модели, если нет необходимости использовать более сложные; а метод аналогии ведёт учёных, задумывающихся над возможностью использования теории функции комплексного переменного (ТФКП) в экономике, к поиску вращающихся полей и экономическому смыслу действительной и мнимой составляющих комплексной переменной.

Некоторые учёные-экономисты считают, что ситуация с инструментарием моделирования экономики является вполне удовлетворительной, и нет оснований «умножать сущности сверх надобности» - достаточно использовать тот математический аппарат, который есть в их распоряжении, разве что – модернизировать его в необходимых случаях.

А если попытаться методом аналогий найти ситуации в экономике, когда модели комплексных переменных будут описывать экономические процессы подобно, например, переходным процессам, протекающим в электрических цепях переменного тока с вращающимися электромагнитными полями, то таких ситуаций не найти.

---

[1] Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – С. 27-29.

Учёные, занимающиеся экономико-математическим моделированием, проходят мимо очевидного факта – комплексная переменная сама по себе может рассматриваться как модель, модель, которая характеризует свойства объекта более комплексно, нежели просто действительная переменная, которая тоже характеризует тот же объект.

Когда мы рассматриваем такой экономический показатель, как, например, валовая прибыль *G*, то мы понимаем, что он представляет возможность оценить только одну сторону сложного экономического явления – результатов производственного процесса. Не случайно, когда возникает ситуация принятия решений, никто не довольствуется критерием максимума валовой прибыли. Это только в современной экономической теории объясняют поведение фирмы, ориентируясь на критерий максимума валовой прибыли. В реальной экономике в качестве не менее важного экономического показателя рассматривают показатели затрат на производство продукции, или, как чаще выражались в прежние годы – издержки производства *C*. А потом, соотнеся валовую прибыль с издержками производства, вычисляют рентабельность. Поскольку именно рентабельность является тем экономическим показателем, который отражает и затраты, и результаты, то есть, является показателем экономической эффективности производства, его-то и используют как основной показатель для принятия экономического решения.

В реальной экономической практике, описывая с помощью моделей действительных переменных некоторый производственный процесс, для принятия комплексного сбалансированного решения учёные вынуждены моделировать отдельно и валовую прибыль, и издержки производства. Поскольку построение двух моделей не очень удобно (возникают проблемы согласования их результатов и т.п.), то чаще всего строят только одну модель, складывая валовую прибыль с издержками, в результате чего получают валовой выпуск. Именно валовой выпуск и рассматривается в экономико-математическом моделировании как основной производственный результат.

Желание одновременного моделирования двух экономических переменных – валовой прибыли и издержек производства легко удовлетворяется, если рассматривать производственный результат как комплексное число. Это комплексное число в таком случае само по себе выступает как модель, отражающая результаты производства. Для рассматриваемого случая комплексная переменная производственного результата может быть представлена в таком виде:

(1.1.1)

Здесь *i* – мнимая единица.

Рассматривая и моделируя новое число Z, мы тем самым одновременно учитываем и валовую прибыль G, и издержки производства C, поскольку они являются неотъемлемыми характеристиками комплексного числа. То есть, выполняя действия с какой-либо одной комплексной переменной, исследователь выполняет тем самым действие с двумя действительными переменными. Следовательно, использование комплексной переменной типа (1.1.1) как некоторой модели, связывающей воедино две экономические переменные, позволяет получить значительно более компактную запись, с одной стороны, и включить в экономико-математическую модель более подробную информацию о моделируемом объекте, с другой стороны, и рассматривать их во взаимосвязи - с третьей стороны.

Но если бы только на этом заканчивались новшества, вводимые в экономико-математическое моделирование применением комплексных переменных, то, может быть, этого делать и не стоило. Моделируемые с помощью комплексных переменных экономические показатели и процессы значительно более обширны, чем это кажется на первый взгляд. Действительно, если просто просуммировать вещественную и мнимую части переменной (1.1.1), то можно получить известный показатель - валовую выручку:

$$Q = G + C, \tag{1.1.2}$$

а если найти отношение действительной части к мнимой, то получим арктангенс полярного угла комплексного числа (1.1.1) и… рентабельность по себестоимости:

$$r = \frac{G}{C}. \tag{1.1.3}$$

То есть, моделируя поведение одной комплексной переменной, исследователь тем самым получает возможность изучать характер изменения не только двух исходных переменных, но и ряда дополнительных показателей, являющихся производными от них. В рассматриваемом случае – получается моделирование сразу четырёх экономических показателей.

Кстати, модуль комплексного числа (1.1.1), определяемый как

$$R = \sqrt{G^2 + C^2}, \tag{1.1.4}$$

не имеет аналогов в системе технико-экономического анализа, и переставляет собой новый экономический показатель, отражающий масштаб производства. Его использование на практике может расширить диагностический аппарат, например, такого раздела экономики, как анализ хозяйственной деятельности. Отношение валовой выручки Q к масштабу R также может дать дополнительную характеристику производства, свойства которой могут быть полезны при осуществлении экономического анализа. Такие примеры можно продолжать и продолжать. В каждом случае применения моделей комплексный переменных возникают всё новые и новые возможности для более подробного, более детального моделирования экономики.

Таким образом, даже простое представление экономических показателей и факторов в форме комплексного числа (1.1.1) уже даёт много новых возможностей для исследователя и экономико-математического моделирования. Но математические действия с комплексными числами дают результат, нетривиальный для области действий с действительными числами. Именно поэтому в математике существует раздел под названием «Теория функций комплексного переменного». Используя этот новый для экономики математический аппарат, тем самым расширяется инструментальная база моделирования экономики, поскольку модели комплексных переменных иначе описываются взаимосвязь между переменными, нежели модели действительных переменных. А какой мастер не обрадуется расширению инструмента своей работы?

Конечно, как следует из разделов теории функций комплексного переменного, любая комплекснозначная функция в итоге может быть представлена как система двух функций действительных переменных, но эти функции действительных переменных чаще всего оказываются столь сложными, что их на практике и не применяют - простые модели комплексных переменных имеют очень сложные аналоги в области действительных переменных. В соответствующих разделах этой монографии такие примеры будут приводиться.

Почему же модели комплексных переменных при моделировании сложных процессов зачастую являются более предпочтительными, нежели модели действительных переменных? В чём «сакральный» смысл этого свойства?

Для ответа на этот вопрос обратимся к геометрической интерпретации каждого из чисел. Действительное число представляет собой точку на число-

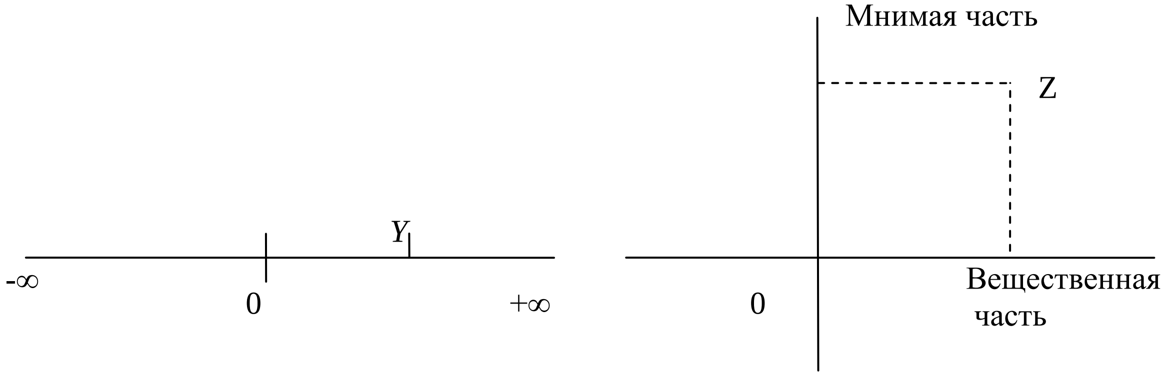

Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация действительного (*Y*) и комплексного (*Z*) чисел

вой оси, имеющей нулевую точку и устремляющуюся в плюс бесконечность или минус бесконечность (рис. 1.1, точка *Y*). Это действительное число характеризуется расстоянием от нулевой точки до этого числа. Если число находится на числовой оси левее нулевой точки, оно будет отрицательным, а если оно находится на числовой оси правее нулевой точки, то оно будет положительным.

Комплексное число, как следует из его математической записи (1.1.1), представляет собой точку не на оси, а на комплексной плоскости. Поэтому для того, чтобы однозначно определить данную точку на комплексной плоскости одной характеристики не достаточно. Для этого необходимо использовать уже две координаты – отрезок на оси вещественной части и отрезок на оси мнимой части (рис. 1.1, точка *Z*).

Выполняя какие-либо математические действия с двумя действительными переменными, выполняются математические операции только с этими двумя переменными, а, выполняя аналогичные действия с двумя комплексными числами, например, умножая одно комплексное число на другое комплексное число, тем самым одновременно выполняется математическая операция сразу с четырьмя действительными числами.

Сразу следует оговориться, что вышесказанное вовсе не означает, что математические действия с комплексными переменными лучше, чем такие же действия с действительными переменными, а модели комплексных переменных лучше, чем модели действительных переменных. Нет! Всё вышесказанное следует трактовать только так – математические действия с комплексными экономическими переменными дают *другие* результаты, а математические модели комплексных экономических переменных моделируют *другие* экономические процессы. В некоторых случаях модели комплексных переменных будут лучше описывать экономические процессы, чем модели действительных переменных, а в некоторых – хуже.

Но именно представление пары экономических показателей в форме комплексного числа, как это сделано в случае производственного результата (1.1.1), открывает перед экономистами возможность использования в целях моделирования экономики теорию функций комплексного переменного. В этой теории функции, переменными которых выступают комплексные числа, получили названия «комплекснозначных». Поскольку разработанный и предложенный в этой монографии материал как раз и представляет собой применение теории функций комплексного переменного в экономико-математическом моделировании, то для общего определения этого нового раздела экономико-математического моделирования предлагается использовать краткое и ёмкое название – «комплекснозначная экономика».

Итак, *комплекснозначная экономика – это раздел экономико-математического моделирования, переменными которого выступают комплексные значения экономических показателей*.

1.2. Основные понятия теории функций комплексного переменного

Поскольку в экономико-математическом моделировании комплексные переменные не использовались как самостоятельные переменные, действия с которыми позволяют формировать оригинальные экономико-математические модели, то мало кто из экономистов знаком со свойствами этих переменных и основными правилами действий с ними. Поэтому в данном параграфе излагаются основные понятия теории функций комплексных переменных, без знания которых неподготовленному читателю комплекснозначная экономика будет не понятна. Читателям, знакомым с теорией функций комплексного переменного, этот параграф можно пропустить.

В математике довольно часто приходится сталкиваться с необходимостью решения задач, не имеющих корней в области действительных (вещественных) чисел, например, необходимо найти корень уравнения:

$$x^2 + 4 = 0 \cdot$$

Решая это уравнение, получим такие корни

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} = \pm 2\sqrt{-1} \cdot$$

Очевидно, что в области действительных чисел это уравнение не имеет решения, поскольку квадратного корня из минус единицы в этой области не существует. Но, так как невозможность решения подобных задач приводит к существенному ограничению вычислительных возможностей, в математике было принято решение ввести так называемую «мнимую единицу», то есть число $i = \sqrt{-1}$. Квадрат этого числа, очевидно, будет равен минус единице: $i^2=-1$.

Тогда, уравнение, приведённое выше, имеет следующее решение, которое является мнимым:

$$x_{1,2} = \pm 2i\,.$$

С полученным мнимым числом уже можно работать дальше, как с решением приведённого выше квадратичного уравнения. Но корни квадратичного уравнения могут быть не только действительными или мнимыми. Они могут содержать в себе и действительную, и мнимую части. Например, если решить уравнение:

$$x^2 + x + 2,5 = 0,$$

то его корнями с учётом введённого понятия "мнимое число" являются два числа, величина которых находится по известной формуле:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\times 1\times 2,5}}{2}\,.$$

Первым корнем рассматриваемого уравнения является число $x_1 = 0,5 + 1,5i$, а вторым корнем этого уравнения является число $x_2 == 0,5 - 1,5i$. Так как корни уравнения представляют собой число, состоящее из двух частей, в котором есть как действительная (вещественная), так и мнимая части, это число получило название "комплексного числа".

Таким образом, комплексное число представляет собой числовую пару, состоящую из двух частей – вещественной и мнимой:

$$Z = x + iy\,, \tag{1.2.1}$$

где x – вещественная часть комплексного числа, iy- мнимая часть комплексного числа, x и y – вещественные (действительные) числа, i – мнимая единица, которая, как показано выше, удовлетворяет равенству:

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1\,. \tag{1.2.2}$$

С комплексными числами можно выполнять все те же действия, что и с вещественными, но с учётом специфики свойств мнимой единицы, эти действия имеют оригинальный характер, не присущий операциям в области действительных чисел.

Основная проблема, с которой сталкивается экономист при представлении некоторого экономического показателя в виде комплексного числа, это - сложность экономической интерпретации мнимой части. Главный вопрос при этом можно сформулировать примерно так: а где в реальной экономической жизни встречаются мнимые числа вообще, и мнимая единица, в частности? И какой смысл имеет мнимая единица? Да никакого смысла она не имеет - ни экономического, ни физического. Мнимая единица – это *математическое правило,* только и всего.

Где в реальной экономической жизни экономист встречается мнимыми числами и мнимой единицей? Нигде! Нигде он с ними не встречается. Ну а где в реальной экономической жизни экономист встречается, например с десятичным логарифмом? Также – нигде! Нет в окружающем нас мире ни десятичного логарифма, ни других логарифмов. Десятичный (или иной) логарифм – это *математическое правило*, с помощью которого оказалось очень удобно решать прикладные задачи, в том числе и в экономике. Точно также и с помощью мнимой единицы, которую как уже сказано, можно рассматривать как математическое правило, оказалось очень удобно решать целый класс прикладных задач в разных областях человеческой деятельности.

С помощью заданных условиями (1.2.1) и (1.2.2) правил, и появляется возможность использовать новые математические действия, получать новые математические результаты, и формировать новые математические модели. Сразу же следует указать, что ни в одной из областей естественно-научного знания нет процессов, в которых появляются мнимые числа или мнимая единица. Учёные вводят правила, в соответствии с которыми сложные явления, имеющие какие-либо две характеристики, относят к действительной и мнимой частям математической модели явления, и благодаря этому получают компактное описание сложных явлений.

Точно также и в экономике нет явлений, которые бы следовало отнести к действительной или мнимой частям комплексной переменной. Мы будем задавать правила, в соответствии с которыми будем это делать. И в том случае, когда такое представление сложного социально-экономического объекта позволит более точно описать его свойства, будем использовать модели комплексных переменных.

Комплексное число можно представить графически, что было сделано на рис. 1.1. Но из этого графического представления следует ряд новых и весьма важных для дальнейшего использования свойств комплексного числа, поэтому вновь обратимся к его графической интерпретации.

Поскольку в отличие от действительной переменной комплексная состоит из двух частей, то именно эти две части определяют комплексную плоскость . На графике рис. 1.2 нанесены эти две оси, которые по определению являются ортогональными – ось действительной части комплексного числа и ось мнимой части комплексного числа. Сразу же оговоримся, что перед нами плоскость декартовой системы координат, на осях которой откладываются вещественные числа x и y. Просто по горизонтальной оси будет откладываться действительная часть комплексной переменной, а по вертикальной – её мнимая часть.

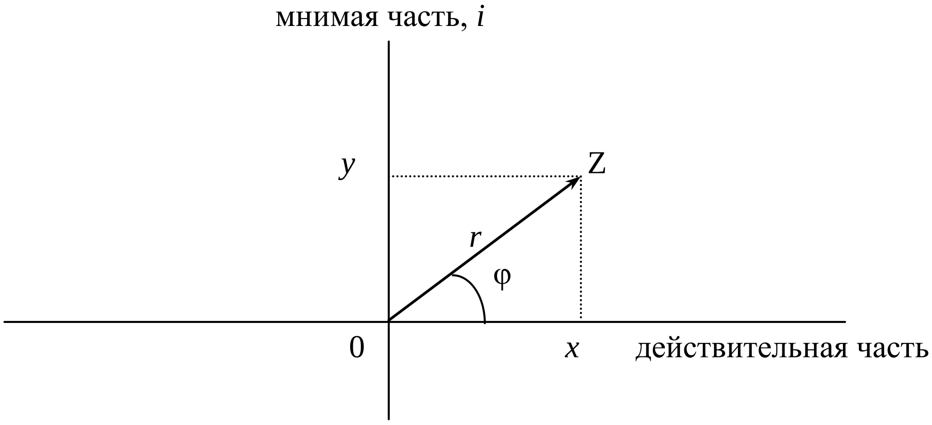

Рис. 1.2. Изображение комплексного числа на плоскости

Любая точка, лежащая на плоскости, определяемой указанными осями, представляет собой комплексное число, даже если эта точка лежит на оси вещественных чисел. Она в данном случае представляет собой комплексное число с нулевой мнимой частью.

Комплексное число (1.2.1) можно на плоскости декартовой системы координат рассматривать как вектор (рис. 1.2), который выходит из начала координат и заканчивается в точке (x, y). Тогда любое комплексное число можно представить в полярных координатах с помощью модуля вектора и полярного угла:

$$Z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \qquad (1.2.3)$$

Здесь φ – полярный угол (рис. 1.2), r – полярный радиус, который в данном случае получил название модуля комплексного числа (длина вектора). Модуль комплексного числа очевидно равен:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.2.4)$$

Полярный угол может быть найден как $\varphi = arctg\dfrac{y}{x} + 2\pi k$, где k-целое число. Иногда полярный угол называют аргументом комплексного числа.

Два комплексных числа равны друг другу тогда и только тогда, когда равны друг другу их действительные и мнимые части.

Тригонометрическая форма записи комплексного переменного особенно удобна для умножения комплексных чисел друг на друга. Пусть, например, помимо комплексного числа (1.2.3) имеется другое комплексное число:

$$w = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right).$$

Вычислим произведение одного комплексного числа *z* на другое комплексное число *w*, используя для этого их тригонометрическую форму. Опуская элементарный вывод, приведём итоговый результат:

$$zw = r\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\left(\cos\psi + i\sin\psi\right) = r\rho\left(\cos\left(\varphi+\psi\right) + i\sin\left(\varphi+\psi\right)\right). \quad (1.2.5)$$

Эта формула известна как формула Муавра, согласно которой модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а его аргумент – сумме аргументов сомножителей. Формула Муавра существенно облегчает такие операции с комплексными числами, как возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа. Действительно, для того, чтобы найти, например, квадрат комплексного числа, необходимо возвести в квадрат его модуль, а полярный угол умножить на два.

В 1748 году Л.Эйлер в своём "Введении в анализ бесконечно малых" привёл формулу, носящую его имя, а именно:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad (1.2.6)$$

С помощью формулы Эйлера любое комплексное число *Z* с модулем *r* и аргументом φ можно записать в следующей показательной форме (экспоненциальной форме):

$$z = re^{i\varphi}, \quad (1.2.7)$$

Эта форма записи оказывается также очень удобной для перемножения двух комплексных чисел z_1 и z_2 и выполнения других операций. Действительно, воспользовавшись (1.2.7), вновь перемножим комплексное число *z* на другое комплексное число *w*:

$$z_1 \times z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad (1.2.8)$$

Поскольку модуль комплексного числа может быть представлен в экспоненциальной форме:

$$r = e^{\ln r},$$

то комплексное число (1.2.7) может быть представлено в другом виде, а именно:

$$z = e^{\ln r + i\varphi},$$

что позволяет вычислять логарифмы комплексного числа.

Полярный угол комплексного числа φ для краткости называют аргументом комплексного числа и обозначают его так:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z \tag{1.2.9}$$

Аргумент комплексного числа определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \tag{1.2.10}$$

где k – целое число, а $argz$ есть главное значение аргумента, определяемое условием:

$$-\pi < \arg z \leq \pi \tag{1.2.11}$$

Для краткости и формализации формулировки математических задач действительную часть комплексного числа z обозначают как $Re(z)$. Мнимую часть комплексного числа z обозначают как $Im(z)$. С учётом этих обозначений может быть, например, легко задана некоторая область на комплексной плоскости z, множество точек которой удовлетворяет условию:

$$\operatorname{Im} z^3 > 4,5 .$$

Для нахождения этой области надо найти мнимую часть комплексной переменной (z^3), а затем подставить найденное значение в указанное неравенство. Кстати говоря, описать множество точек на плоскости, определённое вышеуказанным неравенством, с использованием, например, декартовой системы координат с применением действительных чисел представляет собой значительно более трудоёмкую задачу и будет представлять собой систему нескольких нелинейных неравенств. Компактность представления этой задачи с помощью комплексных переменных очевидна.

Комплексная плоскость состоит из различных областей, на которых может быть определена функция комплексного переменного. Говорят, что задана функция комплексного переменного

$$w = f(z), \tag{1.2.12}$$

если указан закон, по которому каждой точке z из множества допустимых значений ставится в соответствие определённая точка или совокупность точек w. В первом случае функция (1.2.12) называется однозначной, во втором – многозначной[2].

Если положить $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ будет равносильно заданию двух функций двух действительных переменных:

$$u = u(x, y) \text{ и } v = v(x, y). \tag{1.2.13}$$

Как уже говорилось, существует логарифм комплексного числа. С учётом того, что аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π , логарифм комплексного числа z можно легко вычислить так:

$$\ln z = \ln(e^{\ln r + i\varphi}) = \ln r + i\varphi + 2\pi k \tag{1.2.14}$$

То есть, логарифм комплексного числа - функция периодическая. Обычно используют главное значение логарифма, принимая $k=0$.

Воспользовавшись теорией комплексных чисел, можно связать функциональной зависимостью любую пару действительных чисел. Ситуации, когда в экономике можно поставить в функциональное соответствие друг другу пару значений, встречаются достаточно часто.

Так например, результатами любой производственной деятельности могут выступать такие показатели, как суммарные затраты на производство (издержки) C и валовая прибыль G. Тогда комплексную переменную производственных результатов можно представить в таком виде:

$$G+iC.$$

Производственные ресурсы, используемые на реальных хозяйствующих субъектах, многообразны. Однако всё их многообразие в теории производственных функций сводится к двум ресурсам: капитальным K и трудовым L, которые также можно представить в качестве одной комплексной переменной:

$$K+iL.$$

Мы пока не обсуждаем вопрос о том, какие переменные отнести к действительным или мнимым частям комплексных переменных. Это будет сделано позже. Важно, что с помощью мнимой единицы мы имеем возможность связать в одно комплексное число два экономических показателя. Именно такое представление экономических показателей производства позволяет го-

[2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. - С. 19

ворить о том, что модель, связывающая производственные ресурсы с производственными результатами, может иметь вид функции комплексных переменных:

$$G+iC=f(K+iL). \tag{1.2.15}$$

Любая модель, которая генерируется зависимостью (1.2.15), будет описывать с той или иной степенью точности реальный производственный процесс. Причём будет делать это иначе, чем это делают модели действительных переменных. Так как в уравнении (1.2.15) связываются производственные результаты с производственными затратами, то мы получили новый класс производственных функций.

Помимо этих пар значений в экономике можно выделить и иные пары экономических показателей, связывая которые воедино мнимой единицей, мы получим комплексные экономические переменные, математические действия с которыми нам дадут иные результаты, чем те, которые имеют экономисты сегодня, используя модели действительных переменных.

Чаще всего в экономике несколько показателей (более двух) зависят от нескольких факторов (более двух). Поэтому очень хотелось бы промоделировать эту зависимость, то есть связать некоторым математическим уравнением совокупность экономических показателей с совокупностью факторов, оказывающих воздействие на них, то есть, использовать гиперкомплексные числа. Но попытка ввести систему чисел, содержащую три единицы, не дала положительных результатов[3]. Удалось построение системы чисел с четырьмя мнимыми единицами. В этом случае получается так называемая система кватернионов, то есть чисел вида:

$$A = a + ib + jc + kd\,, \tag{1.2.16}$$

где a,b,c,d – вещественные числа, i, j, k - мнимые единицы.

Действия с кватернионами имеют сложный характер, который не позволяет их использовать в каких-либо практических целях, и до сих пор остаётся областью идеализированных исследований. В поле кватернионов не выполняется, например, свойство коммутативности умножения, что приводит к многочисленным курьёзам. Так, для уравнения:

$$x^2 + 1 = 0$$

имеется бесконечное множество корней:

$$X = ip + jq + kr\text{, где } p^2 + q^2 + r^2 = 1.$$

[3] Малая математическая энциклопедия. – Издательство Академии наук Венгрии, Будапешт, 1976. - С. 60.

Поэтому вполне очевидное желание описать зависимость некоторого комплексного показателя, представленного в виде кватерниона (1.2.16), от другого экономического показателя, представленного в виде другого кватерниона, пока что не осуществимо.

В данной работе мы будем использовать только комплексные числа типа (1.2.1) или рассматривать функции комплексного переменного (1.2.12). При необходимости будем использовать выводы и предложения теории функции комплексного переменного.

Последнее важное свойство комплексных переменных, о котором здесь следует упомянуть, это понятие бесконечности. Для действительных переменных оно очевидно (рис. 1.1). Когда числовая ось устремляется неограниченно вправо в области положительных чисел, это означает плюс бесконечность. Если же числовая ось устремляется влево от нулевой точки в область отрицательных чисел, то это означает стремление к минус бесконечности. Если попытаться таким же образом определить бесконечность для комплексной переменной, то мы потерпим фиаско, поскольку комплексное число представляется не на числовой оси, а на комплексной плоскости и в бесконечность уходит каждая из осей, определяющих комплексную плоскость. Причём ось действительных чисел имеет как плюс бесконечность, так и минус бесконечность, точно также как и ось мнимых чисел. Как же тогда определить бесконечное комплексное число?

Ответ на этот вопрос дал Б.Римман. Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в нулевой точке[4]. Обозначим через P точку сферы S, противоположную нулевой точке. Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M, которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P. При этом последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек сферы S, сходящаяся к точке P. Поэтому точке $z=\infty$ ставится в соответствие точка P на сфере Римана.

Поскольку сфера Римана представляет собой некоторое иное отображение комплексных переменных, то и это иное отображение может найти применение в экономике, но поскольку эта задача выходит за рамки задач, определяемых целью данного научного исследования – сформировать основы комплекснозначной экономики, - оставим её как возможность для исследования в других научных работах.

1.3. Аксиоматическое ядро теории комплекснозначной экономики

Любая теория базируется на некоторых исходных положениях, принимаемых без доказательства. Первая группа таких исходных положений явля-

---

[4] Шабунин М.И. Теория функций комплексного переменного. – М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ? 2002. - С. 19

ется аксиомами, которые, как известно, принимаются без доказательства в силу их очевидности. Вторая группа представляет собой постулаты, которые являются выводами, полученными в других разделах науки и поэтому принимаемые без доказательства, поскольку это уже сделано ранее другими исследователями.

В теории комплекснозначной экономики будем постулировать положения теории функций комплексных переменных, приводя её основные рекомендации и выводы без доказательства, поскольку каждый сомневающийся в них всегда может обратиться к имеющимся в изобилии учебным и научным работам по этому разделу математики.

Постулироваться также будут основные выводы теоретический экономики или прикладных разделов экономики. Нам незачем доказывать, например, взаимосвязь между сдельным заработком рабочего и производительностью его труда – это сделано в разделе экономической науки, который относится к сфере управления трудом.

Приведём те положения, которые сегодня кажутся очевидными и не требуют в силу этого доказательства, то есть, являются аксиоматичными, и без опоры на которые комплекснозначная экономика, как теоретическое построение существовать не может.

Первое аксиоматическое положение заключается в том, что практически все экономические показатели, по которым экономист судит об экономике, представляют собой некоторые обобщённые или агрегированные величины, которые могут быть легко представимы в виде суммы двух слагаемых, которые с определённой степенью уверенности можно назвать как «активная часть» и «пассивная часть». В основе такого представления лежат многочисленные классификации, принятые в экономике.

Например, трудовые ресурсы любого предприятия можно, в соответствии с приведённым признаком классификации, разделить на активную часть (промышленно-производственный персонал) и пассивную часть (не производственный персонал). Или расходы любой семьи можно разделить на активную часть, связанную с непосредственным удовлетворением имеющихся потребностей, и пассивную часть, связанную с удовлетворением будущих потребностей. То же самое можно сказать и про разделение валового внутреннего продукта любой страны, который можно представить в виде двух составляющих – потребления (активная часть) и накопления (пассивная часть).

А поскольку активная и пассивная части некоторого показателя или фактора оказывают различное влияние на другие экономические показатели, то их общее влияние вполне логично представить в виде комплексной переменной, к действительной части которой мы договоримся относить активную составляющую, а пассивную отнесём к мнимой части комплексной переменной.

Как уже упоминалось ранее, в электроэнергетике, например, при моделировании переменного тока, к действительной части комплексной переменной относят активную часть, а к мнимой – реактивную. Переменные токи возникают в ситуации вращающегося электромагнитного поля, которое наводит в проводнике переменные - электрический ток, напряжение, мощность и энергию. Передача электроэнергии по некоторым цепям встречает активное и реактивное сопротивление. Казалось бы – вот оно смысловое содержание действительной и мнимой частей комплексной переменной. Но на самом деле отнесение активной части электроэнергетических показателей к действительной части комплексной переменной, также как отнесение реактивных составляющих к мнимой части условно – с таким же успехом их можно поменять местами, а именно – активную мощность отнести к мнимой части, а реактивную – к действительной. Да и сами понятия «активная часть» и «реактивная часть» являются некоторым правилом, предварительной договорённостью между учёными. Если, например, активный ток отнести к мнимой части комплексной переменной, а его реактивную составляющую – к действительной части, то есть сделать всё наоборот, нежели это принято в электроэнергетике в настоящее время, то вид применяемых математических моделей несколько изменится, а процесс вычислений и, самое главное, их результаты – нисколько не изменятся. Просто при первом использовании теории функций комплексных переменных в электроэнергетике учёные договорились о том - что и к какой части они отнесут, и с этим ПРАВИЛОМ все согласились и сегодня уже такая интерпретация ни у кого не вызывает сомнений до такой степени, что некоторый учёные всерьёз считают, что реактивная часть электромагнитной мощности, например, по своим физическим свойствам в точности соответствует мнимой части комплексной переменной. Конечно, это не так.

Вот и мы в теории комплекснозначной экономики сразу же договоримся о том, что в комплекснозначной экономике будет действовать ПРАВИЛО, в соответствии с которым активную часть экономического показателя будем относить к действительной части комплексной переменной, а пассивную часть – к мнимой.

Теперь следует сказать о нескольких важных условиях, ограничивающих область применения комплексных чисел в экономике. Для того чтобы использовать аппарат теории функций комплексных переменных в экономике, при объединении двух экономических показателей в одну комплексную переменную, должны выполняться следующие очевидные условия, определяемые особенностями комплексных чисел:

1. Эти показатели должны быть двумя характеристиками одного и того же процесса или явления, то есть – отражать разные стороны этого явления;
2. Они при этом должны ещё иметь и одинаковую размерность или быть безразмерными.

Почему необходимо учитывать первое условие, ведь по правилам, действительная и мнимая части являются независимыми (ортогональными) друг от друга? Необходимо ли их рассматривать как «две стороны одной медали»? Да необходимо. И необходимо это потому, что в итоге формирования комплексной переменной из двух действительных переменных, она в дальнейшем рассматривается как самостоятельная единая переменная. Она, образно выражаясь, несёт в себе информацию о двух составляющих её величинах и отражает функциональное влияние каждой из своих составляющих на некоторый результат. Эти величины должны отражать разные стороны одного и того же явления, иначе их объединение в одну переменную теряет всякий смысл. Эти переменные могут находиться в тесной функциональной зависимости друг от друга, а могут быть и вовсе независимыми, но главное условие – они должны нести в себе информацию о некотором общем для них процессе. Такие характеристики комплексного числа как его модуль и аргумент имеют смысл только тогда, когда составляющие комплексного числа отражают общее содержание.

Второе условие, требующее одинаковой размерности составляющих комплексной переменной, определяется особенностью свойств комплексного числа. Действительно, как например, можно рассчитать модуль комплексного числа (1.2.4), если действительная и мнимая части имеют разные размерности, например, рубли и штуки? Возвести в квадрат каждую из них и сложить не представляется никакой возможности – руб^2 нельзя сложить со шт^2. Точно также и при вычислении полярного угла необходимо найти отношение мнимой части к действительной, а потом найти арктангенс полученного числа. Если действительная и мнимая части разноразмерные, то ничего поделать нельзя, ведь тангенс угла – величина безразмерная, она не может измеряться в руб/шт.

В экономике существенная часть показателей может быть приведена к денежным единицам измерения, например, затраты труда можно определить не в «человеко-часах», а в стоимости оплаты труда – величиной фонда оплаты труда на предприятии или подразделении предприятия. Поэтому это условие в большей части реальных экономических задач вполне выполнимо. Но в том случае, когда это сделать невозможно, каждый из показателей следует привести к относительным безразмерным величинам способом, который окажется наилучшим для выбранной формы модели.

1.4. Базовая модель комплекснозначной экономики

Экономико-математические модели, оперирующие действительными переменными, основаны на том, что некоторый экономический показатель y представляется зависимым от другого показателя x. Эта зависимость может быть описана с помощью функции, когда показателю x ставится в соответствие один и только один показатель y:

$$y = f(x). \tag{1.4.1}$$

Поскольку каждая из переменных функции (1.4.1) является совокупностью действительных чисел, графически изображаемых множеством точек на числовой оси, проходящей через нулевую точку от минус бесконечности до плюс бесконечности, а расстояние от нуля до данной точки количественно в избранном масштабе и отражает само число, то модель (1.4.1) выражает то обстоятельство, что каждой точке на оси действительной переменной x соответствует одна и только одна точка на другой оси действительной переменной y. Графически эти две оси можно расположить на одной плоскости в любом порядке, например, параллельно друг другу. Но наибольшую информативность представляет такое расположение этих числовых осей, когда они пересекаются друг с другом под прямым углом (перпендикулярны друг другу), а точкой их пересечения является общая на каждой из осей нулевая точка. В этом случае можно рассматривать модель (1.4.1) в декартовой системе координат.

Модель (1.4.1) можно усложнять как это заблагорассудится, добавлять в неё новые переменные и делать её многофакторной. Тогда показатель y будет зависеть от нескольких переменных, а график такой зависимости будет уже трёх-, четырёх- и вообще – многомерным, в зависимости от количества переменных.

Функция (1.4.1) является базовой для построения моделей в области действительных переменных, а её графическая интерпретация на плоскости декартовой системы координат выступает дополнительной характеристикой функции.

Точно так же в комплекснозначной экономике рассматривается базовая модель зависимости одной комплексной переменной от другой. Зная свойства этой зависимости, можно определить, какие именно процессы могут быть описаны с помощью неё, а также легко переходить к многофакторным комплекснозначным моделям и к системам комплекснозначных моделей. Сама базовая модель представляет собой функциональную зависимость одной комплексной переменной y_r+iy_i от другой комплексной переменной x_r+ix_i:

$$y_r + iy_i = f(x_r + ix_i). \qquad (1.4.2)$$

В теории функций комплексных переменных такая функция называется комплекснозначной.

Поскольку любая комплексная переменная представляется графически точкой на плоскости декартовой системы координат, то равенство (1.4.2) означает, что одной точке на комплексной плоскости переменных x ставится в соответствие точка (а в некоторых случаях – несколько точек) на комплексной плоскости переменных y. Это соответствие изображено на рис. 1.3.

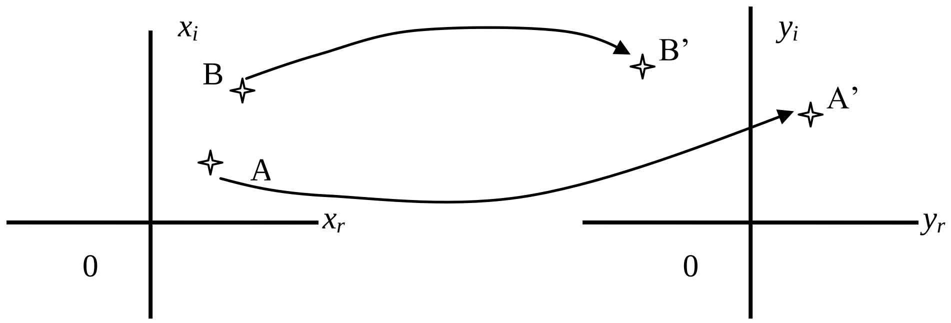

Рис. 1.3. Конформное отображение точек комплексной плоскости x на комплексную плоскость y

Слева на этом рисунке изображена комплексная плоскость переменных x, на которую нанесены две точки, обозначенные буквами A и B. Каждой из этих точек соответствует по правилу (1.4.2) некоторая точка на плоскости комплексных переменных y. Точке A соответствует точка A', а точке B соответствует точка B'. Таким образом любое множество точек на комплексной плоскости x с помощью комплекснозначной функции (1.4.2) отображается на комплексную плоскость y. Поэтому графическое изображение комплекснозначной функции принято называть конформным отображением. Такое понятие вполне устраивает нас для целей данного научного исследования, хотя, если использовать чёткое математическое определение конформного отображения, то тогда надо использовать, например, такое определение: отображение окрестности точки x_0 на окрестность точки y_0, осуществляемое функцией (1.4.2), называют конформным, если в точке x_0 оно (отображение) обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений[5]. Это означает, что не всякое отображение точек одной комплексной плоскости на другую плоскость с помощью функции (1.4.2) будет конформным, а только такое, при котором кривые на первой плоскости переходят в кривые другой плоскости так, чтобы угол между касательными к этим кривым на первой плоскости соответствовал некоторому углу к касательным на второй плоскости, а бесконечно малому кругу с центром в точке x_0 первой плоскости соответствовал бесконечно малый круг второй комплексной плоскости с центром в точке y_0. Комплекснозначные функции, которые будут использованы в данной работе, этим свойством обладают, поэтому и будем рассматривать конформное отображение, как графическую интерпретацию функциональной зависимости между двумя комплексными переменными.

Если каждой точке на комплексной плоскости x с помощью комплекснозначной функции (1.4.2) ставится в соответствие одна и только одна точка на комплексной плоскости y, то такое конформное отображение называется однолистным. Но в теории функций комплексного переменного часто встречаются случаи, когда каждой точке комплексной плоскости x с помощью

[5] Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Функция комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Едиториал УРСС, 2003. - С. 123.

комплекснозначной функции (1.4.2) ставится в соответствие несколько точек на комплексной плоскости y. Функция такая, как уже говорилось, называется многозначной, а графическое изображение конформного отображения называется многолистным. Более подробно явление многолистности будет рассмотрено ниже в разделе, где многолистность проявляется как свойство комплекснозначной функции.

Из рис. 1.3 легко убедиться в том, что графическая наглядность функций комплексных переменных уступает наглядности функциям действительных переменных. Там, где экономист, изучая эмпирические данные, использует графический анализ соответствия действительных переменных друг другу, он получает представление о типе и направлении этой взаимосвязи, точно зная, какой вид принимает линейная зависимость, квадратичная, экспоненциальная и т.п.

Если же он попытается изучать конформное отображение одной реальной изменяющейся комплексной переменной с помощью некоторой функции на плоскость другой комплексной переменной и будет это делать графически, то чаще всего он никакого представления о взаимосвязи между комплексными переменными не получит.

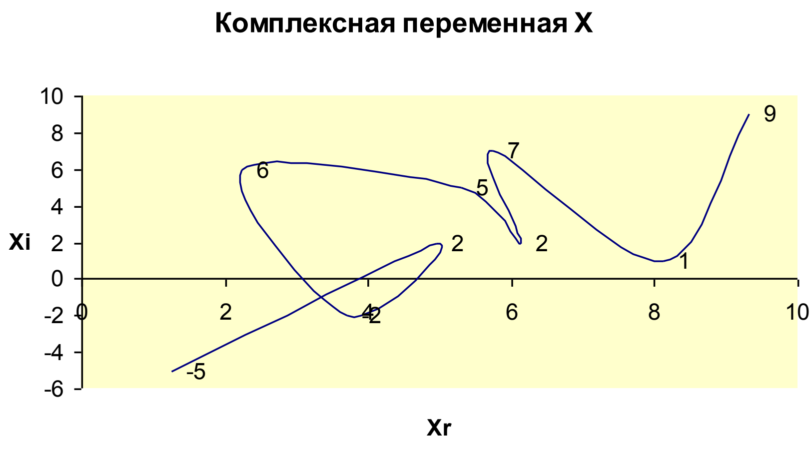

Рис. 1.4. Некоторое изменение комплексной переменной x.

Так, например, на графике рис. 1.4 представлено некоторое изменение комплексной переменной $x=x_r+ix_i$. А на рис. 1.5 представлено изменение другой комплексной переменной $y=y_r+iy_i$.

Исследователю известно, что между этими двумя комплексными переменными существует некоторая взаимосвязь, характер которой ему не известен. Перед ним стоит задача определить: какой вид комплекснозначной функции следует применить для моделирования этой взаимосвязи?

Визуальное сравнение графиков рис. 1.4 и 1.5 создаёт устойчивое впечатление о том, что если и имеется зависимость между этими двумя комплексными переменными, то эта зависимость носит сложный нелинейный характер.

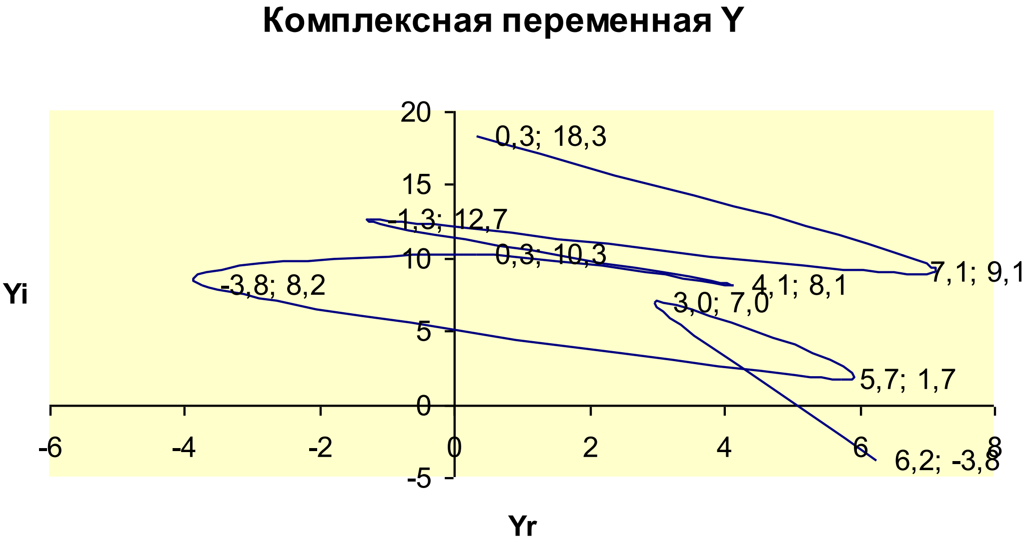

Рис. 1.5. Изменение комплексного показателя *y*, соответствующее изменению комплексного показателя *x* рис. 1.4.

Но на самом деле, перед нами простая линейная комплекснозначная функция вида:

$$y_r + iy_i = (1+i)(x_r + ix_i) .$$

Этот пример наглядно показывает сложность использования функций комплексной переменной на практике.

Но, с другой стороны, в экономике чаще всего при моделировании приходится иметь дело с гладкими тенденциями изменения показателей, поэтому, например, плавная тенденция изменения одного комплексного показателя *x* будет трансформироваться в плавную тенденцию другого комплексного показателя *y*, если между ними есть та же самая линейная зависимость, которая на графиках рисунков 1.4 и 1.5 никак не выявлялась визуально.

Базовую модель (1.4.1), в соответствии со свойствами комплексных чисел, можно представить как систему двух равенств действительных переменных:

$$\begin{cases} y_r = f_r(x_r; x_i) \\ y_i = f_i(x_r; x_i) \end{cases} . \qquad (1.4.3)$$

Например, простейшая линейная комплекснозначная функция

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i) \qquad (1.4.4)$$

может быть представлена в виде системы двух равенств:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i \\ y_i = a_0 x_i + a_1 x_r \end{cases}. \qquad (1.4.5)$$

Откуда следует вывод о том, что изменение одного из показателей комплексной переменной *x* ведёт к изменению как действительной, так и мнимой частей комплексной переменной *y*. То есть, комплекснозначные функции по определению являются многофакторными.

В области действительных переменных мы также встречаем многофакторные модели, например:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 . \qquad (1.4.6)$$

Но если в области действительных переменных для модели (1.4.6) поставить задачу: для заданного значения y^* найти пару значений влияющих переменных, то эта задача не имеет единственного решения, поскольку из равенства (1.4.6) при известном значении y^* можно получить уравнение с двумя неизвестными:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = y^* - a_0 . \qquad (1.4.7)$$

Для комплекснозначной функции (1.4.2) такая задача (при отсутствии многолистности) легко решается, например, для линейной функции (1.4.4) при известных значениях $y_r{}^*$ и $y_i{}^*$ легко найти одну единственную пару значений комплексной переменной *x*:

$$x_r + i x_i = \frac{y_r^* + i y_i^*}{a_0 + i a_1} \qquad (1.4.8)$$

Например, если предприятие собирается найти наилучшее сочетание производственных ресурсов для получения заданного значения прибыли, в области действительных переменных необходимо решать оптимизационную задачу, а в комплекснозначной экономике – построить обратную функцию так, как это сделано в (1.4.8).

Частным случаем базовой модели (1.4.2) выступает модель комплексного аргумента:

$$y_r = f(x_r + i x_i) . \qquad (1.4.9)$$

Эту модель в общем виде можно представить как комплекснозначную функцию, у которой мнимая часть равна нулю:

$$y_r + i0 = f(x_r + ix_i). \qquad (1.4.10)$$

То есть – это функция действительных переменных, но представленная в комплекснозначной форме. Для целого ряда экономически задач интерес представляет обратная функция:

$$x_r + ix_i = f(y). \qquad (1.4.11)$$

Это – функция комплексных переменных с действительным аргументом. Простым примером такой функции может служить функция вида:

$$x_r + ix_i = y^{a_0 + ia_1}. \qquad (1.4.12)$$

Здесь изменение одной переменной определяет одновременное изменение двух переменных. Если моделировать такую ситуацию с помощью моделей действительных переменных, необходимо использовать систему двух уравнений. Компактность моделирования сложных процессов – очевидное преимущество комплекснозначной экономики.

1.5. Некоторые сведения о геометрии Минковского

Комплексные переменные «открывают дверь» в удивительный мир возможных представлений об окружающем мире и его моделей. Вся сила этого математического аппарата проявляется в теоретической физике, особенно в той ей части, которая посвящена теории относительности. Графическую интерпретацию искривления пространства и «замедления» или «ускорения» времени даёт физику именно применение теории функций комплексного переменного. И связана эта интерпретация с именем Минковского – выдающегося математика из Кёнигсберга.

Поскольку этот инструмент может быть использован и в экономике, то в первой главе монографии, которая содержит в себе методологические основы комплекснозначной экономики, следует рассмотреть и геометрию Минковского[6]. Первый удачный опыт применения свойств геометрии Минковского для решения экономических задач был осуществлён И.С.Светуньковым для целей проверки адекватности моделей реальному объекту. В монографии основные результаты этого подхода изложены в параграфе 3.7.

[6] Сазанов А.А. Четырёхмерный мир Минковского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

Прежде всего, следует заметить, что до сих пор комплексное число $y_r + iy_i$ мы рассматривали на евклидовой плоскости, то есть на плоскости, по осям абсцисс и ординат которой откладываются действительные числа. Не случайно на вертикальной оси евклидовой плоскости мы писали «мнимая часть» или «iy_i», как это сделано на рис. 1.6. Мнимое число мы изображали с помощью действительного числа.

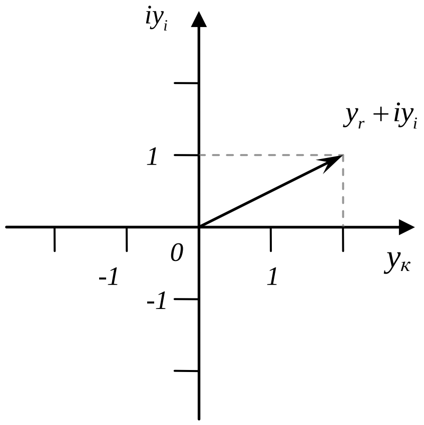

Рис. 1.6. Комплексное число на евклидовой плоскости

То есть, комплексное число, состоящее из действительной и мнимой частей, мы представляли как действительное число в векторной форме. Тогда в чём разница между комплексным числом и двумерным вектором? И имеет ли смысл использовать теорию функций комплексного переменного, когда можно использовать, например, векторную алгебру? В такой геометрической интерпретации подобные вопросы очевидны, а простых ответов на них нет.

Для того чтобы понять всю мощь аппарата теории функций комплексной переменной, следует перейти от евклидовой к псевдоевклидовой комплексной плоскости. Для этого по горизонтальной оси этой плоскости будем откладывать действительное число (вещественную часть комплексной переменной), а по вертикальной – мнимое число (мнимую часть комплексной переменной). Тогда перед нами будет действительно комплексная плоскость (рис. 1.7) и точки на ней будут иметь совсем иную интерпретацию, нежели точки евклидового пространства. Существенное отличие этой плоскости от евклидовой плоскости (рис.1.6) заключается в следующем. В евклидовой плоскости масштаб каждой из её осей (абсцисс и ординат) определяется единичным отрезком. По горизонтальной оси вправо от нулевой точки откладывается отрезок «+1», влево – «-1». Точно также и по вертикальной оси: вверх от нуля откладывается «+1», вниз – «-1». Тогда координаты единичной точки будут $(1;1)$.

Но ведь комплексное число состоит из действительной и мнимой частей и комплексная единица должна иметь координаты $(1;i)$, поэтому по горизонтальной оси надо откладывать действительные числа, а по вертикальной – не «+1» или «-1», а мнимые числа. Тогда на комплексной плоскости на горизонтальную ось откладываем вправо от нуля единичный отрезок «+1», а влево от нуля в отрицательную область – «-1», а вот на вертикальной оси плоскости наносится вверх «+*i*», а вниз от нуля – «-*i*». Тогда любая мнимая составляющая комплексного числа будет откладываться по этой оси так:

надо i умножить на y_i раз. Принципиальное отличие в геометрической интерпретации заключается в том, что расстояния на этой псевдоевклидовой комплексной плоскости будут изображаться совсем не так, как на евклидовой, а, значит и кривые будут изображаться иначе.

Зададим простой вопрос: какое расстояние имеет вектор, проведённый от нулевой точки до точки, соответствующей комплексному числу $y_r + iy_i$?

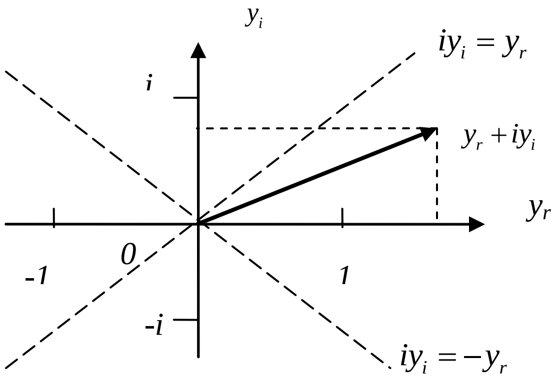

Рис.1.7. Комплексное число на псевдоевклидовой плоскости

Или, иначе говоря: какую длину он имеет? Вполне очевидный ответ окажется не верным. Длина вектора, проведённого из нулевой точки к данной не характеризует расстояние, как это есть на евклидовой плоскости. Правильный ответ на поставленный вопрос следует из его математического решения. Поскольку это расстояние по определению равно квадратному корню из суммы квадратов координат точки, то для комплексной псевдоевклидовой плоскости получим следующее выражение:

$$|z_t| = \sqrt{y_r^2 + (iy_i)^2} = \sqrt{y_r^2 - y_i^2}\,. \qquad (1.7.1)$$

Таким образом, расстояния и длины на комплексной псевдоевклидовой плоскости имеют совсем другую интерпретацию, нежели те же характеристики евклидовых плоскостей. Из формулы (1.7.1) следуют удивительные для области действительных переменных свойства. Так, в том случае, когда модуль действительной части комплексной переменной больше модуля мнимой части, длина вектора является действительным числом. Когда же модуль действительной части комплексной переменной меньше модуля мнимой части, подкоренное выражение (1.7.1) становится отрицательным и расстояние поэтому становится мнимым числом! А в том случае, когда модуль действительной части комплексной переменной равен модулю мнимой части, то из (1.7.1) со всей очевидностью следует, что расстояние от точки до начала координат равно нулю!

Как известно, на евклидовой плоскости нулевую длину может иметь только нулевой вектор (с координатами (0;0)), а на псевдоевклидовой плоскости (рис.1.7), ненулевые векторы могут иметь нулевую длину. Таких векторов, длина которых равна нулю, на плоскости будет множество, и все они, как легко следует из (1.7.1), будут удовлетворять условию:

$$|y_r| = |y_i|. \tag{1.7.2}$$

Или, как следствие этого, одному из двух условий:

$$y_r = y_i, \tag{1.7.3}$$

$$y_r = -y_i. \tag{1.7.4}$$

Вектора, координаты которых удовлетворяют условию (1.7.3) или (1.7.4), лежат на соответствующих прямых в псевдоевклидовой плоскости и имеют нулевые длины. Эти прямые называются *изотропными*. На рис. 1.7 изотропные прямые показаны пунктирными линиями. Они делят плоскость на 4 сектора. На этой комплексной псевдоевклидовой плоскости все векторы с действительными длинами будут лежать либо в правом, либо в левом секторе, в то время как векторы с мнимыми длинами будут лежать либо в верхнем, либо в нижнем секторе. В некоторых экономических задачах это свойство может оказаться весьма полезным для идентификации различных объектов.

Теперь экономисту понятно, как физики представляют себе искривление пространства и времени, а также - что явилось основанием для фантастических гипотез о мгновенном переходе точки на гигантские расстояния в пространстве – ведь есть множество точек в псевдоевклидовом пространстве, расстояния между которыми равны нулю! Не призывая распространять геометрию Минковского на экономическое пространство, следует, всё же отметить саму возможность использования этого нового математического аппарата для моделирования экономики.

Глава вторая. Конформные отображения комплекснозначных функций в моделировании экономики

2.1.Степенные функции комплексных переменных

Прежде, чем использовать инструмент теории функций комплексной переменной в экономике, необходимо изучить свойства этого инструмента. Одним из наиболее ярких способов понимания этих свойств в теории функций комплексного переменного является раздел конформного отображения точек с одной комплексной плоскости на другую комплексную плоскость. В предыдущей главе было дано полное определение понятия «конформное отображение». Применительно к разнообразным случаям теории функций комплексного переменного конформное отображение представляет собой задачу разной степени сложности. В нашем случае будут рассмотрены самые простые случаи, поскольку знание характера конформных отображений элементарных комплекснозначных функций позволяет учёному правильно выбрать комплекснозначную функцию для моделирования, зная её основные свойства.

Не умаляя общности рассуждений, можно говорить, что конформное отображение представляет собой удобный графический способ понимания того, как с помощью заданной функции одна комплексная переменная, изменяющаяся на комплексной плоскости факторов отображается на другую комплексную плоскость, моделируя значение переменной комплексного результата.

Поскольку конформное отображение линейной комплекснозначной функции элементарно, рассмотрим вначале свойства степенной комплекснозначной функции, понимая, что при показателе степени этой функции, равном единице, они превращается в простую линейную комплекснозначную модель.

Обозначим объясняющую комплексную переменную таким образом:

$$z = x_r + ix_i = re^{i\varphi}, \tag{2.1.1}$$

где x_r - действительная часть комплексной переменной;

x_i - мнимая часть комплексной переменной;

r - модуль комплексной переменной $r = \sqrt{x_r^2 + x_i^2}$,

φ - полярный угол этой переменной (аргумент комплексной переменной $Arg\, z$):

$$\varphi = Argz = \begin{cases} arctg\, {}^{x_i}\!/_{x_r} + 2k & \text{(I и IV квадранты комплексной плоскости)} \\ arctg\, {}^{x_i}\!/_{x_r} + 2(k+1) & \text{(II и III квадранты комплексной плоскости)} \end{cases},$$

i – мнимая единица.

Результирующую переменную представим в виде другой комплексной переменной:

$$w = y_r + iy_i = \rho e^{i\theta}, \qquad (2.1.2)$$

где y_r - действительная часть комплексной результирующей переменной;

y_i - мнимая часть комплексной результирующей переменной;

ρ - модуль комплексной переменной $\rho = \sqrt{y_r^2 + y_i^2}$,

θ - полярный угол этой переменной:

$$\theta = Argw = \begin{cases} arctg\, {y_i}/{y_r} + 2k \text{ (I и IV квадранты комплексной плоскости)} \\ arctg\, {y_i}/{y_r} + 2(k+1) \text{ (II и III квадранты комплексной плоскости).} \end{cases}$$

Будем считать, что все переменные, рассматриваемые в монографии, в соответствии с общими аксиоматическими посылками, являются безразмерными. Кроме того, они определены на всей области комплексной плоскости. С учётом введённых обозначений, степенная функция комплексных переменных будет иметь вид:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{b_0 + ib_1}. \qquad (2.1.3)$$

В экспоненциальной форме, используя (2.1.1) и (2.1.2), степенную модель комплексных переменных (2.1.3) можно представить в более компактном виде:

$$\rho e^{i\theta} = (a_0 + ia_1)(re^{i\varphi})^{b_0 + ib_1}. \qquad (2.1.4)$$

Для того, чтобы изучить свойства этой функции, воспользуемся одним из основных общенаучных принципов: «от простого – к сложному». Поэтому рассмотрим вначале простую форму степенной функции комплексных переменных, когда все коэффициенты являются действительными числами. Пусть при этом коэффициент пропорциональности равен единице $a=1$, а показатель степени представлен как натуральное число $b=n$. Модель примет вид:

$$y_r + iy_i = (x_r + ix_i)^n. \qquad (2.1.5)$$

Удобнее свойства этой функции рассматривать в экспоненциальной форме:

$$\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi},$$

откуда в силу свойств равенства комплексных чисел:

$$\rho = r^n,$$
$$\theta = n\varphi$$

Тогда понятно, что конформное отображение, осуществляемое функцией (2.1.5), сводится к растяжению модуля комплексной переменной z в n-ю степень и увеличению полярного угла комплексной переменной z в n раз. Если рассматривать комплексную переменную z как вектор в полярных координатах, то вектор поворачивается на угол

$$(n-1)\arg z = (n-1)\varphi.$$

Так как полярный угол определяется с точностью до периода, то периодичны любые функции от него. Откуда со всей очевидностью следует, что комплексные числа z_1 и z_2 с равными модулями и аргументами, отличающимися друг от друга на число, кратное $2\pi/n$, переходят при отображении (2.1.5) в одну точку.

В теории функций комплексного переменного существует понятие взаимно однозначного или однолистного отображения. Оно определяется так: если функция $w=f(z)$ однозначна на множестве M и при этом двум различным точкам на этом множестве M комплексной плоскости w всегда соответствуют различные точки N на комплексной плоскости z, то такое отображение является однолистным[7]. В противном случае такое отображение является многолистным. Для рассматриваемой степенной функции однолистность выполняется только в отдельных секторах комплексной плоскости z, а именно в тех, в которых выполняется условие, ограничивающее величину полярного угла исходной переменной:

$$k2\pi/n < \varphi < (k+1)2\pi/n, \qquad (2.1.6)$$

где k – натуральное число.

Если показатель степени функции (2.1.5) не будет являться целым числом $b \neq n$, что и следует ожидать для большинства экономических задач, то характер рассуждений не изменится. Модуль отображаемой переменной z увеличивается в b-ю степень, а угол поворачивается против часовой стрелки в b раз. Разве что в условии однолистности (2.1.6) вместо натурального n следует подставлять нецелое b:

---

[7] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функция одного переменного: В 2-х ч. Ч.1. – СПб.: Издательство «Лань», 2004. – 336 с

$$k2\pi/b < \varphi < (k+1)2\pi/b.$$

При значениях комплексного фактора z, когда полярный угол φ выходит за рамки ограничений (2.1.6), функция становится многолистной, то есть существует множество точек на комплексной плоскости объясняющих переменных z, которые с помощью формулы (2.1.5) будут отображаться на комплексную плоскость результатов w в одну и ту же точку. Например, при значении коэффициента $b=3{,}128$ один и тот же результат $w(y_r,y_i)$ можно получить, если привлечь пять единиц x_r и две единицы x_i или же привлечь меньшее количество единиц x_r – две, но увеличить количество единиц x_i до пяти (рис.2.1).

На рис. 2.1 первая точка комплексной плоскости $z(5,2)$ отображается на комплексной плоскости результатов в точку w_1. Другая точка на комплексной плоскости $z(2,5)$ отображается в точку на комплексной плоскости результатов w_2. Координаты точки w_1 и координаты точки w_2 совпадают друг с другом. Поэтому получается, что комплексная переменная z, проходя из первой точки $z(5,2)$ по окружности до точки $z(2,5)$, с помощью степенной функции с показателем степени $b=3{,}128$, отображается на комплексную плоскость результатов w также на окружность, но с другим радиусом, делающую полный цикл, начиная с точки w_1 и заканчиваясь в точке w_2.

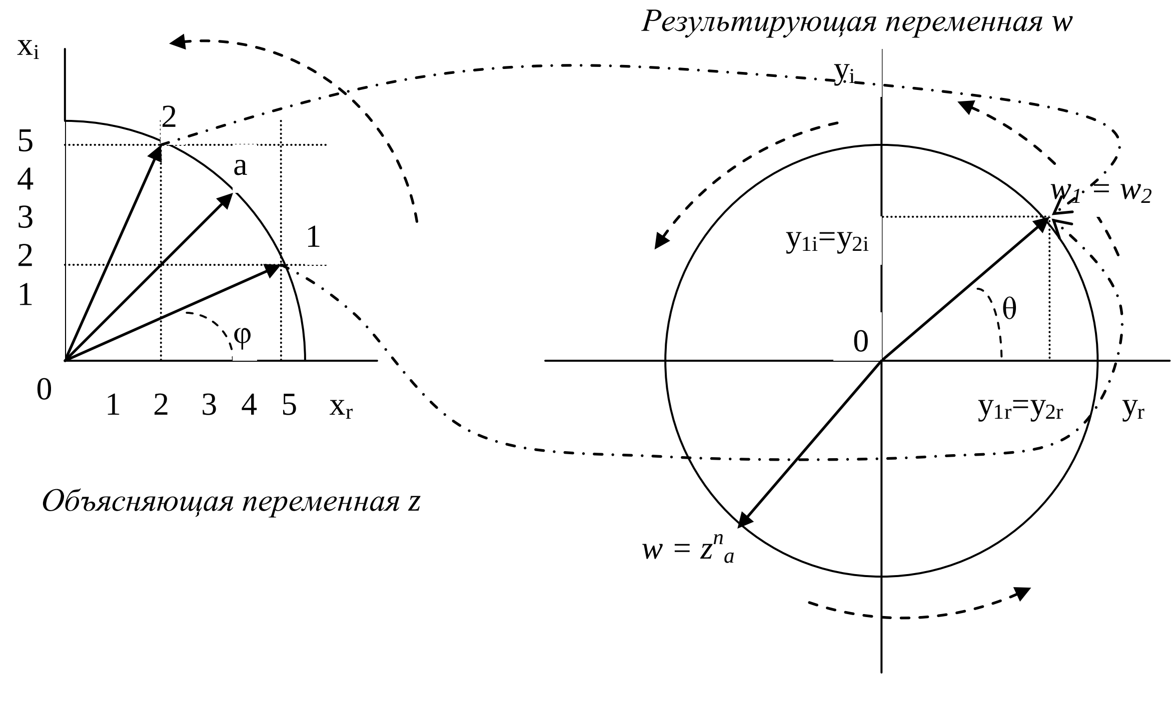

Рис.2.1. Модель (2.1.5) при $b=3{,}128$ даёт один и тот же результат $y_{1i}=y_{2i}$ и $y_{1r}=y_{2r}$ при разных $x_{1r}=5;x_{1i}=2$ и $x_{2r}=2;x_{2i}=5$

Если продолжать и далее движение на комплексной плоскости z по изображённой на рисунке окружности против часовой стрелки, то конформное отображение этого движения на плоскость результатов w будет вновь соответствовать движению по окружности из точки $w_1=w_2$ против часовой стрелки. И вновь на результирующей плоскости точки пройдут полный цикл, в то время, когда на плоскости z точки пройдут только сектор окружности.

Это и означает многолистность конформного отображения – на комплексной плоскости z есть множество точек, которые отображаются на другую комплексную плоскость w в одну и ту же точку. То есть, один и тот же результат можно получить при разном сочетании действительной и мнимой составляющей комплексного фактора.

Посмотрим теперь, какой экономический смысл может иметь конформное отображение этой функции, если применять её к экономической задаче.

Пусть, к примеру, с помощью степенной функции моделируется некоторый производственный процесс с валовой прибылью G и издержками производства C. При этом к моделированию привлекается только два показателя используемых ресурсов – трудовые ресурсы L и капитальные K. Не будем вдаваться в подробное изложение того, к какой части – действительной или мнимой, - относится тот или иной ресурс, тот или иной показатель производственного результата. Об этом подробно будет сказано в четвёртой главе, а мы будем использовать аксиоматическое правило, сформулированное в первой главе – активную часть отнесём к действительной составляющей, а пассивную – к мнимой. Тогда, с учётом введённых обозначений комплексно-значная степенная модель производственной функции имеет вид:

$$G+iC=a(K+iL)^b.$$

Пусть показатель степени равен, например *1,3*, а коэффициент пропорциональности равен единице. Посмотрим, к чему приведёт увеличение ресурсов, если зависимость между ними и результатом описывается вышеприведённой формулой производственной функции (рис.2.2). Пусть по сравнению с предыдущим моментом времени (точка 1 на рисунке) на предприятии величина привлекаемого капитала увеличивается незначительно, а величина трудовых ресурсов – значительно. Тогда модуль производственного результата увеличится при увеличении ресурсов, поскольку показатель степени больше единицы, а полярный угол также увеличится, причём в силу того, что показатель степени больше единицы, то на комплексной плоскости результатов новый полярный угол в точке 2 изменится относительно точки 1 сильнее, чем полярный угол в точке 2 по сравнению с точкой 1 на плоскости ресурсов. Это, как следует из правой части рис. 2.2, означает существенное увеличение себестоимости и снижении валовой прибыли.

Следует отметить, что в большей части производственных процессов так и происходит – увеличение числа привлекаемых к производству трудовых ресурсов при постоянстве капитальных ресурсов ведёт в целом к увеличению объёмов производства, но резко растёт себестоимость, что приводит к снижению валовой прибыли и снижению рентабельности.

Рис.2.2. Конформное отображение $w=z^b$ при 1 < b < 1,5 когда вектор ресурсов перемещается из точки 1 в точку 2

Рассмотрим теперь особенности поведения степенной функции (2.1.5) с показателем степени *b*, лежащим в пределах:

$$0<b<1. \qquad (2.1.7)$$

Опять, рассмотрим вначале простейший случай, когда $b=1/n$, где n – любое целое положительное число. Эта функция хорошо исследована в теории функций комплексных переменных, но применительно к поставленной экономической задаче она несколько модифицируется. Функция (2.1.5) при условии (2.1.7) изучается в этой теории на примере замкнутых кривых, лежащих на комплексной плоскости, содержащих (рис.2.3) или не содержащих (рис.2.4) внутри себя точку $z=0$.

В первом случае отображение комплексной переменной с помощью функции (2.1.5) даёт n непрерывных и однозначных функций, называемых ветвями многозначной функции (2.1.5) при условии (2.1.7), каждая из которых принимает одно из значений $\sqrt[n]{z}$, поскольку при обходе замкнутой кривой, содержащей внутри себя точку $z=0$, аргумент комплексной переменной факторов получает приращение 2π и точка $w=\sqrt[n]{z}$ при таком аргументе на плоскости комплексного результата не возвращается к своему начальному положению до тех пор, пока вектор на комплексной плоскости фактора не осуществит n-кратный обход замкнутой кривой.

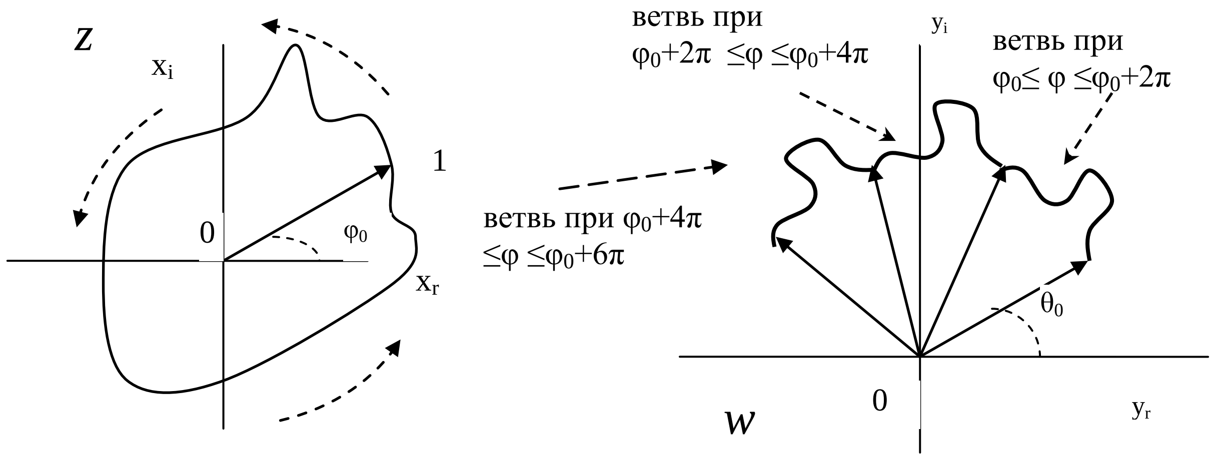

Рис.2.3. Случай конформного отображения замкнутой кривой на комплексной плоскости (x_r,x_i), содержащей внутри себя нулевую точку, с помощью функции $w=z^b$ на комплексную плоскость (y_r,y_i) при 0 < b < 1

Иначе говоря, вектор на плоскости фактора z, сделав полный оборот, отобразится на комплексной плоскости результата w только в виде одной незамкнутой кривой. Если вектор фактора z сделает ещё один оборот, то на комплексной плоскости результата w это будет отражаться точками, лежащими на следующей кривой, по форме подобной первой, но следующей за ней на комплексной плоскости против часовой стрелки. И так ветви на комплексной плоскости результата w будут прирастать до тех пор, пока, наконец, не замкнутся. Но это произойдёт только в том случае, когда вектор фактора z сделает оборот на своей плоскости ровно n раз.

Во втором случае, когда замкнутая кривая не содержит внутри себя нулевую точку (рис.2.4), аргумент комплексной переменной ресурсов не получает приращение 2π, поскольку не делает полный круг относительно начала координат, поэтому каждой точке на плоскости факторов функция (2.1.5) при (2.1.7) ставит в соответствие одну и только одну точку на плоскости комплексных результатов.

Из этого следует, что во втором случае замкнутой кривой на плоскости z будет соответствовать замкнутая кривая на результирующей комплексной плоскости w.

Какой из этих двух возможных вариантов следует отнести к случаям экономической практики, когда могут использоваться степенные комплекснозначные функции? Конечно же, существенная, если не самая большая часть экономических показателей в экономике рассматривается исключительно в первом квадранте декартовой системы координат, поскольку они по своей сути являются неотрицательными (себестоимость, объём произведённой продукции, количество потреблённой электроэнергии, производительность труда, количество занятых в производстве и т.п.).

Валовая прибыль как показатель эффективности производства может быть и отрицательной, если предприятие работает в убыток, но такие случаи отрицательности экономических переменных встречаются очень редко.

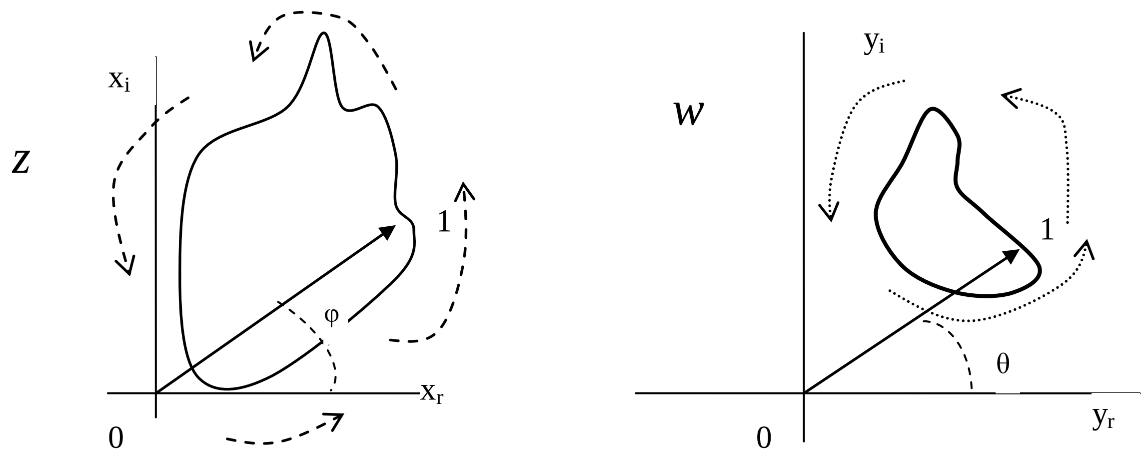

Рис.2.4. Случай конформного отображения замкнутой кривой на комплексной плоскости (x_r,x_i), не содержащей внутри себя нулевую точку, с помощью функции w=z^b на комплексную плоскость (y_r,y_i) при 0 < b < 1

Таким образом, наибольший интерес для экономиста представляет характер конформного отображения с помощью изучаемой модели незамкнутой кривой, лежащей в первом квадранте комплексной плоскости факторов, то есть, когда исходные переменные модели положительны.

Рассмотрим более подробно характер этого отображения. Вновь представим комплексные переменные в экспоненциальной форме, учтя, что $b=1/n$, где n – любое целое положительное число:

$$w = \rho e^{i\theta}, \ \ \mathrm{z}=\mathrm{r}e^{i\varphi}.$$

Откуда

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \ \ \theta=\frac{\varphi}{\mathrm{n}}.$$

Теперь легко понять, как ведёт себя результирующий вектор w при том или ином значении исходного фактора z, если показатель степени лежит в пределах от нуля до единицы (рис. 2.5). Модуль комплексной переменной результатов с ростом аргумента комплексной переменной факторов φ и неизменном радиусе r не меняется по величине, и представляет собой корень n-й степени из модуля комплексного фактора.

Аргумент комплексной переменной результатов θ будет возрастать с ростом аргумента φ, но в n раз меньше, чем аргумент комплексной переменной факторов. А с учётом того, что аргумент комплексной переменной факторов для рассматриваемых экономических показателей лежит в пределах от

0 до *π/2*, то и аргумент комплексной переменной комплексных результатов при $b=1/n$ будет лежать именно в этом квадранте.

При этом необходимо иметь в виду, что рост мнимой составляющей комплексных факторов, а именно – рост x_i будет способствовать росту мнимой составляющей комплексных результатов y_i, но в значительно меньшей степени (рис.2.5), поскольку переход из точки 1 в точку 2 комплексного фактора, соответствует меньшему в n раз приращению аргумента комплексного результата (переход из точки 1 в точку 2 на правом графике рисунка 2.5).

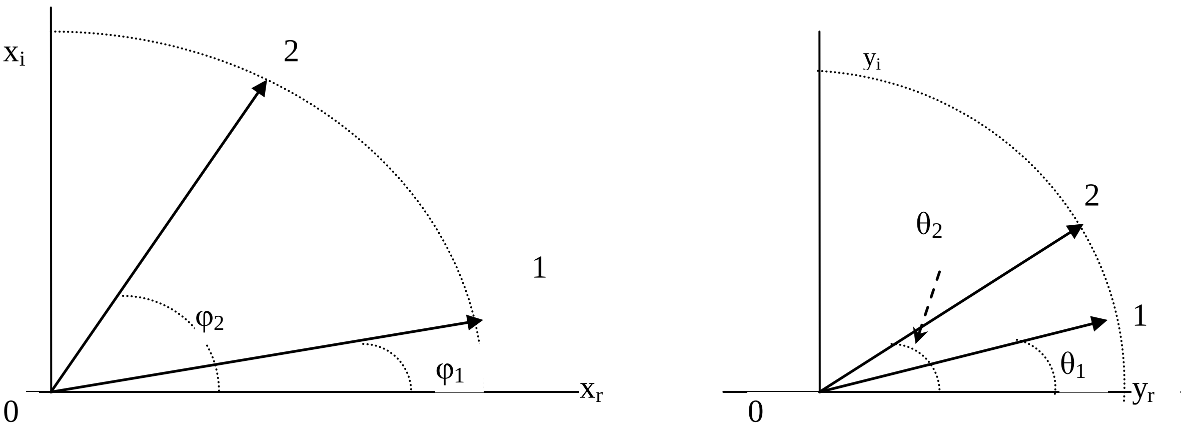

Рис.2.5. Конформное отображение $w=z^b$ при 0 < b < 1 когда вектор ресурсов перемещается из точки 1 в точку 2

Без нарушения общности можно распространить эти рассуждения и на другие случаи условия (2.1.7), то есть, когда показатель степени $b=1/n$ принимает на обозначенном промежутке любые значения, в том числе, когда n не является целым.

Если показатель степени будет отрицательным, то любое увеличение влияющих факторов z неминуемо приводит к уменьшению результатов w - увеличение модуля влияющих факторов r ведёт к уменьшению модуля ρ, а увеличение полярного угла φ – к повороту в противоположную сторону конформного отображения, ведь для этого случая

$$\rho = r^{-b}, \quad \theta = -b\varphi.$$

Могут ли в экономике встречаться случаи, когда комплекснозначная степенная функция будет иметь отрицательный показатель степени? Такие варианты в экономической практике вполне возможны, когда, например в производстве наступает ситуация, при которой дополнительное привлечение трудовых и капитальных ресурсов только ухудшает производственные результаты (модуль комплексной переменной производственных результатов уменьшается) или, иначе говоря, сокращение занятых на производстве и закрытие некоторых производств (например, непрофильных), положительно сказывается на производственных результатах – растёт объём валового выпуска и увеличивается валовая прибыль. Такие случаи не редки в экономической ситуации, особенно в условиях кризиса.

Это означает, что комплекснозначная степенная функция с отрицательным показателем степени имеет право на существование в комплекснозначной экономике.

Поняв свойства простых случаев конформного отображения степенной функции, рассмотрим теперь конформное отображение более сложной степенной функции комплексных переменных, у которой коэффициент пропорциональности будет являться не действительным, а комплексным числом:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^b . \qquad (2.1.8)$$

Представляя каждую комплексную составляющую данной модели, как и ранее, в экспоненциальной форме, получим, с учётом введённых выше обозначений:

$$\rho e^{i\theta} = ae^{i\alpha}(re^{i\varphi})^b . \qquad (2.1.9)$$

Здесь комплексный коэффициент пропорциональности представлен в экспоненциальной форме его модулем a и полярным углом α. С учётом этого имеем:

$$\rho = ar^b, \quad \theta = \alpha + b\varphi. \qquad (2.1.10)$$

Как изменились свойства конформного отображения степенной функции, если её коэффициент пропорциональности стал комплексным? В дополнение к только что рассмотренным свойствам степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами модуль ρ результата изменяется не только в степень b, но и в a раз. Аргумент комплексного результата получает дополнительное приращение на полярный угол α комплексного коэффициента. Из этого следует, что модель (2.1.8) является вполне приемлемой для практического применения, и она более адекватна и гибка в моделировании производственных результатов, чем модель (2.1.3), поскольку комплексный коэффициент пропорциональности «корректирует» и модуль модели, и её аргумент, выполняя роль своеобразного «масштабирующего» коэффициента. Легко заметить, что когда мнимая часть комплексного коэффициента равна нулю, модель (2.1.8) превращается в модель (2.1.3), то есть (2.1.3) является частным случаем (2.1.8).

Модель степенной функции комплексных переменных с действительным показателем степени может быть представлена в арифметической форме:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^b = ar^b \cos(\alpha + b\varphi) + iar^b \sin(\alpha + b\varphi).$$

Эта форма записи соответствует в области действительных переменных системе двух равенств – действительной и мнимой частей:

$$\begin{cases} y_r = ar^b \cos(\alpha + b\varphi), \\ y_i = ar^b \sin(\alpha + b\varphi). \end{cases}$$

Эти модели в области действительных переменных, как легко заметить, менее компактны и менее удобны в использовании, чем модель комплексных переменных (2.1.8).

Из полученной системы со всей очевидностью вытекает свойство периодичности степенной комплекснозначной функции.

Уникальность применения функций комплексных переменных к экономическим задачам вытекает из свойств степенной производственной функции комплексных переменных с мнимым показателем степени:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{ib}. \tag{2.1.11}$$

Для понимания сути моделируемого с помощью такой функции процесса, её следует представить в экспоненциальной форме:

$$\rho e^{i\theta} = ae^{i\alpha}(re^{i\varphi})^{ib} = ae^{i\alpha}e^{-b\varphi}r^{ib}. \tag{2.1.12}$$

Здесь показатель степени b – любое действительное число.

Откуда для модулей левой и правой части равенства:

$$\rho = ae^{-b\varphi},$$

а для аргументов:

$$\theta = \alpha + b\ln r.$$

Сразу же можно отметить, что в этой модели модуль результатов ρ не зависит от величин факторов x_r и x_i. То есть – любое пропорциональное увеличение факторов x_r и x_i не влияет на масштаб моделируемого результата. Рост модуля результирующего показателя определяется исключительно от соотношения между факторами x_r и x_i (аргумента φ).

В свою очередь и аргумент комплексной переменной результата не реагирует на изменения аргумента комплексных факторов, а меняется исключительно в зависимости от изменений модуля комплексной переменной факторов, то есть – от количества привлекаемых факторов, но не пропорции между ними.

Для изучения особенности конформного отображения этой степенной функции рассмотрим вариант, когда модуль комплексной переменной факторов r является постоянной величиной, а меняется только полярный угол этой переменной φ (рис.2.6). Рассмотрим вначале степенную функцию в случае, когда коэффициент b представляет собой положительно число $b>1$.

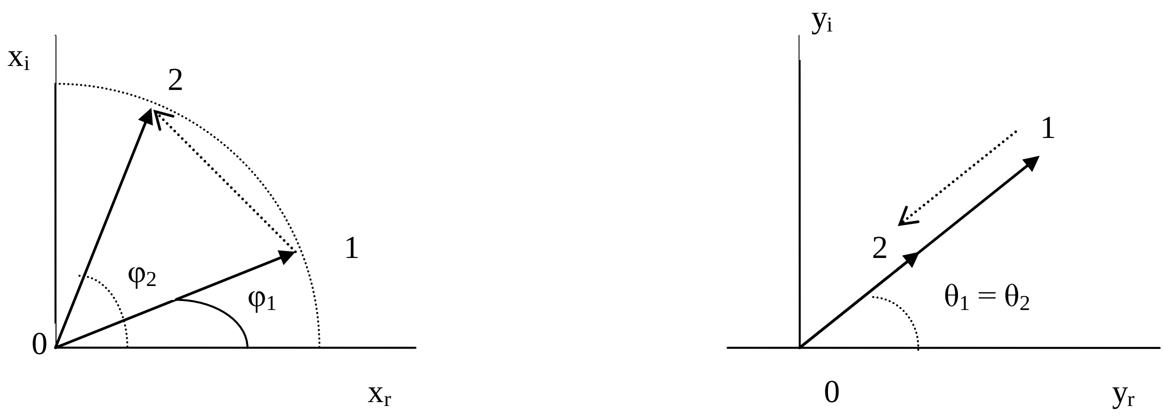

Рис.2.6. Конформное отображение функции (2.1.11) при $b > 1$, когда вектор факторов z остаётся неизменным по модулю и перемещается из точки 1 в точку 2

Тогда с учётом того, что константа e при положительном b возводится в отрицательную степень (формула 2.1.12), и с ростом x_i и уменьшающемся x_r так, что модуль комплексной переменной факторов не меняется, а возрастает только полярный угол, модуль комплексного результата ρ уменьшается:

$$\rho = ae^{-b\varphi} .$$

Полярный угол θ при этом не меняется, ведь:

$$e^{i\theta} = e^{i\alpha} r^{ib} ,$$

а для рассматриваемого случая $r=const$.

Это означает, что изменение на плоскости факторов отражается на комплексной плоскости результатов точками, лежащими на прямой, проходящей через нулевую точку (рис.2.6).

Понятно, что обратное движение вектора факторных переменных z из точки 2 в точку 1 означает линейное увеличение комплексного результата.

В случае, когда показатель степени лежит в пределах $0 \le b \le 1$ поведение модели достаточно простое. Рассмотрим вначале крайние точки данного интервала. При $b =1$ модель будет вести себя так, как это описано выше. При $b = 0$ модель вообще не реагирует на изменения ресурсов. В промежутке между этими крайними значениями при постоянном модуле факторов r и увеличивающемся φ, полярный угол θ производственных результатов не меняется, а их модуль ρ уменьшается, но в меньшей степени, чем для случая, когда $b>1$. То есть, этот случай аналогичен поведению модели при $b>1$, поэтому можно утверждать, что модель будет вести себя одинаковым образом на промежутке значений показателя степени, равном $b>0$.

Рассмотрим случай $b<0$ (рис. 2.7). Применительно к нему модуль комплексной переменной результатов с ростом полярного угла переменной факторов возрастает, а не уменьшается, как это было в случае, изображенном на рис.2.6, поскольку при отрицательном показателе степени b константа e возводится в положительную степень $(-\varphi b)$. Это означает, что результаты растут. То есть, конформное отображение функции при отрицательном показателе степени (2.1.11) противоположно тому, как она себя ведёт на рис. 2.6.

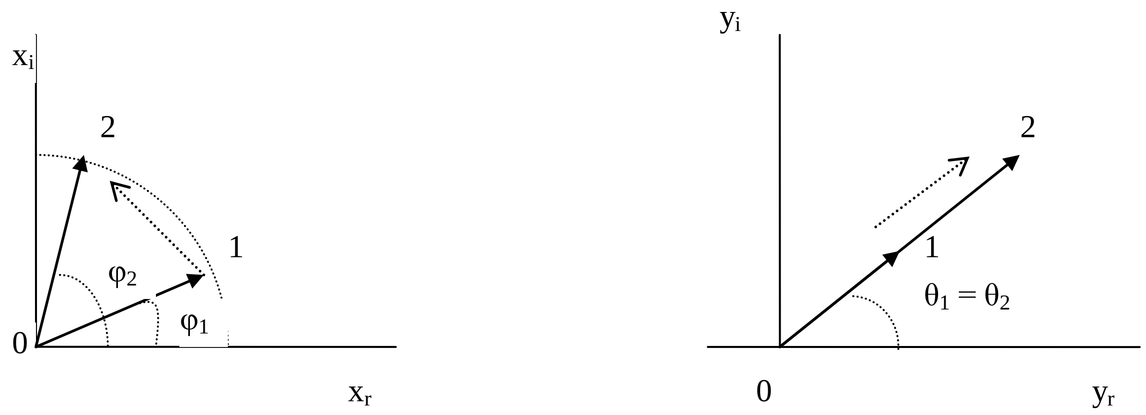

Рис.2.7. Конформное отображение функции (2.1.11) при $b<0$, когда вектор факторов остаётся неизменным и перемещается из точки 1 в точку 2

Теперь рассмотрим для степенной функции (2.1.11) с мнимым показателем степени вариант, при котором полярный угол переменной факторов z остаётся постоянным, а её модуль r увеличивается (рис.2.8). Постоянство полярного угла говорит о том, что пропорции между привлечёнными факторами, например, трудом и капиталом, остаются неизменными. Для переменных факторов труд и капитал это означает, что капиталовооружённость труда есть величина постоянная. Фактически это означает неизменность технологии производства. Рост модуля этой переменной говорит о том, что в производство привлекаются дополнительные трудовые и капитальные ресурсы в одинаковой пропорции, но технологии производства не меняются.

Вновь начнём анализ варианта поведения этой функции при условии, когда показатель степени положителен: $b>0$. Постоянство полярного угла комплексной переменной между факторами x_i и x_r приводит к тому, что вне зависимости от того, в каком количестве эти факторы привлекаются при постоянстве пропорции между ними, модуль комплексной переменной результатов остаётся неизменным, так как выполняется условие $\rho = ae^{-b\varphi}$. Аргумент комлексного результата θ будет с ростом модуля r постепенно увеличиваться, поворачиваясь через все квадранты комплексной плоскости результата против часовой стрелки, возвращая вектор результатов ρ в начальную точку 1 комплексной плоскости (на рис. 2.8 движение вектора ρ показано стрелками). То есть при линейном увеличении факторов результат ведёт себя циклически. Такой вид конформного отображения может использоваться в экономике с небольшими модификациями для моделирования различного рода циклических процессов.

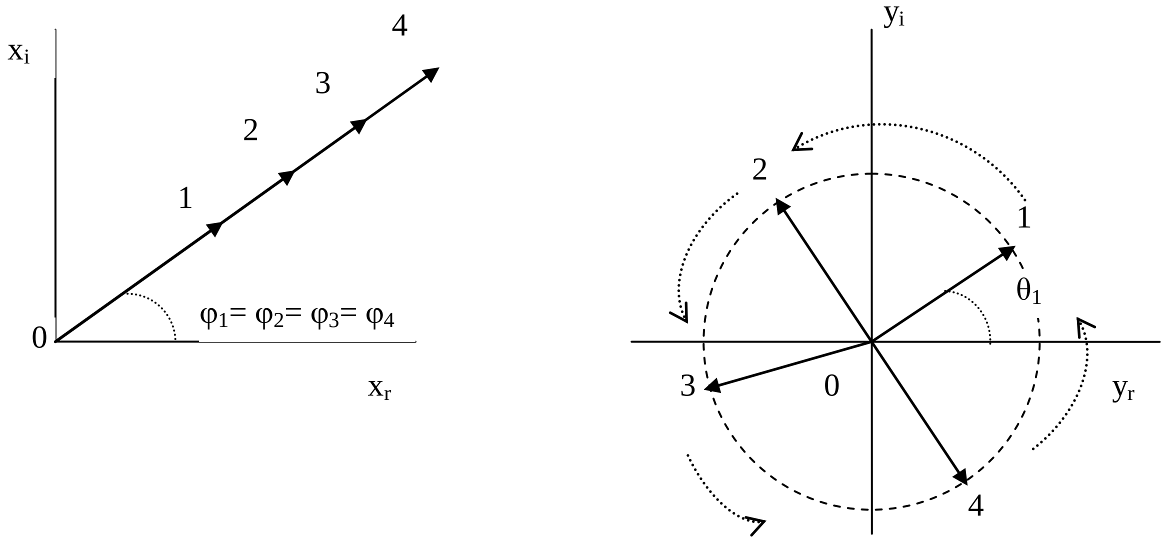

Рис.2.8. Конформное отображение функции (2.1.11) при $b > 0$ и $\varphi = const$, т.е. когда вектор факторов x_i и x_r перемещается вверх по прямой, выходящей из начала координат

Величина цикла зависит исключительно от приращения модуля комплексной переменной факторов Δr:

$$b \ln(r + \Delta r) = \theta + 2\pi k ,$$

где k – целое число.

Откуда легко найти это приращение, соответствующее k циклам:

$$\ln \Delta r = \frac{\theta + 2\pi k}{b \ln r} .$$

Первый цикл комплексная переменная результатов пройдёт на комплексной плоскости, если модуль комплексного фактора изменится на:

$$\Delta r = e^{\frac{\theta + 2\pi}{b \ln r}} .$$

Рассмотрим теперь, как ведёт себя степенная комплекснозначная функция с мнимым показателем степени при постоянном полярном угле переменной факторов и возрастающем модуле этих переменных, когда показатель степени не положителен: $b \le 0$.

При нулевом значении показателя степени функция перестаёт реагировать на любые изменения факторов – любое число, в том числе и комплексное, в нулевой степени равно единице. В отрицательной же области коэффициента b происходит вот что. Увеличение или уменьшение факторов так, что выполняется $\varphi = const$, никак не отразится на величине модуля переменной результатов. Но, как мы уже выяснили, при этом будет меняться полярный угол комплексной переменной результатов, поскольку выполняется равенство $\theta = \alpha + b \ln r$. Так как показатель степени отрицателен ($b<0$), то с ростом модуля r полярный угол комплексной переменной результатов уменьшается. Графически это означает поворот модуля результатов по часовой стрелке, а не против неё, как это было при положительном показателе степени (перемещение вектора из точки 1 в точку 2 правой части рис. 2.9).

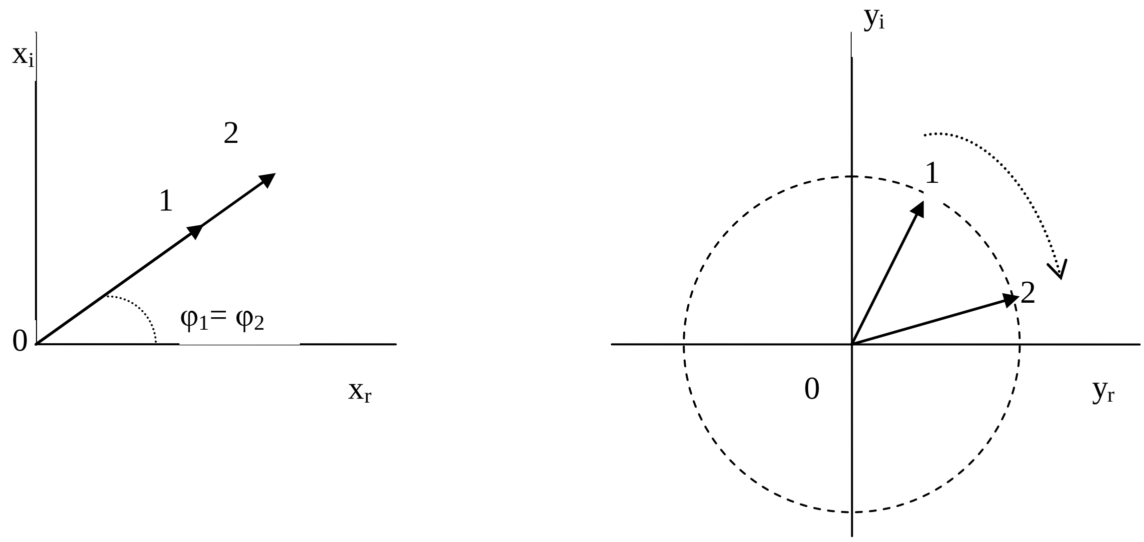

Рис.2.9. Конформное отображение функции (2.1.11) при $b < 0$ и $\varphi = const$

Таким образом функция вновь позволяет моделировать цикличный характер экономики, но в отличие от случая с положительным показателем степени здесь уменьшается мнимая составляющая комплексного результата, а действительная составляющая растёт. Следует обратить внимание на то, что данная модель отражает такую возможную производственную ситуацию при $b>0$: смена технологии за счёт инвестиций в основной капитал (изменение пропорции между ресурсами) приводит к росту объёмов производства.

Рассмотрим теперь общую модель степенной комплекснозначной функции с комплексными коэффициентами:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{b_0 + ib_1}, \qquad (2.1.15)$$

которая сочетает в себе все вышерассмотренные варианты конформного отображения.

Её интерпретация возможна, если вновь привести модель (2.1.15) к экспоненциальной форме записи. В результате получим для радиусов двух комплексных переменных модели (2.1.15):

$$\rho = ae^{b_0 \ln r - b_1\varphi}, \tag{2.1.16}$$

а для их полярных углов:

$$\theta = \alpha + b_0\varphi + b_1 \ln r. \tag{2.1.17}$$

Из полученных равенств видно, что при различных сочетаниях значений комплексных коэффициентов (a_0+ia_1) и (b_0+ib_1) функция (2.1.15) будет описывать самые разнообразные формы зависимости, в том числе и циклические. С этих позиций комплекснозначная модель (2.1.15) является универсальной и может использоваться в многочисленных экономических приложениях.

2.2. Степенная функция комплексного аргумента

Производственная функция, к которой впервые были применены комплексные переменные, представляла собой линейную производственную функцию комплексного аргумента[8].

$$Q = (a_0 + ia_1)(K + iL).$$

Эта элементарная модель, благодаря нетривиальному (для действительных чисел) результату умножения комплексного коэффициента на комплексный аргумент, обладает свойствами, вполне приемлемыми для решения отдельных задач моделирования экономических процессов. Свойства и особенности применение этой модели будут рассмотрены в четвёртой главе монографии, важно здесь то, что рассматривается не зависимость одной комплексной переменной от другой комплексной переменной, а зависимость действительной переменной от комплексной. Поскольку комплексная пере-

[8] Светуньков С.Г., Светуньков И.С. О возможности использования комплексных чисел в теории производственных функций // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2005, № 4. – С. 5 – 16.

менная выступает аргументом функции, будем называть подобные функции «функциями комплексного аргумента».

Сразу же следует отметить, что из правила равенства друг другу действительных и мнимых частей двух равных друг другу комплексных чисел следует, что мнимая часть, моделируемая функцией комплексного аргумента равна нулю, то есть:

$$\operatorname{Im}(z) = 0 .$$

Это – свойство, присущее функциям комплексного аргумента по определению.

Рассмотрим поведение более сложной, нежели линейной, степенной функции комплексного аргумента, которая в общем виде будет записана так:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{(b_0 + ib_1)} . \tag{2.2.1}$$

Принципиальным отличием этой функции от рассмотренных выше заключается в том, что перед нами, вообще говоря, не функция комплексных переменных, а модель действительных переменных, ведь в левой части равенства у нас есть только действительная переменная y_r, значит, и в правой части мы имеем только действительную переменную. Но, как видно, эта функция действительных переменных представлена через функцию комплексного аргумента, поэтому от неё можно ожидать интересных свойств, отличных от моделей действительных переменных.

Вновь рассмотрим функцию (2.2.1) последовательно в зависимости от того, каким будет показатель степени - действительным или мнимым, исходя из общенаучного принципа исследований: от простого – к сложному.

Первой из возможных моделей, которая определяется равенством (2.2.1) является модель с вещественным показателем степени:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{b_0} , \tag{2.2.2}$$

Вновь представим комплексный коэффициент пропорциональности и комплексную переменную ресурсов в экспоненциальной форме. Воспользовавшись при этом ранее введёнными обозначениями, получим:

$$y_r = ae^{i\alpha}(re^{i\varphi})^{b_0} = ar^{b_0}e^{i(\alpha + b_0\varphi)} . \tag{2.2.3}$$

Откуда следует система уравнений для модуля и полярного угла:

$$y_r = ar^{b_0} , \tag{2.2.4}$$

$$\alpha + b_0\varphi = 2\pi k, \tag{2.2.5}$$

где k – целое число.

Последнее равенство представляет собой некое балансовое уравнение, связывающее друг с другом все коэффициенты модели и факторы комплексного аргумента, поскольку

$$\varphi = arctg\frac{x_i}{x_r}.$$

Так как мнимые части степенной функции комплексного аргумента по определению равны нулю (полярный угол равен $2\pi k$), основной интерес представляет функция (2.2.4), поскольку именно она моделирует связь между комплексным аргументом и действительным результатом. Суть балансового уравнения (2.2.5) и его влияние на свойство модели в целом изучим в последнюю очередь.

С учётом того, что равенство (2.2.4) определяет поведение y_r в зависимости от двух факторов x_r и x_i, при $y_i=0$, конформное отображение может быть представлено на одном трёхмерном графике. Для этого на горизонтальной плоскости расположим переменные комплексного аргумента x_r и x_i, а перпендикулярно к этой комплексной плоскости проведём ось y_r (рис.2.10). Для более наглядного представления модели в уравнение (2.2.4) подставим значение модуля комплексного аргумента в расширенном виде:

$$y_r = a(x_r^2 + x_i^2)^{b_0/2}. \qquad (2.2.6)$$

Пусть модуль комплексного аргумента является величиной постоянной. Тогда подкоренное выражение равенства (2.2.6) также является величиной постоянной. Графически это означает следующее. При разных сочетаниях x_r и x_i, дающих в результате постоянство радиуса на комплексной плоскости факторов, модель будет генерировать в пространстве одно и то же значение результата y_r.

Условие

$$(x_r^2 + x_i^2) = const,$$

как известно, определяет уравнение окружности на плоскости.

Получается, что при разных модулях комплексного аргумента модель генерирует различные окружности. Поскольку эти окружности соответствуют некоторому одному значению y_r, то в трёхмерном пространстве это означает некоторую фигуру, симметричную относительно оси y_r. Характер этой фигуры определяется показателем степени b_0.

Будем рассматривать всю область возможных значений переменных комплексного аргумента x_r и x_i. Это вызвано тем, что любой положительный ряд можно привести к наличию в нём отрицательных величин элементарным центрированием относительно средней арифметической. Поэтому будем рассматривать общую задачу со значениями комплексного аргумента, определённого на всей комплексной плоскости.

При положительном значении коэффициента b_0 и постоянном модуле r результат y_r остаётся неизменным.

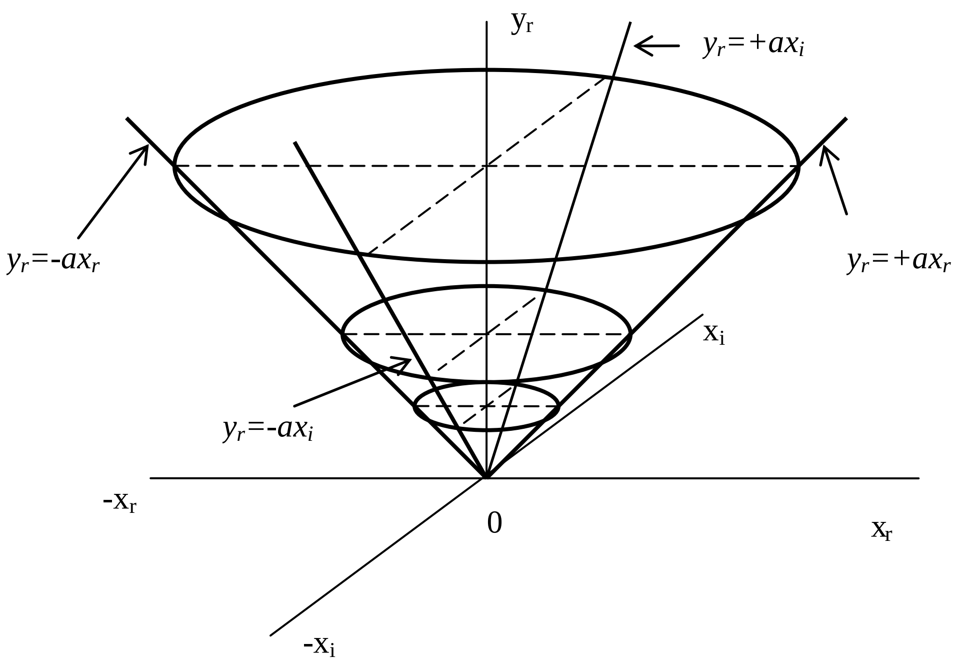

Рис. 2.10. График модели (2.2.2) комплексного аргумента при $b_0=1$

Если модуль аргумента возрастает, то в соответствии с (2.2.6) растёт и значение результата. Поэтому функция (2.2.2) описывает нелинейную поверхность в трёхмерном пространстве следующим образом. Если показатель степени b_0 равен единице, то увеличение модуля комплексного аргумента на единицу ведёт к увеличению результата на a. То есть – линейному приращению модуля комплексного аргумента соответствует линейное приращение результата. Если, например, одна из составляющих комплексного аргумента равна нулю, например, $x_i=0$, то функция описывает линейную зависимость: $y_r = a\sqrt{x_r^2}$ или $y_r = \pm a x_r$. Если равна нулю другая составляющая $x_r=0$, то функция также описывает линейную зависимость с двумя ветвями: $y_r = a\sqrt{x_i^2}$ или $y_r = \pm a x_i$. График этой функции изображён на рис. 2.10. Модель, как видно, будет характеризоваться линиями окружности на поверхности с радиусом, исходящим из оси объёмов.

График этой функции является конусом.

Если же показатель степени b_0 будет не равен единице, то уравнение (2.2.2) описывает более сложные поверхности в пространстве. Случай, когда $0<b_0<1$ характеризуется тем, что здесь линейное увеличение модуля комплексного аргумента приводит к увеличению роста объёмов производства, но в меньшей степени, то есть - со всё уменьшающейся отдачей, которая проявляется в замедляющемся росте y_r. Для того чтобы понять – как будет расположена поверхность, описываемая (2.2.2) в этом случае, вновь предположим, что одна из составляющих комплексного аргумента равна нулю, например, $x_i=0$. Тогда функция описывает нелинейную зависимость между двумя переменными y_r и x_r: $y_r = \pm a x_r^{b_0}$.

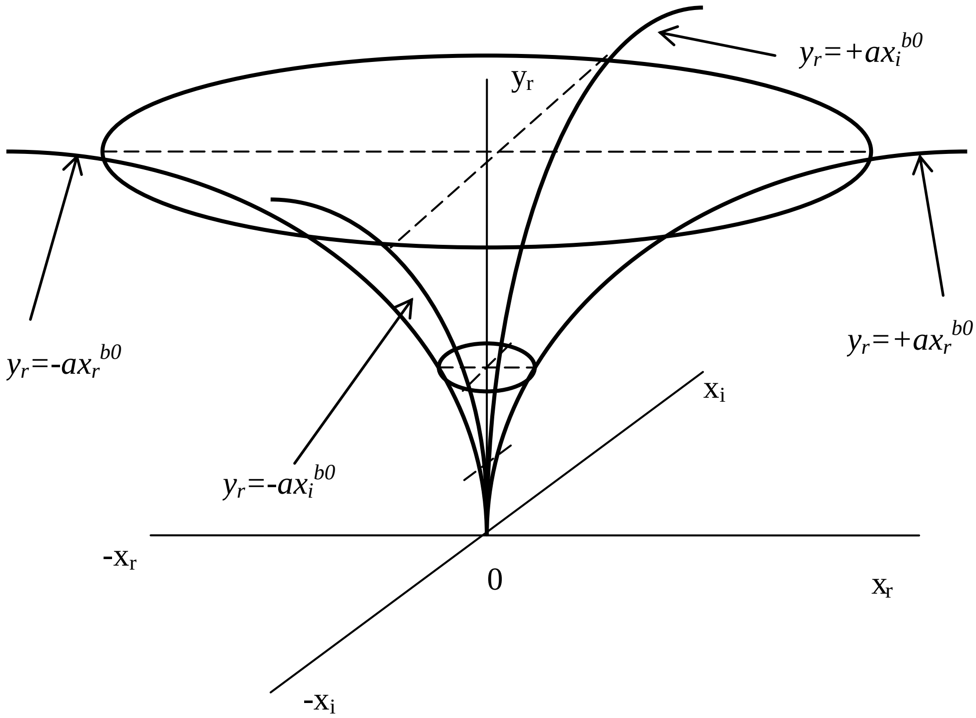

Рис. 2.11. График модели (2.2.2) функции комплексного аргумента при $0<b_0<1$

Аналогичная функция может быть построена и на плоскости переменных y_r и x_i в предположении о том, что $x_r=0$. Эта функция будет иметь вид: $y_r = \pm a x_i^{b_0}$. Эта нелинейная поверхность, соответствующая рассматриваемому случаю модели, изображена на рис. 2.11.

Для другого случая, когда показатель степени $b_0>1$, модель изменит свой характер – линейное приращение аргумента будет приводить к нелинейному росту результата, причём этот рост будет превышать рост модуля аргумента. Опуская подробности построения этого отображения, поскольку они аналогичны предыдущим, просто приведём его на рис. 2.12.

Функция комплексного аргумента, имеет смысл и при отрицательном показателе степени, то есть, когда $b_0<0$. В этом случае модель (2.2.6) примет вид:

$$y_r = a\left(\frac{1}{\sqrt{x_r^2 + x_i^2}}\right)^{|b_0|}. \tag{2.2.7}$$

Особенности поведения этой модели определяются абсолютной величиной показателя степени b_0.

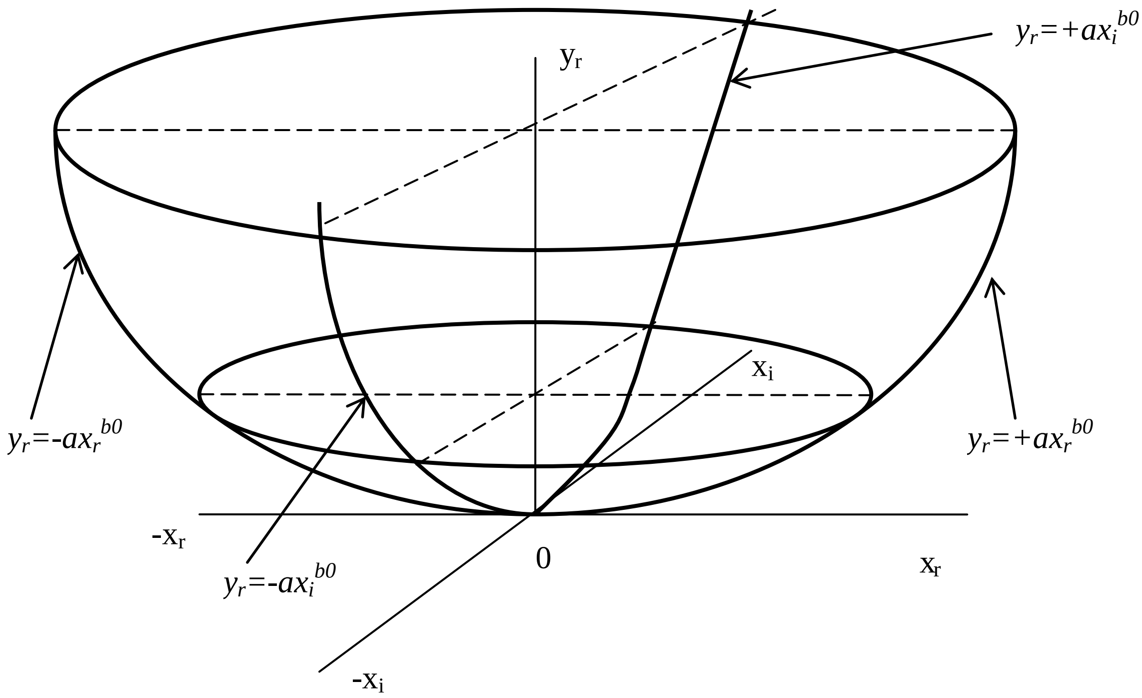

Рис. 2.12. График функции (2.2.2) модели комплексного аргумента при $b_0>1$

Его увеличение ведёт к усилению нелинейного характера зависимости. Характер степенной функции комплексного аргумента при отрицательном показателе степени таков. При радиусе комплексного аргумента, равном нулю, результат y_r равен плюс бесконечности. С увеличением количества привлекаемых ресурсов x_r и x_i, результат начинает уменьшать свои значения, стремясь к нулю при стремлении модуля комплексного аргумента к бесконечности (рис. 2.13).

Поведение степенной функции комплексного аргумента при действительном показателе степени в целом ясно. Теперь, для того, чтобы понять свойства степенной функции комплексного аргумента с комплексным показателем степени, необходимо рассмотреть влияние на результат мнимой степени. Рассмотрим поэтому теперь модель комплексного аргумента при мнимом показателе степени:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{ib_1}, \qquad (2.2.8)$$

В экспоненциальной форме эта модель будет иметь такой вид:

$$y_r = ae^{i\alpha} r^{ib_1} e^{-b_1\varphi}. \qquad (2.2.9)$$

С учётом того, что мнимая составляющая левой части равенства равна нулю, имеем балансовое уравнение для модели:

$$\alpha + b_1 \ln r = 2\pi k. \qquad (2.2.10)$$

Влияние этой балансовой части на модель в целом рассмотрим в конце параграфа, а сейчас изучим поведение действительной части комплексно-значной модели.

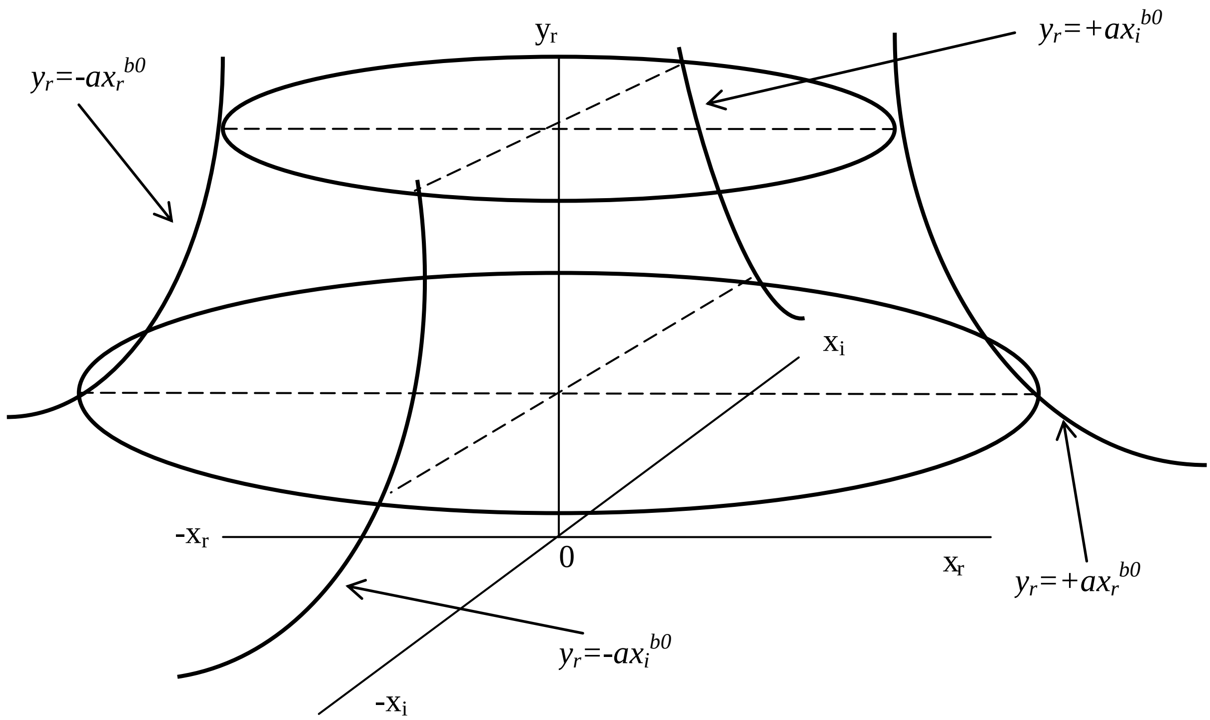

Рис. 2.13. График функции (2.2.2) модели комплексного аргумента при $b_0<1$

Действительная часть равенства (2.2.9) будет представлять собой следующее уравнение:

$$Q = ae^{-b_1\varphi}. \qquad (2.2.11)$$

То есть, объём выпуска не зависит от объёма привлекаемых ресурсов x_r и x_i, а полностью определяется пропорцией между ними x_r/x_i, (полярным углом φ комплексного аргумента).

При $b_1=0$ объём производства будет численно равен модулю коэффициента пропорциональности a. Также следует заметить, что при любом показателе степени в случае, когда полярный угол ресурсов стремится к нулю ($\varphi \rightarrow 0$), объём производства также будет стремиться к модулю коэффициента пропорциональности a.

Рассмотрим теперь случай, когда $b_1>0$, а полярный угол возрастает от нуля. Это означает, что увеличивается доля привлекаемых ресурсов x_i, а доля ресурсов x_r уменьшается.

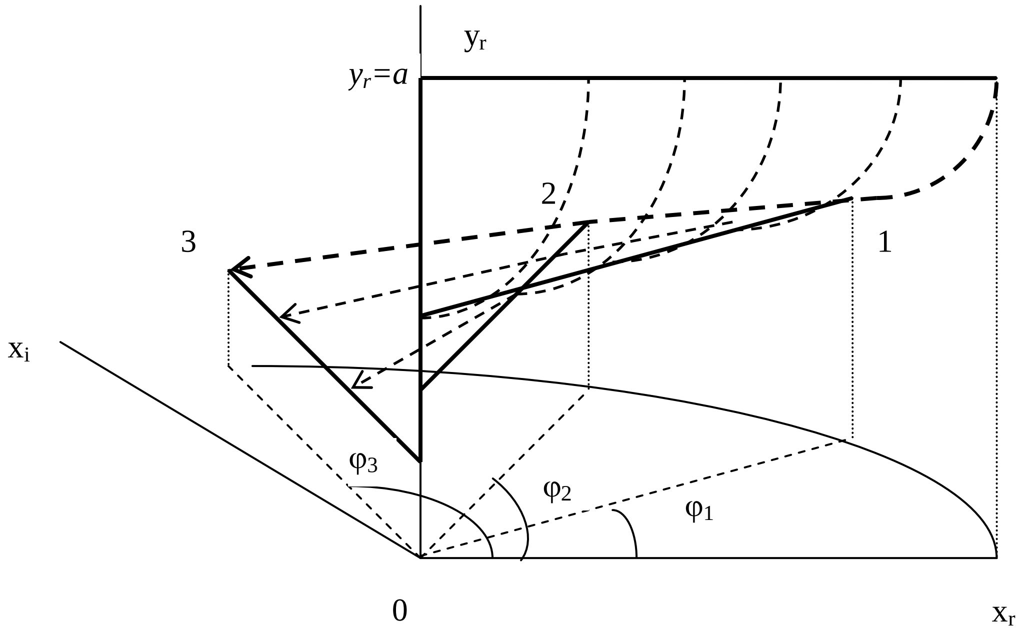

Рис. 2.14. Поведение действительной части модели (2.2.8),$b_1>0$

Как легко убедиться из (2.2.11), объём производства при этом уменьшается (рис.2.14) и всегда меньше модуля коэффициента пропорциональности *a*. С учётом того, что перед нами экспоненциальная зависимость, это уменьшение будет носить нелинейный характер с уменьшающимся значением первой производной с ростом полярного угла. График рис. 2.14 показывает это изменение. Оно может быть представлено как некоторый аналог винта Архимеда, опускающегося против часовой стрелки из точки *1* через точку *2* в точку *3*. Следует отметить, что этот винт представляет собой гладкую убывающую с ростом переменных поверхность. Характер убывания результата с поворотом полярного угла определяется показателем степени b_1, чем он больше, тем круче стремление результата к нулю. После того, как полярный угол делает полный поворот на 2π, результат y_r уменьшается в

$$\frac{ae^{-b_1\varphi}}{ae^{-b_1(\varphi+2\pi)}}=e^{b_1(\varphi+2\pi-\varphi)}=e^{2\pi b_1} \qquad (2.2.12)$$

раз.

В том случае, когда показатель степени является величиной отрицательной $b_1<0$, характер поведении модели меняется на противоположный. С ростом полярного угла комплексного аргумента одновременно растёт и результат. Этот рост, как легко понять, также является нелинейным (рис.2.15). Начинается он при $\varphi=0$, когда $y_r=a$, а затем поднимается вверх против часовой стрелки из точки *1* через точку *2* в точку 3. Визуально это можно представить как «винтовую лестницу» без ступенек.

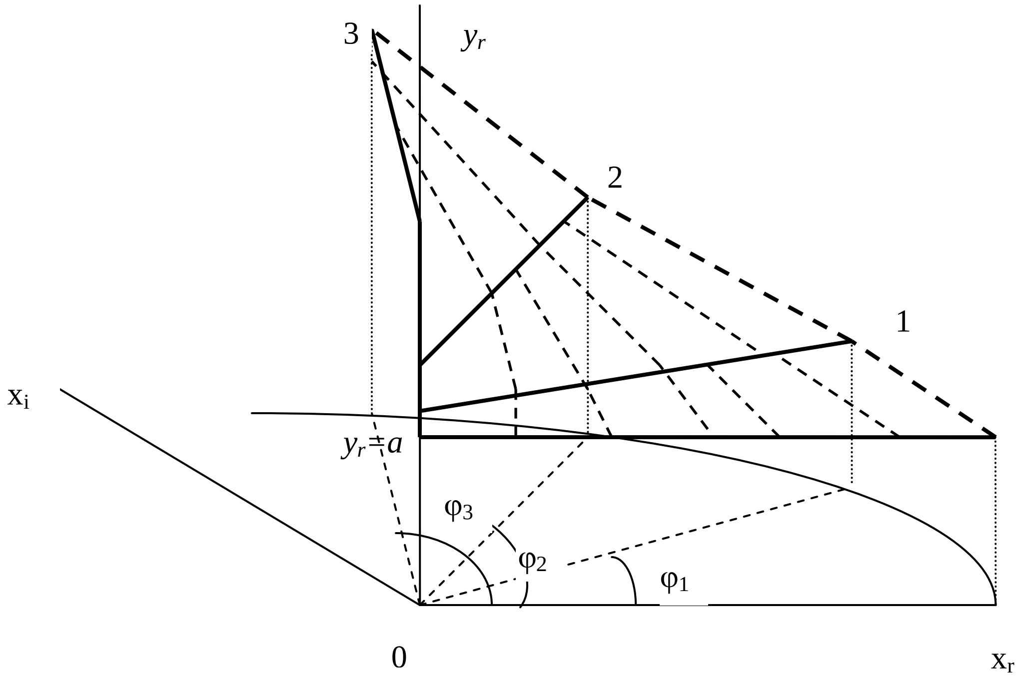

Рис.2.15. Поведение модели (2.2.8) при $b_1<0$

Если модель определена на всей комплексной плоскости ресурсов x_r и x_i, то полярный угол делает полный поворот на 2π и модель продолжает увеличивать значение y_r. За полный поворот полярного угла, результат y_r увеличивается в $e^{2\pi b_1}$ раз.

Следует ещё раз подчеркнуть, что и в первом, и во втором случаях величина y_r не зависит от количества применяемых ресурсов (модуля), а только от их соотношения (аргумента). То есть, пунктирным линиям на комплексной плоскости x_r и x_i рис. 2.14 и рис. 2.15, представляющим собой проекции прямых линий, лежащих на поверхности, описываемой моделью, соответствует одно и только одно значение результата вне зависимости от того, как далеко от нуля располагается на комплексной плоскости x_r и x_i точка, лежащая на прямой.

Теперь можно сделать некоторые обобщения. Если в первом случае поведения изучаемой функции (2.2.1) при равенстве нулю мнимой составляющей показателя комплексной степени результат y_r не зависит от полярного угла, а определяется только радиусом комплексного аргумента, то во втором случае, когда показатель степени становится мнимым, результат y_r не зависит от объёма x_r и x_i, а определяется исключительно пропорцией между ними. Это означает, что функция (2.2.1) в случае, когда обе составляющие комплексного показателя степени не равны нулю, моделирует сложный характер поведения производственного процесса, в том числе и циклический.

Воспользовавшись экспоненциальной формой записи функции (2.2.1), получим:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{(b_0+ib_1)} = ae^{i\alpha} e^{(b_0+ib_1)\ln r} e^{i(b_0+ib_1)\varphi}. \qquad (2.2.13)$$

Или, выделяя равенства для полярного угла и модуля, получим:
- для полярного угла:

$$\alpha + b_1 \ln r + b_0\varphi = 2\pi k, \qquad (2.2.14)$$

- для модуля:

$$y_r = ae^{b_0 \ln r - b_1\varphi} = a\frac{r^{b_0}}{e^{b_1\varphi}}. \qquad (2.2.15)$$

Как видно, данная степенная функция комплексного аргумента с комплексным показателем степени моделирует зависимость результата y_r как от количества x_r и x_i (величины модуля комплексного аргумента), так и от пропорции между ними (полярный угол комплексного аргумента).

Поскольку применительно к прикладным экономическим задачам коэффициенты модели могут быть найдены с помощью одного из методов математической статистики, то если в результате такого оценивания параметров модели (2.2.1) выяснилось, что коэффициент $b_0>0$, то это свидетельствует о наличии тенденции к росту результата при увеличении количества x_r и x_i. В случае если $0>b_0>1$, имеем экстенсивный рост, в том случае, когда $b_0>1$, имеем интенсивный рост. Отрицательность этого коэффициента комплексного показателя степени возможна в случае, например, моделирования кризисных явлений в производстве.

Определённую диагностирующую роль играет и мнимая составляющая комплексного коэффициента b_1. Если этот коэффициент положителен, то это свидетельствует о том, что дополнительное привлечение x_i (увеличение полярного угла φ) ухудшит результат y_r, а привлечение дополнительных единиц ресурса x_r (уменьшение полярного угла φ) улучшит показатели моделируемого результата. Случай, когда коэффициент b_1 оказывается меньше нуля, свидетельствует о том, что путь увеличения результата y_r лежит через увеличение x_i и уменьшение x_r.

Для того чтобы понять вид функции действительных переменных, которой соответствует рассматриваемая функция комплексного аргумента, рассмотрим её, как, например, одну из моделей производственных функций. Для этого обозначим производственный результат как $y_r=Q$, а вместо модуля комплексного аргумента и его полярного угла в функцию (2.2.15) подставим капитальные $x_r=K$ и трудовые $x_i=L$ ресурсы. Получим такой вид производственной функции:

$$Q = a\frac{r^{b_0}}{e^{b_1\varphi}} = a\frac{(K^2+L^2)^{b_0/2}}{e^{b_1 arctg\frac{L}{K}}}. \qquad (2.2.16)$$

При условии:

$$\alpha + b_1 \ln\sqrt{K^2+L^2} + b_0 arctg\frac{L}{K} = 2\pi k.$$

Вряд ли в каком научном труде, посвящённом производственным функциям или другим аспектам моделирования экономики, встречаются модели этого типа, поскольку обосновать такой вид модели в области действительных переменных невозможно. Если к тому же попытаться осуществить оценку параметров такой модели с помощью, например, метода наименьших квадратов, то исследователю необходимо будет привлечь методы нелинейного МНК, что для практического применения представляется весьма затруднительной. Но в области комплексных переменных эта задача представляется тривиальной. Таким образом, вновь подтверждается положение о том, что использование моделей комплексных переменных существенно расширяет модельную базу экономики, предоставляя экономисту инструмент, зачастую более удобный для моделирования сложных социально-экономических процессов, нежели инструменты действительных переменных.

Тщательно изучив свойства действительной части модели комплексного аргумента, теперь обратим внимание на балансовое уравнение, которое следует из равенства нулю мнимой части равенства для всех разновидностей степенных моделей комплексного аргумента. Оно является такой же неотъемлемой частью модели, как и его действительная часть, поэтому модель в целом, её свойства и конформное отображение можно понять, только проанализировав их совместное влияние на моделируемый результат.

Первая из них – модель с действительным показателем степени (2.2.2):

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)^{b_0}.$$

Полярный угол этой модели равен

$$\alpha + b_0\varphi = 2\pi k,$$

где k – целое число.

Или:

$$\varphi = \frac{2\pi k - \alpha}{b_0} = const. \qquad (2.2.17)$$

Пусть для определённости $k=0$. Это означает, что полярный угол между комплексными переменными x_r и x_i должен всегда оставаться постоянным и отрицательным. Тем самым данное балансовое уравнение ограничивает область определения переменных x_r и x_i – это не вся плоскость, как мы рассматривали ранее, а только точки, лежащие на прямой линии, проходящей через нулевую точку и имеющую угол наклона, равный:

$$\varphi = -\frac{\alpha}{b_0} = const\,. \tag{2.2.18}$$

В графической интерпретации это означает, что не все точки поверхности рис. 2.10 принадлежат модели, а только те, проекции которых на комплексную плоскость переменных x_r и x_i оказываются на прямой линии, лежащей на комплексной плоскости, все точки которой имеют полярный угол (2.2.18). Тогда графическое изображение степенной модели комплексного аргумента с действительным показателем степени будет таким, как это изображено на рис. 2.16.

Из рисунка видно, что модель в трёхмерном пространстве состоит из двух прямых линий, лежащих на поверхности конуса – первая, проекции которой лежат во втором квадранте комплексной плоскости, возрастает от нулевой точки с увеличением x_i и соответствующим линейным уменьшением в отрицательную область фактора x_r. Вторая прямая линия также начинается из нулевой точки и с ростом действительной переменной x_r и линейным уменьшением в отрицательной области мнимой составляющей x_i, также увеличивает свои координаты по результирующему признаку y_r.

Поскольку комплексный коэффициент пропорциональности и показатель степени определяют угол наклона точек линии на комплексной плоскости факторов, тем самым они определяют и положение этих двух линий в трёхмерном пространстве.

Думается, что нет особой необходимости представлять графики этой модели при других значениях показателя степени. Рисунки 2.11, 2.12 и 2.13 дают представление о том, что будет собой представлять модель в пространстве. Для этого следует на комплексную плоскость нанести прямую линию, проходящую через нулевую точку, а затем через эту прямую линию провести плоскость, перпендикулярную комплексной плоскости, а следовательно, параллельную оси $0y_r$ и содержащую эту ось в себе. Пересечение такой плоскости с нелинейными поверхностями, изображёнными на рисунках 2.11 – 2.13, будет представлять кривые, лежащие на этих поверхностях, все точки которых проецируются на комплексную плоскость в виде прямой линии проходящей через нулевую точку с углом, равным (2.2.18).

В ситуации, когда рассматривается полярный угол (2.2.17) при $k\neq 0$, балансовая линия может проходить и через первый и третий квадранты комплексной плоскости, если угол будет положительным.

Особого внимания заслуживает степенная функция комплексного аргумента с мнимым показателем степени (2.2.8). Балансовое уравнение для этой модели, представленное в (2.2.10), мы не рассматривали, а изучали только действительную часть этой функции.

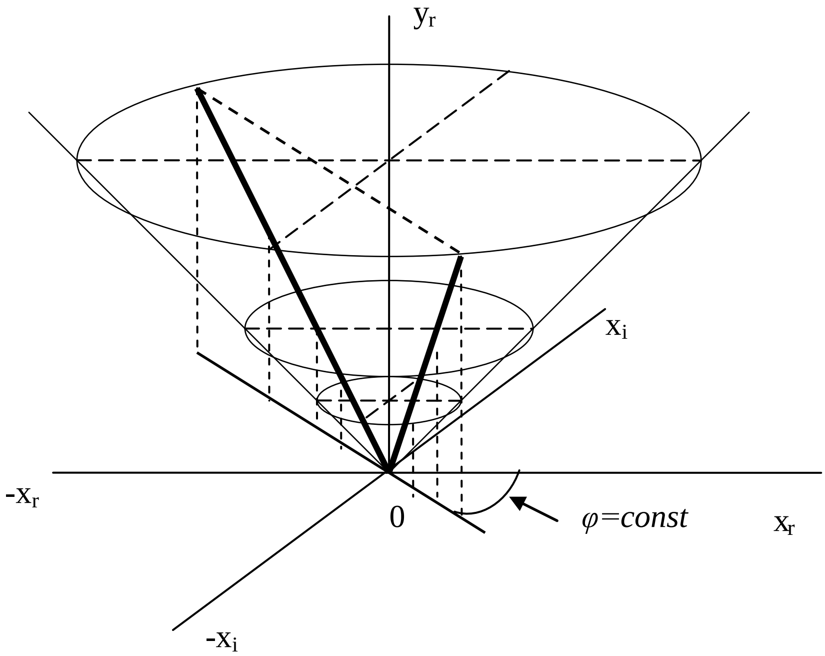

Рис. 2.16. График степенной функции комплексного аргумента с действительным коэффициентом при $b_0=1$

Эта балансовая часть была записана так:

$$\alpha + b_1 \ln r = 2\pi k.$$

Или:

$$\ln r = \frac{2\pi k - \alpha}{b_1} = const. \quad (2.2.19)$$

Откуда легко получить такое условие:

$$r = e^{\frac{2\pi k - \alpha}{b_1}} = const. \quad (2.2.20)$$

Это означает, что для модели с мнимым показателем степени второе балансовое уравнение ограничивает область изменения комплексного фактора множеством точек с постоянным радиусом. Постоянство модуля (радиуса) на комплексной плоскости есть не что иное, как условие уравнения окружности на этой плоскости. Поэтому степенная модель комплексного аргумента с мнимым показателем степени представляет собой не поверхность, убывающую с ростом полярного угла комплексного аргумента, как это представлено на рис. 2.14, и не поверхность, возрастающую с ростом полярного угла комплексного аргумента, как это представлено на рис. 2.15, а линию, лежащую на первой или второй поверхности (в зависимости от знака показателя степени) и равноотстоящую от оси результата y_r. На рис. 2.17 показана эта линия, соответствующая модели в целом.

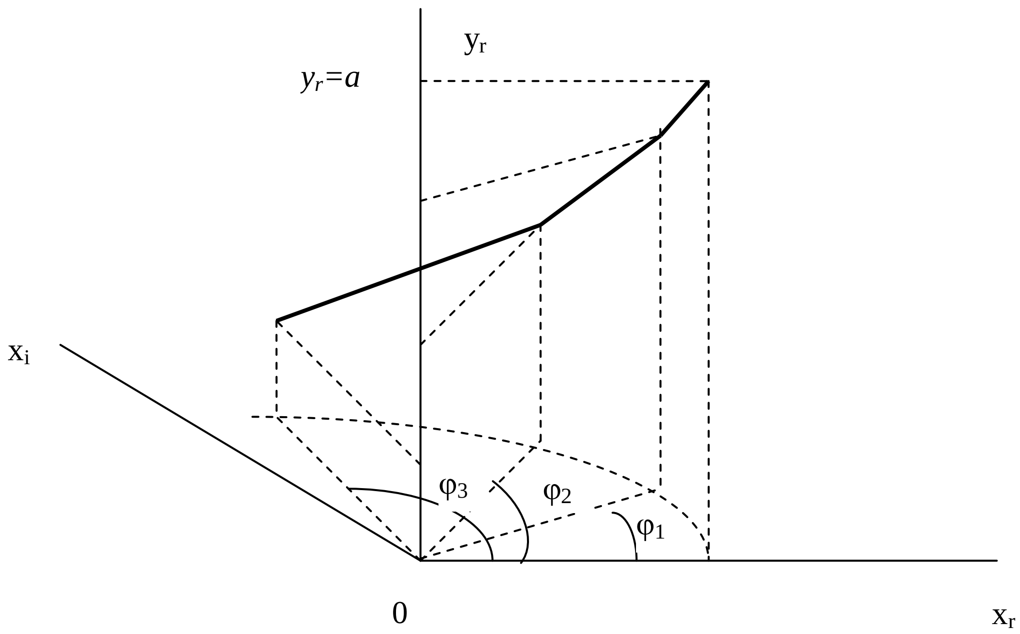

Рис. 2.17.График модели (2.2.8), $b_1>0$

Подводя общий итог, можно сделать вывод о том, что же собой представляют модели комплексного аргумента. И сделать это можно, сравнивая их с двухфакторными моделями действительных переменных, которые в трёхмерном пространстве описывают некоторую поверхность, в линейном случае – плоскость, расположенную в трёхмерном пространстве. Модели комплексного аргумента, которые также являются двухфакторными, описывают в трёхмерном пространстве некоторую кривую, в линейном случае – прямую линию. Из этого следует, что двухфакторные модели действительных переменных определены на всей плоскости факторов – точка с любыми координатами на этой плоскости соответствует одной и только одной точке на моделируемой поверхности. Модели комплексного аргумента определены в некоторой области, которая ограничивается «балансовым» уравнением, вытекающим из равенства нулю мнимой части модели.

В экономической практике это означает следующее. С помощью модели действительных переменных можно получить ответ, например, на такой вопрос: какой объём производства будет в случае, когда к производству привлекается тысяча рабочих и у них на всех имеются десять молотков? Подставив эти значения переменных в соответствующую модель, можно рассчитать некоторый результат. Этот результат, несмотря на абсурдность такой постановки, всё же будет вычисляться с помощью такой двухфакторной модели.

При использовании моделей комплексного аргумента такая постановка задачи бессмысленна, поскольку в них изначально предопределено соотношение между ресурсами – выход за эти пределы сразу же будет сигнализироваться наличием мнимой составляющей у функции комплексного аргумента, причём – чем дальше от нуля мнимая составляющая, тем сильнее отклонение исходных факторов от существующей пропорции. Поэтому применительно к модели комплексного аргумента, вопрос может быть сформулирован только так: какой объём производства будет моделироваться в случае, если привлечь тысячу рабочих с соответствующей этому количеству одной тысячей молотков? Если один из ресурсов будет излишним, то мнимая часть сразу же становится не равной нулю. Об экономическом смысле ненулевой мнимой части функции комплексного аргумента мы не будем останавливаться в этой работе.

Поскольку в экономике нет гладких функциональных зависимостей, то на практике при построении модели степенной функции с комплексным аргументом линии факторов на комплексной плоскости не будут лежать на одной прямой, а будут располагаться с некоторым разбросом относительно этой прямой линии. Это значит, что полярный угол моделируемого результата не будет равен *2πk* (2.2.14), то есть, мнимая составляющая функции не будет равна нулю. В таком случае будет моделироваться комплексный результат – для действительной части:

$$y_r = (a_0 + ia_1)\frac{(x_r + ix_i)^{b_0}}{e^{b_1\varphi}}\cos[\alpha + b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + b_0 arctg\frac{x_i}{x_r}], \qquad (2.2.21)$$

для мнимой –

$$y_i = (a_0 + ia_1)\frac{(x_r + ix_i)^{b_0}}{e^{b_1\varphi}}\sin[\alpha + b_1 \ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + b_0 arctg\frac{x_i}{x_r}]. \qquad (2.2.22)$$

Мнимая составляющая y_i будет мала, и её экономический смысл будет различен в зависимости от того, к каким экономическим задачам модель степенной функции комплексных аргументов применяется.

2.3. Показательные функции комплексных переменных

Степенные функции не являются единственным классом функций, используемых в современной экономике, хотя они превалируют среди моделей действительных переменных. В частности именно степенные функции нашли широчайшее применение в теории производственных функций, поскольку показатели степени могут иметь ясную экономическую интерпретацию, а дифференцируемость функции позволяет по значениям производных первого и второго порядка судить о моделируемых производственных процессах. Эти модели являются основными для моделирования экономической динамики, для параметрических моделей в ценообразовании и т.п. Но, поскольку в экономике действительных переменных используются и другие функции, следует и в комплекснозначной экономике изучить свойства комплекснозначных функций, аналогичных функциям действительных переменных.

Рассмотрим показательные функции на примере наиболее удобной из них - экспоненциальной комплекснозначной функции следующего вида:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)e^{(b_0 + ib_1)(x_r + ix_i)}. \qquad (2.3.1)$$

Свойства других показательных функций будут аналогичными данной экспоненциальной, поэтому, изучив свойства модели (2.3.1), мы можем их распространить на весь класс показательных функций комплексных переменных.

Опять свойства комплекснозначной функции и её конформное отображение будем изучать, исходя из общенаучного метода «от простого – к сложному». Поэтому рассмотрим ситуацию, когда и коэффициент пропорциональности, и комплексный показатель степени представляют собой не комплексные, а действительные числа, то есть – $a_1=0$, $b_1=0$. Тогда функция будет иметь вид:

$$y_r + iy_i = a_0 e^{b_0 x_r} e^{ib_0 y_i}. \qquad (2.3.2)$$

С учётом ранее принятых для комплексного результата (2.1.2) обозначений, получим:

$$\rho e^{i\theta} = a_0 e^{b_0 x_r} e^{ib_0 x_i}.$$

Откуда легко получить графическую интерпретацию (конформное отображение) рассматриваемой модели, так как модуль комплексного результата ρ зависит только от величины фактора x_r:

$$\rho = a_0 e^{b_0 x_r},$$

а полярный угол комплексного результата θ зависит только от величины фактора x_i:

$$\theta = b_0 x_i.$$

Проще всего рассмотреть ситуацию, когда один из факторов x_r или x_i остаётся величиной постоянной, а меняется только другой фактор. Поскольку коэффициенты пропорциональности a_0 и b_0 только отражают влияние масштаба, будем считать их равными единице. На рис. 2.18 изображён случай, когда постоянной является величина x_r, а фактор x_i увеличивается. Графически на плоскости x_r и x_i это означает линию, параллельную оси мнимой составляющей комплексного фактора, пересекающую ось капитальных ресурсов.

Вначале рассмотрим случай, когда $x_i>0$. В левой части рис. 2.18 на плоскости факторов нанесены три возрастающие от оси x_r прямые линии:

- для первой на всей полуплоскости выполняется равенство $x_r=-1$,
- для второй - $x_r=0$,
- для третьей – $x_r=1$.

Каждая из этих трёх линий отображается на плоскости результатов окружностями с радиусами, соответственно равными:

$$\rho_1 = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\rho_1 = e^0 = 1,$$

$$\rho_1 = e^1 = e.$$

При $x_i=0$ каждая из этих окружностей начинается из оси x_r, поскольку для данной модели полярный угол комплексного результата равен $\theta = x_i$ и при $x_i=0$ полярный угол также равен нулю и все моделируемые точки лежат на оси $0x_r$.

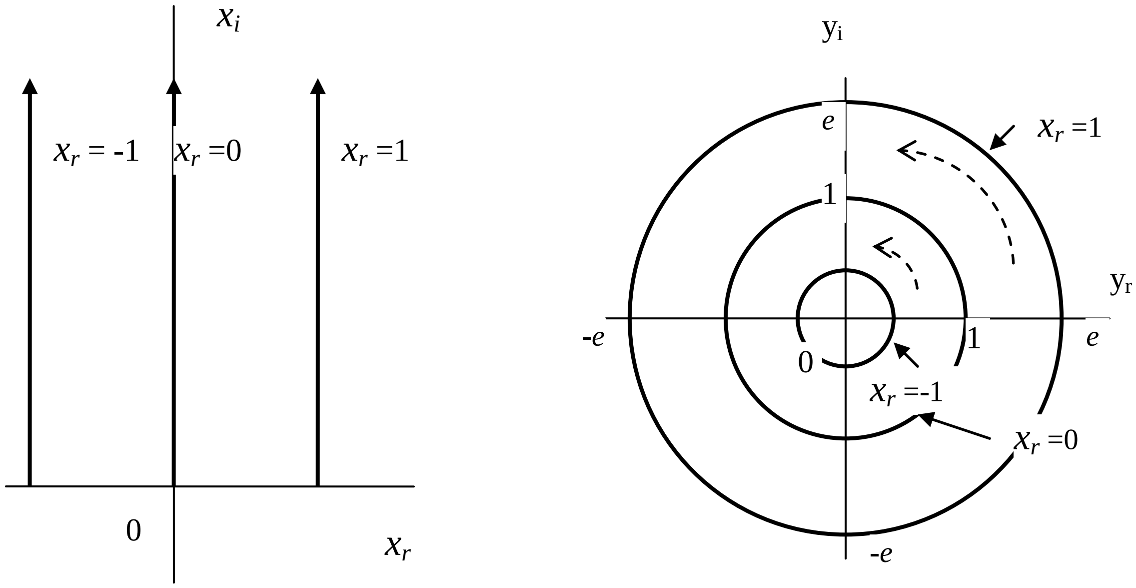

Рис. 2.18. Конформное отображение функции (2.3.2) при x_r =*const* и x_i>*0*

С увеличением x_i модуль комплексного результата ρ остаётся неизменным, но вектор с этим радиусом поворачивается на угол θ, равный x_i (в правой части рис.2.18 направление поворота показано пунктирной стрелкой).

Если теперь переменная x_i будет меняться не в положительной, а в отрицательной части, то есть – линии постоянного x_r на плоскости факторов будут направлены вниз, то окружности на результирующей комплексной плоскости не изменят своего положения, только движение вектора комплексного результата поменяется на противоположное – по часовой стрелке, а не против неё.

Понятно, что в результате этого движения модуль комплексного результата опишет полный круг при изменении x_i от нуля до 2π. В случае, когда $x_i>2\pi$, радиус-вектор комплексного результата вновь будет повторять свою траекторию по данной окружности. Таким образом данная модель при постоянном x_r и изменяющемся x_i моделирует вращающиеся по одной и той же окружности (для данного x_r) процессы.

Теперь рассмотрим график данной функции, если значения мнимой части x_i останутся величинами постоянными, а значения действительной части x_r будут изменяться линейно. Постоянство x_i приведёт к тому, что для комплексного результата неизменным останется полярный угол, так как

$$\theta = x_i .$$

Модуль комплексного результата будет изменяться по экспоненте, поскольку

$\rho = e^{x_r}$.

Это означает, что результирующий вектор на комплексной плоскости y_r, y_i не будет менять своего направления, а будет менять свою длину. На рис. 2.19 приведены соответствующие графики функции для этого случая.

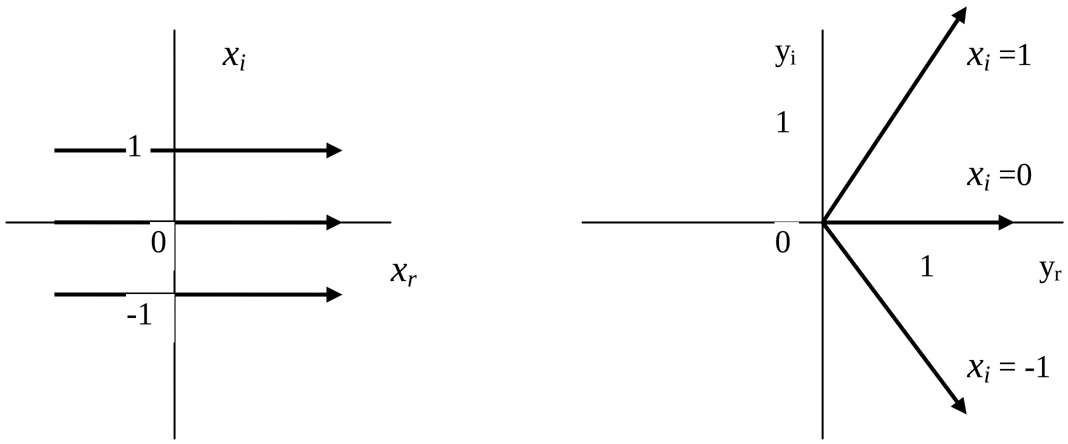

Рис. 2.19. Конформное отображение функции (2.3.2) при x_i=*const*

При x_i=1 модуль комплексного результата с ростом x_r возрастает по лучу, выходящему из нулевой точки вверх, при x_i=0 луч проходит от нулевой точки по оси y_r, при x_i=-1 луч выходит из нулевой точки вниз.

Если последовательно увеличивать x_i: x_{i1} =1, x_{i2}= x_{i1}+Δ x_i, x_{i3}= x_{i2}+Δ x_i и т.д. и рассматривать при их фиксированном значении рост x_{r1}, то получим семейство лучей, которые будут поворачиваться на плоскости результатов против часовой стрелки так, что i-й луч совпадёт с j-м лучём при x_i=(2πk) x_j, где k-целое число.

Если теперь предположить, что факторные переменные x_r или x_i меняются прямо пропорционально друг другу от нуля до бесконечности, то модель (2.3.2) отображает на результирующую плоскость такую нелинейную совокупность точек, которые начинаются из точки с координатами x_r=1; x_i=0 и проходят через все четыре квадранта результирующей комплексной плоскости против часовой стрелки так, что при x_i=2π переменная y_r становится вновь равной нулю. И так будет происходить при каждом x_i, кратном 2π (рис.2.20). Иначе говоря, при линейном росте факторов результат будет вести себя на комплексной плоскости подобно известной «спирали Архимеда», только выходящей не из нулевой точки, а из точки с координатами x_r=1; x_i=0. Это свойство конформного отображения может быть использовано для моделирования в экономике различного рода цикличных процессов.

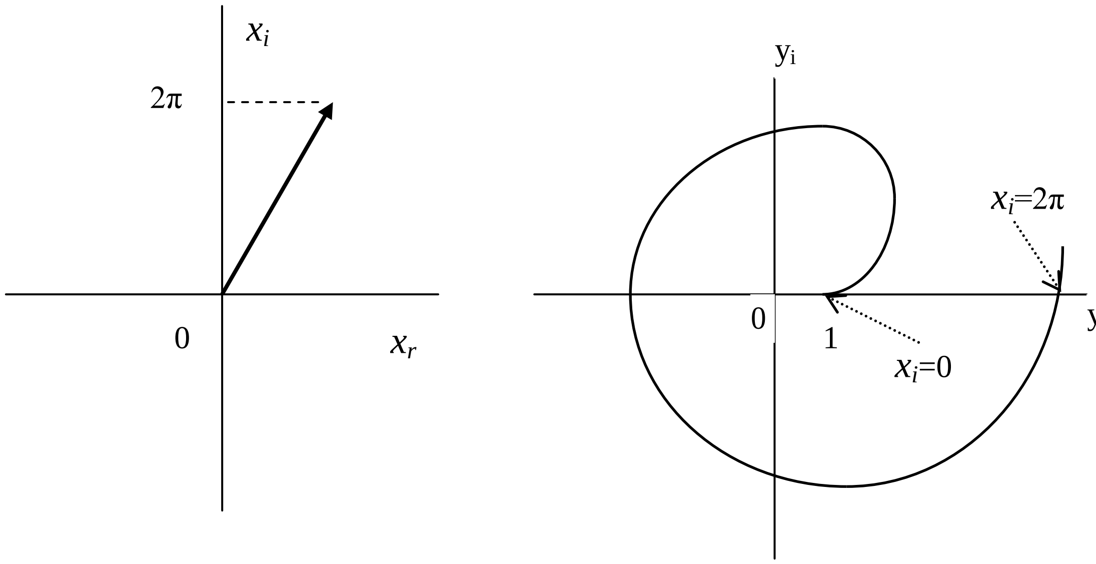

Рис. 2.20. Поведение функции (2.3.2) при x_i / x_r =*const* и возрастающем модуле факторов

Теперь рассмотрим влияние коэффициента пропорциональности функции (2.3.1) на свойства конформного отображения, поскольку до сих пор мы для простоты предполагали, что он является действительным и равен единице. В экспоненциальной форме модель с комплексным коэффициентом пропорциональности будет иметь вид:

$$y_r + iy_i = ae^{i\alpha}e^{x_r}e^{ix_i}\,. \qquad (2.3.3)$$

Или, преобразуя левую часть равенства в экспоненциальную форму записи:

$$\rho e^{i\theta} = ae^{i\alpha}e^{x_r}e^{ix_i}\,. \qquad (2.3.4)$$

Теперь можно увидеть, какое действие осуществляет комплексный коэффициент пропорциональности в данной функции. Во-первых, модуль комплексного результата изменяется в *a* раз по сравнению с только что рассмотренной простой функцией. Во-вторых, полярный угол комплексного результата также меняется, поскольку для него выполняется равенство, следующее из (2.3.4):

$$\theta = \alpha + x_i\,.$$

То есть, по сравнению с простой моделью (2.3.2) при $x_i=0$ полярный угол комплексного результата будет иметь некоторое приращение α.

Таким образом, комплексный коэффициент пропорциональности даёт возможность откорректировать модель к некоторым конкретным особенностям описываемого экономического процесса.

Теперь рассмотрим случай, когда показатель степени умножается на мнимый коэффициент:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)e^{ib_1(x_r + ix_i)} = (a_0 + ia_1)e^{-b_1 x_i} e^{ib_1 x_r} \qquad (2.3.5)$$

Модуль модели может быть записан так:

$$\rho = ae^{-b_1 x_i}, \qquad (2.3.6)$$

а полярный угол так:

$$\theta = \alpha b_1 x_r \qquad (2.3.7)$$

Легко вновь заметить, что модуль является функцией одно переменной – на этот раз зависит от мнимой части комплексного аргумента, а полярный угол модели, также являясь функцией одной переменной, зависит от действительной части комплексного аргумента. Модель в этом случае подобна тому, что была рассмотрена только что при действительном коэффициенте пропорциональности в показателе степени, только влияние составляющих комплексного аргумента симметрично поменялось. Не будем, поэтому приводить здесь графики, полученные ранее, поскольку отличие в них только в том, что меняются на осях переменные.

Теперь есть смысл рассмотреть функцию (2.3.1) с комплексным показателем степени:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)e^{(b_0 + ib_1)(x_r + ix_i)} = (a_0 + ia_1)e^{(b_0 x_r - b_1 x_i)} e^{i(b_1 x_r + b_0 x_i)}. \qquad (2.3.8)$$

Приводя все комплексные переменные и коэффициенты функции (2.3.8) в экспоненциальную форму, и группируя составляющие полярного угла и составляющие модуля, получим:

$$\rho e^{i\theta} = ae^{b_0 x_r - b_1 x_i} e^{i\alpha} e^{i(b_1 x_r + b_0 x_i)}.$$

Откуда для модуля комплексной функции:

$$\rho = ae^{b_0 x_r - b_1 x_i}$$

и для полярного угла этой функции:

$$\theta = \alpha + b_1 x_r + b_0 x_i.$$

Поведение этой функции сложнее, чем функций, рассмотренных выше. При положительных значениях всех коэффициентов и фиксированном количестве x_i с ростом x_r будет моделироваться следующая ситуация. Растёт модуль функции, в то же время растёт и полярный угол комплексного результата, что означает увеличение y_i большими темпами, чем y_r.

При положительных значениях коэффициентов и фиксированном значении x_r с ростом x_i будет моделироваться другая ситуация. Модуль комплексного результата будет уменьшаться, но полярный угол будет возрастать, то есть y_r уменьшается в большей степени, чем y_i.

Свойства модели (2.3.8) определяются знаком коэффициентов показателей степени. Если, например, коэффициент b_0 положителен, а коэффициент b_1 – отрицателен, то моделируется такая ситуация. С ростом x_r при постоянстве x_i растёт модуль комплексного результата, но полярный угол уменьшается, что свидетельствует о большем росте y_r, чем y_i.

Различные сочетания значений коэффициентов моделируют разные сценарии роста или уменьшения комплексных результатов при росте факторов. Это многообразие отвечает потребностям в моделировании многообразных экономических процессов.

Отрицательность двух коэффициентов комплексного показателя степени также имеет смысл. При фиксированном количестве x_i и росте x_r снижается модуль результата и уменьшается его полярный угол. Если результирующие переменные отражают, например, валовую прибыль и затраты на производство, то это моделирует ситуацию, когда масштаб производства уменьшается, а рентабельность растёт.

Итак, показательная функция комплексных переменных (2.3.8) может вполне удовлетворительно моделировать различные социально-экономические процессы при различных сочетаниях её коэффициентов a_0, a_1, b_0 и b_1. При этом, что весьма важно, эта функция пригодна для моделирования цикличных процессов.

Рассмотрим теперь свойства показательной функции комплексного аргумента:

$$y_r = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(x_r+ix_i)}. \tag{2.3.9}$$

Вновь представим комплексные величины модели – коэффициент пропорциональности и комплексный аргумент в экспоненциальной форме. Группируя составляющие модуля и полярного угла, получим:

$$y_r = ae^{b_0x_r-b_1x_i}e^{i\alpha}e^{i(b_1x_r+b_0x_i)}. \tag{2.3.10}$$

Представляя эту модель как систему равенств действительной и мнимой частей, имеем:

$$\begin{cases} y_r = ae^{b_0x_r - b_1x_i} \\ y_i = \alpha + b_1x_r + b_0x_i = 0 \end{cases}. \tag{2.3.11}$$

Из последнего равенства системы легко получить:

$$x_i = -\frac{1}{b_0}(\alpha + b_1x_r). \tag{2.3.12}$$

Равенство (2.3.12) означает, что показательная функция комплексного аргумента с комплексными коэффициентами может применяться только в том случае, когда в моделируемой ситуации между факторами имеется строгая линейная функциональная зависимость. Если коэффициенты комплексного показателя степени имеют одинаковый знак, то зависимость – обратно пропорциональная: с ростом одного ресурса другой убывает по линейному закону. Если же коэффициенты имеют разные знаки, то зависимость прямо пропорциональная.

Графическая интерпретация функции (2.3.12) проста – в трёхмерном пространстве комплексная плоскость факторов – результат функция изображается совокупностью точек, лежащих на плоскости, перпендикулярной плоскости ресурсов и параллельной оси результата, то есть описывается уравнение некоторой линии. Форма этой кривой линии определяется как значениями факторов, так и значениями комплексного показателя степени, поскольку выражение:

$$b_0x_r - b_1x_i$$

является показателем степени экспоненциального модуля функции.

Если в результате такого сочетания факторов и коэффициентов это выражение будет положительным, то моделируется экспоненциальный рост, если же оно будет отрицательным – моделируется экспоненциальное уменьшение показателя. Или, иначе говоря, функция показательная комплексного аргумента имеет конформное отображение в виде экспоненциальной линии, расположенной на плоскости, перпендикулярной комплексной плоскости факторов и параллельной оси результата.

2.4. Логарифмические функции комплексных переменных

Рассмотрим возможность применения логарифмических функций комплексных переменных и комплексного аргумента в комплекснозначной экономике. В общем виде первая функция комплексной переменной будет представлена так:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(x_r + ix_i)\,. \qquad (2.4.1)$$

Очевидно, что возможны и другие основания логарифмов (не только натуральное, но и десятичное, двоичное и т.п.), но это не меняет сути дальнейших рассуждений и основных свойств самой функции, поэтому будем рассматривать натуральное основание логарифмов, как наиболее удобное для анализа.

Следует сразу указать на то, что логарифмическая функция комплексных переменных, как и в случае функции действительных переменных, не существует в точке x_r =0, x_i =0, но в отличие от логарифмической функции действительных переменных, существует при отрицательных значениях аргумента. Поэтому во всех дальнейших рассуждениях данного параграфа мы эту нулевую точку по умолчанию исключаем из рассмотрения. Если возникнет необходимость рассмотреть ситуацию, когда некоторая линия, изображённая на комплексной плоскости ресурсов выходит из нулевой точки, мы будем подразумевать, что она выходит из окрестности этой точки.

Поскольку свободный член правой части равенства характеризует начальные условия и его влияние на комплексный результат этим и ограничивается, будем рассматривать функцию без него:

$$y_r + iy_i = (b_0 + ib_1)\ln(x_r + ix_i)\,. \qquad (2.4.2)$$

Из теории функций комплексного переменного известно, что логарифм комплексного числа z может быть представлен в виде суммы:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \qquad (2.4.3)$$

где k – целое число.

То есть, комплексное число z≠0 имеет бесчисленное множество логарифмов (бесконечнозначная функция), поскольку действительная часть логарифмической функции определяется однозначно, а мнимая – с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Из (2.4.3) легко заметить, что если действительная или (и) мнимая части комплексного аргумента логарифмической функции являются отрицательными, то логарифм этой функции существует. Это дополнительный аргумент в пользу использования в экономике функций комплексных переменных, поскольку логарифмическую зависимость можно распространить и на область отрицательных значений аргумента в отличие от функций действительных переменных.

В теории функций комплексного переменного вводится понятие «главное значение логарифма», когда $k=0$. Мы будем использовать в моделях комплекснозначной экономики именно это главное значение.

Применяя свойство логарифма комплексного числа к рассматриваемой функции (2.4.2), получим:

$$y_r + iy_i = (b_0 + ib_1)(\ln\sqrt{x_r^2 + x_i^2} + i\,arctg\frac{x_i}{x_r}) = (b_0 + ib_1)(\ln r + i\varphi). \qquad (2.4.4)$$

Разберём случай, когда мнимая часть комплексного коэффициента равна нулю. Тогда функция будет иметь следующий вид:

$$y_r + iy_i = b_0 \ln r + b_0 i\varphi. \qquad (2.4.5)$$

Или:

$$y_r = b_0 \ln r; \quad y_i = b_0\varphi.$$

Из этих равенств следует геометрическая интерпретация логарифмической модели с действительным коэффициентом (рис. 2.21).

Вновь для того, чтобы понять свойства функции, рассмотрим ситуации постоянства некоторых характеристик факторов. В данном случае есть смысл рассматривать ситуации, когда неизменным является модуль, а меняется полярный угол, и вторая ситуация, когда модуль меняется, а полярный угол остаётся неизменным.

Рассмотрим эти варианты.

В первом случае (на рисунке будем обозначать линии, соответствующие ему, цифрой 1), когда радиус комплексной переменной факторов остаётся неизменным ($r=const$), а меняется только её полярный угол, то есть факторы x_r и x_i изменяются нелинейно по дуге окружности (рис. 2.21), логарифмическая функция отображает на комплексную плоскость результатов луч, выходящий из точки $b_0\ln r$ на оси y_r и проходящий параллельно оси y_i.

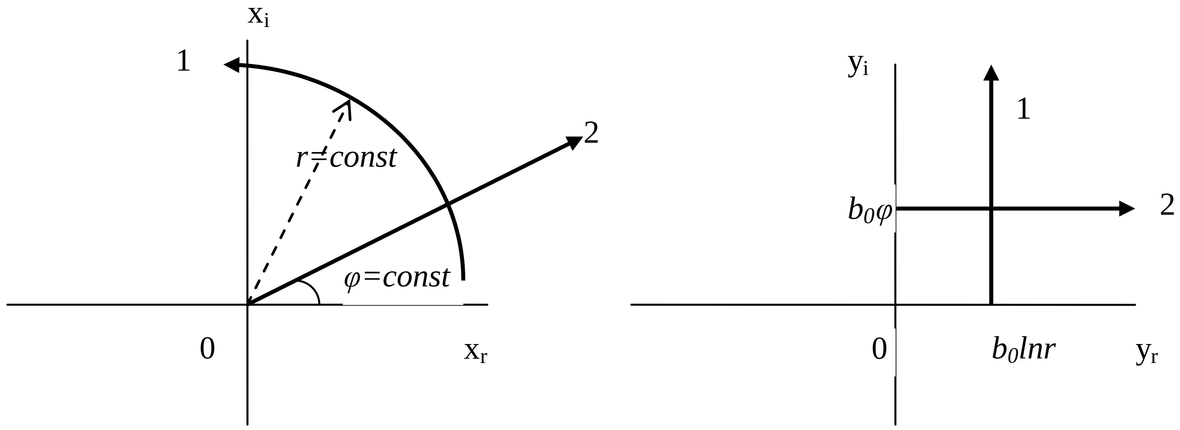

Рис. 2.21. Поведение модели (2.4.2) когда мнимая часть комплексного коэффициента равна нулю $b_1=0$

Легко определить, что после того, как радиус комплексных ресурсов осуществит поворот на 2π и вернётся в исходное положение, на плоскости комплексного результата отображаемые точки будут находиться на том же самом луче, но выше - в точке, которая в ($b_0 2\pi$) раз превышает исходное значение.

Во втором случае, когда аргумент ресурсов остаётся неизменным, то есть, полярный угол является величиной постоянной ($\varphi=const$), а меняется модуль, что означает пропорциональное увеличение каждого ресурса, имеем на комплексной плоскости аргумента прямую линию, выходящую из окрестностей начала координат. Этому вектору на результирующей комплексной плоскости соответствует линия, выходящая из мнимой оси y_i в точке $b_0\varphi$, и идущая параллельно оси y_r (вариант 2 рис. 2.21).

Если на плоскости аргумента отображаемые точки расположены на прямой, которая не проходит через нулевую точку, то они отображаются с помощью рассматриваемой функции в нелинейную функцию, поскольку одновременно изменяются и модуль, и аргумент комплексных факторов, что приводит к нелинейному изменению и действительной, и мнимой части комплексного результата. Чем ближе прямые линии на комплексной плоскости факторов расположены к нулевой точке, тем более линейный характер принимает конформное отображение и наоборот.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда равна нулю действительная часть комплексного коэффициента пропорциональности модели (2.4.2), то есть, используется функция следующего вида:

$$y_r + iy_i = ib_1 \ln(x_r + ix_i) = -b_1\varphi + ib_1 \ln r . \qquad (2.4.6)$$

Откуда:

$$y_r = -b_1\varphi; y_i = b_1 \ln r .$$

Тем самым мы получили свойства, «симметричные» свойствам модели (2.4.5) – та же самая дуга на комплексной плоскости аргумента с постоянным радиусом будет отображаться на плоскость результатов в виде луча, параллельного оси y_r, но направленного в отрицательную область (в силу знака «минус», стоящего перед коэффициентом b_1); а прямая линия, выходящая из окрестностей нулевой точки на оси аргумента будет отображаться лучом, параллельным оси y_i.

Теперь можно рассмотреть свойства модели (2.4.2), когда и действительная, и мнимая части коэффициента пропорциональности не равны нулю. Раскрывая скобки (2.4.4) , получим:

$$x_r + ix_i = b_0 \ln r - b_1\varphi + i(b_0\varphi + b_1 \ln r)\,. \qquad (2.4.7)$$

Откуда для действительной части равенства:

$$y_r = b_0 \ln r - b_1\varphi\,,$$

и для мнимой части:

$$y_i = b_1 \ln r + b_0\varphi\,.$$

Чтобы понять поведение этой модели, найдём с помощью этих равенств полярный угол и модуль комплексного результата, моделируемого данной логарифмической функцией. Тангенс полярного угла результата для рассматриваемой модели будет равен:

$$tg\theta = \frac{b_1 \ln r + b_0\varphi}{b_0 \ln r - b_1\varphi}\,. \qquad (2.4.8)$$

Модуль комплексного результата:

$$\rho = \sqrt{(b_0^2 + b_1^2)(\ln^2 r + \varphi^2)}\,. \qquad (2.4.9)$$

Рассмотрим первый вариант поведения исходных переменных – когда полярный угол комплексного аргумента является величиной постоянной $\varphi = const$, а его радиус r непрерывно возрастает. Геометрически это означает на комплексной плоскости аргумента луч, выходящий из окрестностей нулевой точки. Этот луч с помощью рассматриваемой модели отображается на комплексную плоскость результатов в виде нелинейной кривой, характер которой определяется коэффициентами b_0 и b_1. Если, например, оба коэффициента положительны и $b_0 \leq b_1$, то вектор комплексного результата будет, увеличиваясь по модулю, поворачиваться против часовой стрелки, то есть прирост y_i оказывается больше прироста y_r и наоборот – если оба коэффициента положительны, но $b_1 \le b_0$, то тангенс полярного угла вектора результата будет уменьшаться и стремиться к b_1/b_0, что означает поворот вектора комплексного результата по часовой стрелке, то есть – y_r будет расти большими темпами, чем y_i. Это свидетельствует о том, что коэффициенты рассматриваемой модели также могут быть использованы в качестве некоторых индикаторов происходящих процессов в задачах экономического анализа.

Изучим теперь свойства логарифмических функций комплексного аргумента. Будем рассматривать её, как и в предыдущем случае, без свободного члена:

$$y_r = (b_0 + ib_1)\ln(x_r + ix_i)\,. \tag{2.4.10}$$

Применяя к рассматриваемой модели формулу логарифма комплексного числа, получим:

$$y_r = (\mathrm{b}_0 + ib_1)(\ln r + i\varphi)\,. \tag{2.4.11}$$

Раскрывая скобки:

$$y_r = b_0 \ln r - b_1\varphi + i(b_1 \ln r + b_0\varphi)\,. \tag{2.4.12}$$

Или, группируя действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} y_r = b_0 \ln r - b_1\varphi \\ 0 = b_1 \ln r + b_0\varphi \end{cases}. \tag{2.4.13}$$

Второе уравнение системы является балансовым, и из него можно получить:

$$b_1 \ln \sqrt{x_r^2 + x_i^2} = -b_0 arctg\,\frac{x_i}{x_r}\,. \tag{2.4.14}$$

Преобразовать полученную зависимость в явно заданную функцию одной переменной от другой сложно. Исследования показали, что эта зависимость представляет собой гладкую нелинейную функцию, приближающуюся по форме к логарифмической зависимости. Это означает, что на комплексной плоскости факторов условие (2.4.14) определяет нелинейную кривую, которая и является областью определение факторов. Действительная составляющая логарифмической функции комплексного аргумента также не линейна и по форме приближается к логарифмической зависимости. Она будет лежать на нелинейной поверхности, перпендикулярной комплексной плоскости факторов, и пересекающей эту плоскость точно по линиям кривой, являющейся областью определения факторов.

Итак, логарифмическая функция комплексного аргумента описывает гладкую нелинейную кривую в трёхмерном пространстве.

2.5. Функция Жуковского и тригонометрические комплекснозначные функции

Рассмотренные выше простые комплекснозначные функции в теории функций комплексного переменного дополняют ещё и функцией Жуковского, а также тригонометрическими функциями. Поскольку экономика многообразна, и нельзя исключать наличие таких взаимосвязей в ней, которые могут быть описаны подобными функциями, осуществим изучение их свойств.

Дробно-рациональная функция вида

$$w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \tag{2.5.1}$$

была тщательно изучена с позиций её практического применения Н.Е.Жуковским, почему её и называют в теории функций комплексного переменного функцией Жуковского.

Для того чтобы определить область однолистности конформного отображения этой функции, необходимо определить – а существует ли область многолистности, то есть, есть ли такие z_1 и z_2 которые с помощью функции Жуковского переходят в одну точку w? Для ответа на этот вопрос приравняем друг другу функции Жуковского для этих двух комплексных переменных:

$$z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2}\rightarrow(z_1-z_2)(1-\frac{1}{z_1z_2})=0. \tag{2.5.2}$$

Если это равенство выполняется, то функция многолистна, если не выполняется, то каждому значению комплексной переменной факторов соответствует только одно комплексное значение результата.

Поскольку по условию задачи $z_1 \neq z_2$, то функция однолистна за исключением точек, для которых $z_1z_2=1$. Посмотрим, какие точки не удовлетворяют условию однолистности, то есть, в каких случаях $z_1z_2=1$. Для этого представим комплексные переменные в экспоненциальной форме:

$$z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2}=1\leftrightarrow r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}=1.$$

Для того чтобы выполнялось равенство единице, необходимо, чтобы,

- во-первых, сумма полярных углов была равна нулю - $\theta_1=-\theta_2$, что означает симметричность точек относительно оси действительных чисел,

- а во-вторых, модули комплексных переменных z_1 и z_2 были равны единице.

Таким образом, функция Жуковского однолистна на всей комплексной плоскости за исключением точек единичной окружности.

Поскольку любое комплексное число может быть представлено как в арифметической, так и в тригонометрической форме, представим z:

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi. \tag{2.5.3}$$

Подставим это выражение в функцию Жуковского. Получим:

$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) = \frac{1}{2}(r\cos\varphi + ir\sin\varphi + \frac{1}{r\cos\varphi + ir\sin\varphi}) = \frac{1}{2}(r\cos\varphi + ir\sin\varphi + \frac{r\cos\varphi - ir\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)})$$

Или:

$$\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi + i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi. \tag{2.5.4}$$

Если рассматривать на плоскости аргумента окружность, $r=r_0\neq 1$, то функция Жуковского отображается на результирующей плоскости в виде эллипсов с полуосями:

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + \frac{1}{r_0}),\ \mathrm{b} = \frac{1}{2}(r_0 - \frac{1}{r_0}). \tag{2.5.5}$$

При $r_0 \to 1$ эллипс сжимается в отрезок [-1,1] действительной оси комплексной плоскости, при $r_0 \to 0$ уходит в бесконечность, также, как и при $r_0 \to 0$. Только в случае, когда $|z| < 1$, то есть, точки лежат внутри единичной окружности, с ростом полярного угла аргумента эллипс обходится в отрицательном направлении, а когда $|z| > 1$ - в положительном.

Применительно к экономическим задачам, эта функция может использоваться в эконометрии. Тогда удобнее её представлять в виде:

$$w = (a_0 + ia_1)(z + \frac{1}{z}), \tag{2.5.6}$$

поскольку комплексный коэффициент пропорциональности способствует генерации конформных отображений в виде эллипсов разного масштаба и разной формы.

Если комплексный аргумент меняется линейно, то и функция Жуковского будет меняться практически линейно за исключением участка значений аргумента, лежащих внутри окружности единичного радиуса. Здесь функция становится нелинейной.

В качестве примера на рис. 2.22 приведена функция Жуковского для линейно изменяющегося аргумента, когда мнимая составляющая представляет собой зависимость от действительной составляющей аргумента, вычисленной по формуле:

$$x_i = 0,4 + x_r, -1 < x_r < 1.$$

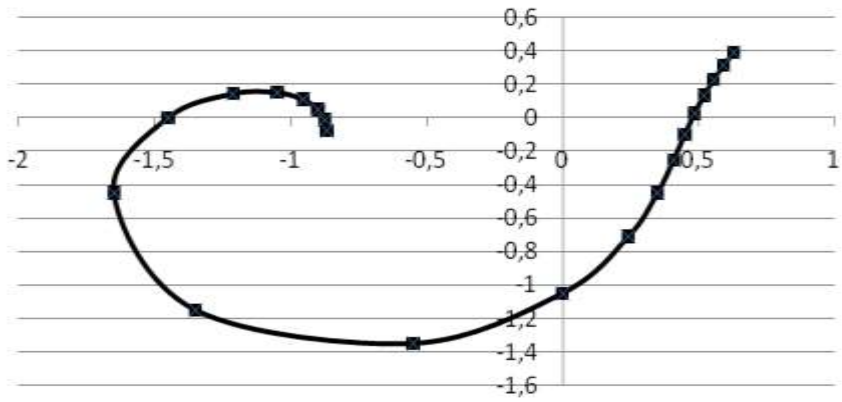

Рис. 2.22. Функция Жуковского при значениях аргумента, меняющихся линейно

При других способах линейного изменения аргумента внутри окружности единичного радиуса функция принимает иные нелинейные формы.

Это означает, что функция Жуковского может быть использована в моделировании некоторых экономических процессов в том случае, когда и дей ствительная и мнимая части аргумента меняются от *-1* до *+1*. В остальной области определения аргумента эта функция не представляет интереса для исследователя (за исключением случаев изменения аргумента по окружности).

Функция Жуковского удобна для изучения тригонометрических функций комплексных переменных.

Поскольку из формулы Эйлера следуют два равенства:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x; \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

то из них легко вывести формулы для вычисления синусов и косинусов:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Опираясь на эти формулы, в теории функций комплексного переменного так определяют тригонометрические функции комплексного переменного *z*:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{2.5.7}$$

Для этих функций выполнимы все тригонометрические соотношения, они периодичны с периодом 2π и т.п. Для представления сути конформного отображения первой функции, её можно представить так:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}}{i} + ie^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}}{i} + \frac{i}{e^{iz}}\right) = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right). \tag{2.5.8}$$

Здесь $z_1 = \frac{e^{iz}}{i}$.

Таким образом, отображение функции $\sin z$ можно рассматривать как суперпозицию других отображений – экспоненциальной функции комплексной переменной и функции Жуковского. Поскольку в настоящее время не ясно, в каких экономических приложениях могут быть применимы тригонометрические функции комплексных переменных, ограничимся констатацией этого факта.

В завершение следует сказать, что косинус комплексной переменной в силу очевидного равенства:

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

отличается от синуса лишь сдвигом.

На основе формул синуса и косинуса комплексных переменных определяются и другие тригонометрические функции.

Глава третья. Основы комплекснозначной эконометрики

3.1. Статистика случайной комплексной величины

Эконометрия (эконометрика) сегодня является одним из развитых и наиболее востребованных экономической практикой разделов экономико-математического моделирования. Задачи описания, объяснения и прогнозирования многообразных тенденций социально-экономической динамики или взаимосвязей между факторами непрерывно возникают перед экономистом на всех стадиях его деятельности – от макроуровня до микроуровня. Эконометрика – это раздел экономики, в котором с помощью методов обработки статистических данных строятся математические модели, количественно описывающие закономерности экономических взаимосвязей. В основе современной эконометрии лежат методы математической статистики, в первую очередь – методы регрессионного и корреляционного анализа.

Основной целью этих разделов математической статистики является выявление взаимосвязи между случайными факторами, оценка степени этой взаимосвязи, подбор соответствующей формы регрессионной модели, оценивание значений коэффициентов модели и определение степени достоверности полученных результатов.

Набор регрессионных моделей определяется известными элементарными математическим функциями одной переменной, число которых едва превышает два десятка. Применительно к типам социально-экономической динамики два десятка моделей – это бесконечно мало, поскольку экономическая динамика многообразна и только различных типов конъюнктурообразующих факторов можно насчитать несколько десятков тысяч[9]. Поэтому задача расширения арсенала моделей, которые можно использовать в эконометрии остаётся весьма актуальной. Комплекснозначные функции, рассмотренные в предыдущей главе, как раз и решают эту задачу, представляя собой инструмент, который иначе, нежели модели действительных переменных описывает зависимости между переменными. Различные элементарные функции комплексных переменных за редким исключением позволяют экономисту моделировать такие нелинейные взаимосвязи, которые не имеют аналогов в эконометрии действительных переменных, или аналоги которых в области действительных переменных настолько сложны, что их практическое использование не имеет смысла. Таким образом, с использованием элементарных моделей комплексных переменных существенно расширяется инструментальная база эконометрических исследований. Свойства элементарных моделей функций комплексных переменных и комплексных аргументов таковы, что с их помощью можно описать самые разнообразные экономические процессы – интенсивные и экстенсивные, эффективные и стагнирующие.

---

[9] Светуньков С.Г. Методы маркетинговых исследований. – СПб.: Изд-во ДНК, 2002.

Для того, чтобы модели комплекснозначной экономики наполнить реальным содержанием, следует обратиться к эконометрике. Однако, поскольку в экономике модели комплексных переменных практически не используются, современная эконометрика нам в этой задаче не помощница, следует обратиться непосредственно к математической статистике.

Задачи обработки статистических данных случайной комплексной величины на практике встречаются редко – чаще всего в задачах распознавания некоторых сигналов. Поэтому решить задачу построения эконометрических моделей комплексной переменной, опираясь на выводы и результаты математической статистики, оказалось не просто.

Тем не менее, в математической статистике имеются некоторые наработки, касающиеся именно статистики случайной комплексной величины, которые следует использовать в той мере, в какой они пригодны для решения поставленной задачи. Судя по имеющейся в распоряжении научной литературе, интерес к статистической обработке наблюдений за изменением комплексной переменной возник в 50-60-х годах XX века[10]. Одной из первых отечественных работ в этом направлении была публикация ленинградского учёного А.Л.Рухина «Комплексный нормальный закон и допустимость среднего как оценки параметра сдвига»[11], в которой доказывалось, что средняя арифметическая комплексной переменной в случае её нормального распределения, является лучшей оценкой математического ожидания этого случайного процесса.

В дальнейшем были выяснены и некоторые другие свойства статистики случайной величины, но эти наработки скудны и не вооружают нас необходимым знанием для целей эконометрии комплексной переменной.

Прежде всего, приведём фундаментальное понятие статистики комплексной переменной – её математическое ожидание. Математическое ожидание комплексной случайной величины $z=x+iy$ называется комплексное число:

$$M(z) = M(x) + iM(y). \tag{3.1.1}$$

Поскольку любое комплексное число может быть представлено как пара действительных чисел, то в математической статистике считают, что комплексное представление случайных функций не более чем удобная для анализа математическая форма их отображения, которая всегда может быть переведена в форму вещественных функций. Именно поэтому функции дисперсии, корреляции и ковариации должны представлять собой однозначные и

[10] R. A. Wooding The multivariate distribution of complex normal variables. // Biometrika, 1956, vol. 43, pp. 212-215 ; W. Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II. New York: Wiley, 1966; N.R. Goodman. Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. // Ann. Math. Statist. , 1963, vol. 34, pp. 152-176; R. Arens. Complex processes for envelopes of normal noise. // IRE Trans. Inform. Theory, Sept. 1957, vol. IT-3, pp. 204-207; I.S. Reed. On a moment theorem for complex Gaussian processes. // IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-8 , Apr. 1962., pp. 194-195.

[11] РухинА.Л. Комплексный нормальный закон и допустимость среднего как оценки параметра сдвига. // Теория вероятностей и её применения. – 1967, том 12, вып.4, стр. 762-764.

неслучайные *вещественные* характеристики случайных процессов и функций, независимо от формы их математического представления.

Тогда, следуя принятому в математической статистике подходу, прежде всего, определим дисперсию комплексной случайной величины, как вещественное число. «Дисперсией комплексной случайной величины называется математическое ожидание квадрата модуля соответствующей центрированной величины»[12]:

$$D(z) = M[|\dot{z}|] = M[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] = M[\dot{x}^2] + M[\dot{y}^2], \tag{3.1.2}$$

где $$D(x) = M[\dot{x}^2] = M[(x - \overline{x})^2], \tag{3.1.3}$$

$$D(y) = M[\dot{y}^2] = M[(y - \overline{y})^2]. \tag{3.1.4}$$

Это означает, что дисперсия комплексной случайной величины равна сумме дисперсий её действительной и мнимой частей.

Важной характеристикой, используемой в математической статистике, является корреляционный момент. Поскольку по введённому выше определению корреляционный момент – *действительное* число, то математическое ожидание произведения двух случайных комплексных чисел:

$$M[(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)],$$

не может рассматриваться как корреляционный момент, поскольку произведение двух комплексных переменных будет комплексным числом.

К тому же в математической статистике действительных переменных корреляционный момент двух равных случайных величин равен дисперсии, а из приведённой формулы это не следует.

Поэтому было принято решение рассматривать корреляционный момент комплексной случайной величины как математическое ожидание произведения одной переменной на сопряжённую величину другой переменной:

$$\mu_{zz} = M[(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)]. \tag{3.1.5}$$

Выполняя перемножение и группируя слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} &\mu_{zz} = M[x_1x_2] + M[y_1y_2] + i(M[y_1x_2] - M[x_1y_2]) = \\ &\mu_{x_1x_2} + \mu_{y_1y_2} + i(\mu_{y_1x_2} - \mu_{x_1y_2}) \end{aligned}. \tag{3.1.6}$$

В том случае, когда $z_1 = z_2 = z$, последнее слагаемое (3.1.6) при мнимой единице становится равным нулю и корреляционный момент равен диспер-

[12] Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учебник. – М.: КНОРУС, 2010. - С. 460.

сии (3.1.2), чего и необходимо было добиться для полной аналогии со статистикой вещественных случайных переменных.

Далее в математической статистике вводят понятие комплексной случайной функции:

$$z = x(t) + iy(t)\,. \tag{3.1.7}$$

Для неё точно также вычисляют дисперсию:

$$D_z(t) = D_x(t) + D_y(t) \tag{3.1.8}$$

и корреляционную функцию:

$$\mu_z(t_1,t_2) = \mu_x(t_1,t_2) + \mu_y(t_1,t_2) + i(\mu_{xy}(t_1,t_2) - \mu_{xy}(t_2,t_1))\,. \tag{3.1.9}$$

Вот, пожалуй, и всё, что даёт математическая статистика экономисту, если он хочет использовать её аппарат для комплекснозначной эконометрики. Как следует из приведённых материалов, в ней вводится *правило,* в соответствии с которым все основные показатели, характеризующие случайный процесс, как то: дисперсия, корреляционный момент, ковариация и т.п., являются *вещественными* величинами.

3.2. Метод наименьших квадратов в эконометрии комплексных переменных

Как видно из материалов предыдущего параграфа, математическая статистика не отвечает на вопросы, ответы на которые формируют аппарат эконометрики, в нашем случае вопросы таковы – как определить наличие взаимосвязи между двумя случайными комплексными переменными и, выявив эту взаимосвязь, как подобрать нужную модель комплексных переменных и оценить на статистических данных её параметры?

Для эконометрии функций комплексной переменной, прежде всего, необходимо решить задачу оценивания коэффициентов комплекснозначных регрессионных моделей и степени взаимосвязи между комплексными переменными. Доступных работ, содержащих готовые результаты, обнаружить не удалось. Поэтому пришлось решать эту задачу самостоятельно[13]. Единственной научной публикацией, имеющей некоторое отношение к рассматриваемой задаче, является работа Tavares, G. N., Tavares [14], но в тот момент, когда

[13] Светуньков С.Г. Основы эконометрии комплексных переменных. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – 108 с.
[14] Tavares, G. N., Tavares, L. M. On the Statistics of the Sum of Squared Complex Gaussian Randm Variables. // IEEE Transactions on Communications, 55(10), 2007. – pp 1857-1862.

возникла насущная необходимость разработки аппарата регрессионного анализа применительно к оценке коэффициентов комплекснозначных моделей на статистических данных, эта статья была недоступна.

Поскольку аппарат корреляционного анализа частично опирается на методы регрессионного анализа, начнём рассмотрение положений эконометрии комплексных переменных с задач регрессионного анализа.

Наибольшее распространение в практике современной эконометрии получил метод наименьших квадратов (МНК), обладающий рядом замечательных свойств и в высшей степени стандартизированный.

Нет никаких оснований для случая эконометрии комплексных переменных предпочесть МНК какому-либо другому методу. Будем априорно предполагать, что в данной главе рассматриваются исключительно стационарные случайные процессы, имеющие нормальное распределение. Эти и другие предположения, которые обычно выдвигают при обосновании методов регрессионно-корреляционного анализа, будем считать по умолчанию заданными, и повторять их далее по тексту не будем.

Пусть, как и ранее, значения некоторой комплексной переменной обозначены так:

$$y_{rt} + iy_{it}. \qquad (3.2.1)$$

Причиной появления этого динамического ряда комплексных переменных является действие некоторого другого фактора, который может быть представлен комплексным аргументом:

$$x_{rt} + ix_{it}. \qquad (3.2.2)$$

Например, объём и цена приобретённого товара, объединённые в комплексную переменную (3.2.1), объясняются денежными доходами потребителя и накопленным доходом (имуществом), которые могут быть представлены в виде комплексной переменной (3.2.2). Подобных пар взаимосвязанных социально-экономических показателей можно привести довольно много.

Значения динамического ряда (3.2.1) необходимо аппроксимировать некоторой регрессионной моделью, в результате чего вычисляются расчетные значения этой комплексной переменной:

$$F(x_{rt} + ix_{it}) = \hat{y}_{rt} + i\hat{y}_{it}. \qquad (3.2.3)$$

Мерой приближения расчетных значений к фактическим является разность между ними:

$$(y_{rt} + iy_{it}) - (\hat{y}_{rt} + i\hat{y}_{it}) = \varepsilon_{rt} + i\varepsilon_{it}, \qquad (3.2.4)$$

которая может быть определена как комплексная ошибка аппроксимации. В зависимости от того, какие значения принимают коэффициенты модели, ошибка (3.2.4) также может быть различной. Понятно желание найти коэффициенты эконометрической модели так, чтобы ошибка (3.2.4) была в среднем минимальна. Причём это требование должно выполняться на всём множестве значений *t*. Но это общее желание необходимо облечь в строгую форму математического критерия. Сложность вызвана тем, что если в области действительных чисел два числа легко могут быть сравнены друг с другом и можно понять, какое число больше или меньше другого, то в области комплексных чисел такие действия невозможны.

Действительно – бессмысленно искать ответ на вопрос: какое число больше другого z_1 или z_2, если они, например, принимают такие значения:

$$z_1 = 2 + i3, \quad z_2 = 3 + i2$$

Сравнивать друг с другом можно только вещественные числа, то есть, можно сказать – у какого из этих чисел больше действительная часть или мнимая; можно сравнивать друг с другом модули комплексных переменных или их полярные углы, но сравнивать два комплексных числа друг с другом нельзя.

Поскольку комплексная ошибка аппроксимации (3.2.4) равна нулю только в том случае, когда фактическое и расчётное значения совпадают, то понятно, что в качестве меры точности эконометрической комплекснозначной модели должна быть близость к нулю именно комплексной ошибки аппроксимации. А близость к нулю означает на плоскости комплексных переменных близость к окрестностям нулевой точки.

Это означает, что критерий МНК для оценки коэффициентов эконометрической комплекснозначной модели означает требование минимизации расстояния до нулевой точки, или - минимума модуля комплексной ошибки аппроксимации. Легко показать, что это равносильно такой задаче:

$$\Phi = \sum_t (\varepsilon_{rt}^2 + \varepsilon_{it}^2) \to \min . \qquad (3.2.5)$$

То есть критерий МНК применительно к комплекснозначной модели означает поиск такой модели, дисперсия ошибки которой (3.1.8) будет минимальна.

Очевидно, что эта сумма определяется тем, какие значения принимают комплексные коэффициенты эконометрической модели. Пусть для определённости эконометрическая модель имеет пару комплексных коэффициентов, как это характерно для большинства аналитических функций, рассмотренных во второй главе монографии, то есть: $a_0 + ia_1$ и $b_0 + ib_1$. Тогда сумма (3.2.5) представляет собой функцию от этих параметров.

В общем случае критерий МНК для оценки этих коэффициентов комплекснозначной модели будет записан так:

$$\Phi(a_0, a_1, b_0, b_1) = \sum (y_{rt} - \mathrm{Re}[F(x_{rt} + ix_{it})])^2 + \sum (y_{it} - \mathrm{Im}\, F(x_{rt} + ix_{it})])^2 \to \min . \qquad (3.2.6)$$

Применительно к линейной комплекснозначной модели:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}) \qquad (3.2.7)$$

этот критерий примет вид:

$$\Phi(a_0, a_1, b_0, b_1) = \sum (y_{rt} - [a_0 + b_0 x_{rt} - b_1 x_{it}])^2 + \sum (y_{it} - [a_1 + b_1 x_{rt} + b_0 x_{it}])^2 \to \min . \qquad (3.2.8)$$

Для нахождения минимума такой функции вещественных переменных, необходимо вычислить первые частные производные функции по переменным, приравнять их нулю и решить полученную систему уравнений. Если Есть сомнения в том, что экстремум – действительно минимум функции, то необходимо построить матрицу Гессе и убедиться в том, что она положительно определена. Опуская трудоёмкие и громоздкие выкладки этой простой задачи, сразу же приведём систему нормальных уравнений для оценивания коэффициентов линейной комплекснозначной модели, если число наблюдений равно T:

$$\begin{cases} \sum y_{rt} = a_0 T + b_0 \sum x_{rt} - b_1 \sum x_{it}, \\ \sum y_{it} = a_1 T + b_1 \sum x_{rt} + b_0 \sum x_{it}, \\ \sum y_{rt} x_{rt} + \sum y_{it} x_{it} = a_0 \sum x_{rt} + b_0 (\sum x_{rt}^2 + \sum x_{it}^2) + a_1 \sum x_{it}, \\ \sum y_{it} x_{rt} - \sum y_{rt} x_{it} = -a_0 \sum x_{it} + b_1 (\sum x_{rt}^2 + \sum x_{it}^2) + a_1 \sum x_{rt}. \end{cases} \qquad (3.2.9)$$

Получили довольно громоздкую систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными. Поскольку современная вычислительная техника позволяет работать с комплексными переменными, в том же MS Excel есть раздел «инженерные расчёты», в котором можно выполнять основные действия с комплексными переменными, хотелось бы и систему нормальных уравнений (3.2.9) привести к системе комплексных уравнений. Тогда вычисления для практических целей были бы значительно проще. И это можно сделать.

Легко увидеть, что система (3.2.9) равносильна такой системе двух комплексных уравнений с двумя комплексными коэффициентами:

$$\begin{cases} \sum y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)T + (b_0 + ib_1) \sum (x_{rt} + ix_{it}), \\ \sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} - ix_{it}) = (a_0 + ia_1) \sum (x_{rt} - ix_{it}) + (b_0 + ib_1) \sum (x_{rt} + ix_{it})(x_{rt} - ix_{it}). \end{cases} \qquad (3.2.10)$$

Это – система двух линейных комплекснозначных уравнения с двумя комплексными коэффициентами, которая имеет простоё и не трудоёмкое решение. Но и его можно упростить, ведь для случая, когда все исходные переменные центрированы относительно их средних арифметических, свободный комплексный коэффициент равен нулю. В этом случае из (3.2.10) сразу же следует вывод формулы для нахождения комплексного коэффициента пропорциональности:

$$b_0 + ib_1 = \frac{\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} - ix_{it})}{\sum (x_{rt} + ix_{it})(x_{rt} - ix_{it})}. \qquad (3.2.11)$$

Покажем применимость МНК на условном примере, исходные данные которого приведены в табл. 3.1.

Табл.3.1

Данные условного примера

t	x_{rt}	x_{it}	y_{rt}	y_{it}
1	1,0	2	4,250	-5,100
2	1,2	3	4,832	-3,854
3	1,3	7	6,243	1,354
4	1,3	1	4,323	-6,506
5	1,2	2	4,512	-5,164
6	1,5	-2	3,625	-10,500
7	1,4	3	5,094	-3,918
8	1,6	1	4,716	-6,602
9	1,4	8	6,694	2,632
10	1,7	-3	3,567	-11,874
11	1,5	-3	3,305	-11,810
12	1,8	2	5,298	-5,356
Среднее	1,40	1,75	4,705	-5,558

Осуществив центрирование этих переменных относительно их средних арифметических, получим числитель (3.2.11): *171,373-i41,862* и его знаменатель: *130,819*. Подставляя эти значения в формулу для нахождения комплексного коэффициента, получим:

$$b_0 + ib_1 = \frac{171,373 - i41,862}{130,819} = 1,31 - 0,32i$$

Теперь легко вычислить и значения свободного комплексного члена линейной регрессионной зависимости, поскольку для оценок МНК линейных зависимостей всегда выполняется равенство относительно средних арифметических:

$$\overline{y}_r + i\overline{y}_i = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(\overline{x}_r + i\overline{x}_i).$$

Комплексный свободный коэффициент для этой модели, построенной по данным табл. 3.1, имеет вид:

$$a_0 + ia_1 = \bar{y}_r + i\bar{y}_i - (b_0 + ib_1)(\bar{x}_r + i\bar{x}_i) =$$
$$4,705 - i5,558 - (1,31 - i0,32)(1,4 + i1,75) = 2,3 - i7,4$$

Линейная комплекснозначная модель имеет вид:

$$y_{rt} + iy_{it} = (2,3 - i7,4) + (1,31 - i0,32)(x_{rt} + ix_{it})$$

Теперь её можно использовать для тех задач эконометрии, которые стоят перед экономистом.

3.3. Корреляционный анализ в эконометрии комплексных переменных

Говоря о расширении эконометрии за счёт включения в её багаж функций комплексных переменных, мы должны дополнить его и всеми иными атрибутами эконометрии - не только регрессионного, но и корреляционного анализа.

Следует напомнить, что в математической статистике под корреляционным анализом понимается совокупность подходов, методов и методик, нацеленная на выявление степени и характеристики взаимосвязи между двумя случайными факторами. Если эта совокупность предназначена для изучения множественной взаимосвязи, то говорят о множественной корреляции.

Рассмотрим возможность трансформации и адаптации основных положений корреляционного анализа применительно к эконометрии комплексных переменных. Как показал анализ литературы по применению теории функции комплексных переменных в различных областях науки, эту проблему учёные в полном объёме не ставили и не решали.

Дело в том, что для решения задач гидродинамики или газовой динамики, теории кумулятивного заряда, теории упругости, при расчёте электрических контуров и других прикладных расчётов, где успешно применяется теория функций комплексных переменных, действительная и мнимая части комплексных переменных имеют чёткие смысловые интерпретации, а используемые модели являются детерминированными. Например, если в электротехнике изучаются переменные токи, то активное сопротивление R относят к действительной части, а реактивное сопротивление, например, катушки L, относят к мнимой части полного сопротивления. Тогда модель полного сопротивления Z для этих двух элементов, соединённых последовательно, будет иметь вид:

$$Z = R + iL\,. \tag{3.3.1}$$

Величины активного и реактивного сопротивления легко измеряются соответствующими приборами, разве что может возникнуть некоторая погрешность измерений. И нет необходимости выявлять степень корреляционной зависимости между комплексным сопротивлением и потребляемой комплексной мощностью, поскольку эта зависимость однозначно определяется объективно существующим законом Кирхгофа. И если комплексные сопротивления подсоединены к сложной сети, то характеристики сети считаются в зависимости от того, как в ней соединены элементы – последовательно или параллельно. Модель самого сложного электрического контура является детерминированной, поскольку в ней определены все элементы и характеристики - сопротивления, токи, напряжения, мощности и т.д. Только при переходе к большим системам, когда на них воздействует множество случайных факторов, расчётные характеристики, вытекающие из свойств математической модели электрического контура, наблюдаются с некоторой погрешностью. Но задачей корреляционного анализа в этих случаях является определение наличия взаимосвязи между погрешностями расчётных характеристик электрических цепей и случайными внешними факторами. В этом случае ни о каких корреляциях между комплексными переменными, активным и реактивным током, например, речь не идёт и не может идти.

Другое дело экономика, где детерминированных функциональных взаимосвязей практически нет; где даже выявленные взаимосвязи с течением времени меняют свою силу и характеристики, а иногда даже – направление взаимосвязи; законы, которые выявлены в экономике, не облечены в количественную форму; модели, описывающие их, не являются универсальными и не учитывают реальное множество существующих в экономике факторов. Выявление таких взаимосвязей в какой-то определённый промежуток времени, чаще всего не означает выявление некоторого закона – через некоторое время выявленная закономерность изменит свою силу и вместо, например, чётко выявляемой линейной зависимости приходится теперь сталкиваться с нелинейной. Это служит причиной того, что возникает объективная необходимость периодического пересмотра проведённого ранее исследования взаимосвязи между одними и теми же экономическими показателями. В этой ситуации регрессионно-корреляционный анализ выступает чуть ли не единственным инструментом исследования реальных экономических объектов и взаимосвязей между ними, поскольку в изменчивой экономике нет и не может быть «застывших» взаимосвязей. Результаты регрессионно-корреляционного анализа периодически пересматриваются, поскольку однажды выявленные взаимосвязи могут измениться и меняются.

Поэтому, расширяя инструментальную базу эконометрии посредством включения в неё моделей комплексных переменных, и предложив соответствующий математический аппарат для оценки параметров эконометрических моделей комплексных переменных, мы вынуждены озаботиться и задачей выявления взаимосвязи между случайными комплексными переменными. Опираясь на принципы и подходы корреляционного анализа, необходимо вывести такие коэффициенты применительно к комплексным переменным, которые бы характеризовали взаимосвязь между комплексными факторами.

Следует сразу же оговориться, что современный корреляционный анализ не решает эту задачу в полном объёме даже применительно к случайным действительным переменным. Наиболее распространённым в этом разделе математической статистики является коэффициент парной корреляции, который свидетельствует о том, насколько взаимосвязь между двумя случайными величинами приближается к линейной, если, конечно, эта взаимосвязь существует. Исследователь должен выдвинуть и обосновать гипотезу о наличии линейной взаимосвязи между факторами, а затем с помощью коэффициента парной корреляции подтвердить или опровергнуть эту гипотезу. Поэтому и предлагаемые коэффициенты корреляции между комплексными переменными могут служить лишь в качестве дополнительного аргумента, подтверждающего (или опровергающего) наличие линейной взаимосвязи между комплексными переменными.

Методов и методик применения регрессионно-корреляционного анализа к комплексным переменным найти не удалось, хотя общие подходы в этом направлении имеются и часть из них была изложена в первом параграфе данной главы. Там было показано, что дисперсия комплексной случайной величины равна сумме дисперсий её действительной и мнимой частей, а корреляционным моментом двух комплексных случайных величин (ковариацией) называют математическое ожидание произведения отклонения одной из величин от её математического ожидания на сопряжённое отклонение другой.

Корреляционный момент, на вычисления которого мы должны будем опираться, был в первом параграфе записан в таком виде (3.1.5):

$$\mu_{zz} = M[(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)].$$

Или:

$$\mu_{zz} = \mu_{x_1x_2} + \mu_{y_1y_2} + i(\mu_{y_1x_2} - \mu_{x_1y_2}). \qquad (3.3.2)$$

Для дискретного случая, с которым и приходится иметь дело в эконометрике:

$$\mu_{zz} = \frac{1}{n}\left[\sum_t (y_{rt} - \overline{y_r})(y_{it} - \overline{y_i}) + \sum_t (x_{rt} - \overline{x_r})(x_{it} - \overline{x_i}) + i(\sum_t (x_{rt} - \overline{x_r})(y_{it} - \overline{y_i}) - \sum_t (y_{rt} - \overline{y_r})(x_{it} - \overline{x_i})\right]. \qquad (3.3.3)$$

Известно, что коэффициент парной корреляции для действительных переменных можно найти с помощью корреляционного момента следующим образом:

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{3.3.4}$$

Можно воспользоваться этой формулой и для случая комплексных случайных величин, для чего в числитель формулы следует подставить корреляционный момент двух случайных величин (3.3.3), но предварительно необходимо определить формулы вычисления знаменателя (3.3.4). Поскольку дисперсия комплексной случайной величины равна сумме дисперсий её действительной и мнимой частей, получим:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_t (x_{rt} - \overline{x_r})^2 + \sum_t (x_{it} - \overline{x_i})^2\right), \tag{3.3.5}$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_t (y_{rt} - \overline{y_r})^2 + \sum_t (y_{it} - \overline{y_i})^2\right). \tag{3.3.6}$$

Подставляя эти значения в знаменатель (3.3.4), понимая, что среднее квадратичное отклонение представляет собой квадратный корень из дисперсии, получим формулу для расчёта выборочного значения коэффициента корреляции двух комплексных случайных величин:

$$r_{XY} = \frac{\sum_t (y_{rt} - \overline{y_r})(y_{it} - \overline{y_i}) + \sum_t (x_{rt} - \overline{x_r})(x_{it} - \overline{x_i}) + i\left(\sum_t (x_{rt} - \overline{x_r})(y_{it} - \overline{y_i}) - \sum_t (y_{rt} - \overline{y_r})(x_{it} - \overline{x_i})\right)}{\sqrt{\left[\sum_t (x_{rt} - \overline{x_r})^2 + \sum_t (x_{it} - \overline{x_i})^2\right]\left[\sum_t (y_{rt} - \overline{y_r})^2 + \sum_t (y_{it} - \overline{y_i})^2\right]}}. \tag{3.3.7}$$

Как видно, полученный коэффициент является комплексным числом, поскольку его мнимая составляющая будет равна нулю только для определённых случаев довольно узкого круга явлений, а не для всех возможных.

Поскольку все переменные, используемые в вычислении коэффициента парной корреляции (3.3.7) представляют собой центрированные относительно средних арифметических значения, будем использовать упрощённую форму записи, понимая, что все переменные предварительно центрированы. Тогда формула (3.3.7) может быть представлена в таком виде:

$$r_{XY} = \frac{\sum_t (y_{rt} y_{it} + x_{rt} x_{it}) + i\left(\sum_t (x_{rt} y_{it} - y_{rt} x_{it})\right)}{\sqrt{\sum_t (x_{rt}^2 + x_{it}^2) \sum_t (y_{rt}^2 + y_{it}^2)}}. \tag{3.3.8}$$

Не будем в данном месте изучать свойства выведенного коэффициента парной корреляции, а обратим внимание на суть полученного коэффициента – он является *комплексным*!

3.4. Альтернативное направление эконометрии комплексных переменных

Из материалов предыдущего параграфа со всей очевидностью следует, что правило, которое введено в математической статистике относительно комплексных переменных, не выполняется в полном объёме. Как показано в первом параграфе этой главы - в математической статистике считают, что комплексное представление случайных функций не более чем удобная для анализа математическая форма их представления, которая всегда может быть переведена в форму вещественных функций. Именно поэтому функции дисперсии, корреляции и ковариации должны представлять собой однозначные и неслучайные *вещественные* характеристики случайных процессов и функций, независимо от формы их математического представления. Коэффициент парной корреляции, который, исходя из этой логики, должен был быть вещественным числом, при его определении через корреляционные моменты и дисперсии оказался числом комплексным (3.3.7). Тогда возникает вполне очевидный вопрос: а стоит ли при вычислении корреляционного момента использовать процедуру умножения на сопряжённое число? Действительно, выражение

$$\mu_{zz} = M[(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)] \qquad (3.4.1)$$

по форме не совпадает с формой корреляционного момента, а поставленный результат, который ожидается с помощью применения такого подхода, не достигается.

Тогда зачем вводить в процесс статистической обработки данных наблюдений за двумя (и более) комплексными рядами ограничения, сужающие рамки действий с комплексными переменными? В области действительных чисел нет операции извлечения квадратного корня из отрицательного числа - именно эта операция и породила ТФКП как раздел математики. Так зачем же при операциях с комплексными переменными «оглядываться» на правила, принятые в области действительных переменных? Почему нельзя рассматривать комплексную дисперсию, комплексный корреляционный момент и т.п.? Только потому, что та же дисперсия выступает некой мерой колеблемости, а смысл меры в полной мере проявляется, когда она представлена как вещественное число? Но для сложного ряда, которым является ряд комплексной переменной, адекватной мерой его колеблемости является не простая, а сложная мера, в данном случае – комплексная.

При такой постановке задачи, выводы и рекомендации двух предыдущих параграфов должны быть подвергнуты серьёзной проверке с помощью сравнительного анализа другого подхода, суть которого не ограничивается искусственно, в частности, корреляционный момент рассматривается не так, как это принято в математической статистике, а так, как это следует из сути корреляционного момента:

$$\mu_{zz} = M[(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)]. \tag{3.4.2}$$

Очевидно, что при такой постановке задачи будут получены другие результаты. Именно их и следует сравнить с полученными выше для того, чтобы принять окончательное решение о том, какой из подходов наилучшим образом отвечает задачам эконометрии комплексных переменных.

Прежде всего, переопределим основное понятие, которое будем использовать в дальнейшем, а именно – понятие дисперсии. Определим дисперсию комплексной случайной величины, как комплексное же число. Для того, чтобы отличать вводимое понятие от общепринятого, будем добавлять слово «комплексный» в этом и во всех остальных случаях. Итак, *комплексной дисперсией* комплексной случайной величины называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины:

$$D(z) = M[\dot{z}^2] = M[\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + i2\dot{x}\dot{y}] = M[\dot{x}^2] - M[\dot{y}^2] + 2iM[\dot{x}\dot{y}], \tag{3.4.3}$$

где $$D(x) = M[\dot{x}^2] = M[(x - \overline{x})^2], \tag{3.4.4}$$

$$D(y) = M[\dot{y}^2] = M[(y - \overline{y})^2]. \tag{3.4.5}$$

Это означает, что комплексная дисперсия может быть и действительной отрицательной величиной, а может быть и исключительно мнимой. Поскольку в геометрии Минковского расстояния могут быть отрицательными или даже мнимыми, то в полученном результате нет ничего сверхъестественного – для комплексных переменных, если их рассматривать в полном объёме, так и должно быть.

Очевидно, что и комплексный корреляционный момент (3.4.2) примет другой вид:

$$\begin{aligned}&\mu_{zz} = M[x_1x_2] - M[y_1y_2] + i(M[y_1x_2] + M[x_1y_2]) = \\ &\mu_{x_1x_2} - \mu_{y_1y_2} + i(\mu_{y_1x_2} + \mu_{x_1y_2})\end{aligned}. \tag{3.4.6}$$

Опять же видно, что комплексный корреляционный момент может быть и отрицательным, и мнимым, и комплексным.

Не будем давать здесь интерпретацию таким значениям дисперсии и корреляционного момента. Нас интересуют вопросы прикладного характера: как с помощью этих основоположных понятий решить задачу оценивания коэффициентов эконометрических комплекснозначных моделей, и какой вид должен иметь комплексный коэффициент парной корреляции?

Найдём ответы на эти вопросы.

3.5. Альтернативный МНК комплекснозначной эконометрики

В регрессионном анализе задача оценивания коэффициентов регрессионных моделей рассматривается применительно к простым линейным однофакторным моделям, после чего, усложняют задачу, переходя к нелинейным функциям. Поэтому и в случае эконометрии комплексных переменных начнём решение задачи для простой линейной модели комплексных переменных. Эта модель, чьи параметры необходимо оценить с помощью МНК, имеет вид:

$$y_{rt}+iy_{it}=(a_0+ia_1)+(b_0+ib_1)(x_{rt}+ix_{it}). \qquad (3.5.1)$$

Комплексная дисперсия этой модели будет иметь такой вид:

$$f(z)=\sum_t\left[y_{rt}+iy_{it}-(a_0+ia_1)-(b_0+ib_1)(x_{rt}+ix_{it})\right]^2=$$
$$\sum_t\left[Y_t-A-BX_t\right]^2=\sum_t(Y_t^2+A^2+B^2X_t^2-2AY_t-2BY_tX_t+2ABX_t)). \qquad (3.5.2)$$

Рассмотрим каждое из слагаемых правой части последнего равенства по отдельности с учётом свойств комплексных чисел.

$$\sum_t Y_t^2=\sum_t(y_{rt}+iy_{it})^2=\sum_t y_{rt}^2-\sum_t y_{it}^2+i2\sum_t y_{rt}y_{it}, \qquad (3.5.3)$$

$$\sum_t A^2=\sum_t(a_0+ia_1)^2=\sum_t a_0^2-\sum_t a_1^2+i2\sum_t a_0a_1, \qquad (3.5.4)$$

$$\sum_t B^2X_t^2=\sum_t(b_0+ib_1)^2(x_{rt}+ix_{it})^2=\sum_t(b_o^2-b_1^2+i2b_0b_1)(x_{rt}^2-x_{it}^2+i2x_{rt}x_{it})=$$
$$b_0^2\sum_t x_{rt}^2-b_1^2\sum_t x_{rt}^2-b_0^2\sum_t x_{it}^2+b_1^2\sum_t x_{it}^2-4b_0b_1\sum_t x_{rt}x_{it}+ \qquad (3.5.5)$$
$$i2\left[b_0b_1\sum_t x_{rt}^2-b_0b_1\sum_t x_{it}^2+b_0^2\sum_t x_{rt}x_{it}-b_1^2\sum_t x_{rt}x_{it}\right],$$

$$-2\sum_t AY_t = -2\sum_t (a_0 + ia_1)(y_{rt} + iy_{it}) =$$

$$-2a_0\sum_t y_{rt} + 2a_1\sum_t y_{it} + i\left[-2a_1\sum_t y_{rt} - 2a_0\sum_t y_{it}\right], \qquad (3.5.6)$$

$$-2\sum_t BY_t X_t = -2\sum_t (b_0 + ib_1)(y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it}) =$$

$$-2b_0\sum_t x_{rt}y_{rt} + 2b_1\sum_t x_{rt}y_{it} + 2b_0\sum_t x_{it}y_{it} + 2b_1\sum_t x_{it}y_{rt} +$$

$$i\left[-2b_0\sum_t x_{rt}y_{it} - 2b_1\sum_t x_{rt}y_{rt} - 2b_0\sum_t x_{it}y_{rt} + 2b_1\sum_t x_{it}y_{it}\right], \qquad (3.5.7)$$

$$2\sum_t ABX_t = 2\sum_t (a_0 + ia_1)(b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}) =$$

$$2a_0b_0\sum_t x_{rt} - 2a_1b_1\sum_t x_{rt} - 2a_1b_0\sum_t x_{it} - 2a_0b_1\sum_t x_{it} +$$

$$i\left[2a_1b_0\sum_t x_{rt} + 2a_0b_1\sum_t x_{rt} + 2a_0b_0\sum_t x_{it} - 2a_1b_1\sum_t x_{it}\right]. \qquad (3.5.8)$$

Подставляя в комплексную дисперсию (3.5.2) различные значения коэффициентов комплекснозначной модели, будут получены разные значения комплексных дисперсий. Поскольку комплексные числа сравнивать друг с другом нельзя, то нельзя и предложить выбрать такую комбинацию коэффициентов, при которой, например, комплексная дисперсия минимальна. Понятия минимума комплекснозначной функции не существует, а значит, не существует и понятия минимума комплексной дисперсии.

Можно найти минимум действительной части комплексной дисперсии. Можно найти минимум мнимой части комплексной дисперсии. А вот найти минимум комплексной дисперсии нельзя. Таким образом, перед нами стоит задача выбора одного из двух критериев, и задачу в целом на первый взгляд решить невозможно. Но на самом деле ситуация значительно проще, поскольку мы имеем дело с комплекснозначной функцией зависимости комплексной дисперсии от значений комплексных коэффициентов.

Не забегая вперёд, посмотрим вначале, к чему приведёт применение первого критерия – минимума действительной части комплексной дисперсии. Для этого надо вычислить первую производную действительной части комплексной дисперсии (3.5.2) и приравнять её нулю.

Вычислим первые производные этой части по каждому из коэффициентов a_0, a_1, b_0, b_1. Воспользовавшись формулами Римана-Коши, легко вычислить частные производные по a_0, затем по a_1, b_0 и b_1:

$$\frac{\partial \mathrm{Re}(f(z))}{\partial a_0} = 2(a_0 n - \sum_t y_{rt} + b_0\sum_t x_{rt} - b_1\sum_t x_{it})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z))}{\partial a_1} = 2(-a_1 n + \sum_t y_{it} - b_1 \sum_t x_{rt} - b_0 \sum_t x_{it})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z))}{\partial b_0} = 2(b_0 \sum_t x_{rt}^2 - b_0 \sum_t x_{it}^2 - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} - \sum_t x_{rt} y_{rt} + \sum_t x_{it} y_{it} + a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z))}{\partial b_1} = 2(-b_1 \sum_t x_{rt}^2 + b_1 \sum_t x_{it}^2 - 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} + \sum_t x_{rt} y_{it} + \sum_t x_{it} y_{rt} - a_0 \sum_t x_{it} - a_1 \sum_t x_{rt})$$

Здесь n – количество наблюдений, $t=1,2,3,\ldots,n$. Приравнивая нулю каждую из частных производных, и группируя, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_t y_{rt} = na_0 + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it} \\ \sum_t y_{it} = na_1 + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it} \\ \sum_t x_{rt} y_{rt} - \sum_t x_{it} y_{it} = a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it} + b_0 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} \\ \sum_t x_{rt} y_{it} + \sum_t x_{it} y_{rt} = a_0 \sum_t x_{it} + a_1 \sum_t x_{rt} + b_1 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} \end{cases}. \qquad (3.5.9)$$

Эту систему легко решить, поскольку перед нами четыре уравнения с четырьмя неизвестными.

Теперь зададимся другим критерием – будем минимизировать мнимую часть комплексной дисперсии, как комплекснозначной функции от комплексных коэффициентов. Получим четыре уравнения, соответствующие четырём частным производным:

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f(z))}{\partial a_0} = 2(a_1 n - \sum_t y_{it} + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f(z))}{\partial a_1} = 2(a_0 n - \sum_t y_{rt} + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f(z))}{\partial b_0} = 2(b_1 \sum_t x_{rt}^2 - b_1 \sum_t x_{it}^2 + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} - \sum_t x_{rt} y_{it} - \sum_t x_{it} y_{rt} + a_1 \sum_t x_{rt} + a_0 \sum_t x_{it})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f(z))}{\partial b_1} = 2(b_0 \sum_t x_{rt}^2 - b_0 \sum_t x_{it}^2 - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} - \sum_t x_{rt} y_{rt} + \sum_t x_{it} y_{it} + a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it})$$

Приравнивая эти частные производные нулю и группируя, получим:

$$\begin{cases} \sum_t y_{it} = na_1 + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it} \\ \sum_t y_{rt} = na_0 + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it} \\ \sum_t x_{rt} y_{it} + \sum_t x_{it} y_{rt} = a_0 \sum_t x_{it} + a_1 \sum_t x_{rt} + b_1 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} \\ \sum_t x_{rt} y_{rt} - \sum_t x_{it} y_{it} = a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it} + b_0 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} \end{cases}. \qquad (3.5.10)$$

Легко убедиться в том, что перед нами та же самая система, что и (3.5.9), только последовательность уравнений изменилась в соответствии с порядком вычисления первых производных по мнимой части комплексно-значной функции дисперсии (3.5.2).

Оказывается, что любой из критериев даёт нам одинаковый результат. Впрочем, как раз именно этот вывод и следует из правила Римана-Коши (в некоторых работах по ТФКП они называются правилами Даламбера-Эйлера). Напрямую из формы комплексной дисперсии этот вывод не следует.

Поскольку и в первом, и во втором случаях мы использовали критерий минимизации суммы квадратов отклонений, то полученный результат можно назвать комплексным методом наименьших квадратов.

По аналогии с (3.2.10) приведём полученную систему уравнений к виду, удобному для практического применения в тех программных продуктах, в которых возможны непосредственные действия с комплексными переменными.

Легко увидеть, что система (3.2.9) равносильна такой системе двух комплексных уравнений с двумя комплексными коэффициентами:

$$\begin{cases} \sum (y_{rt} + iy_{it}) = (a_0 + ia_1)n + (b_0 + ib_1)\sum (x_{rt} + ix_{it}), \\ \sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it}) = (a_0 + ia_1)\sum (x_{rt} + ix_{it}) + (b_0 + ib_1)\sum (x_{rt} + ix_{it})(x_{rt} + ix_{it}). \end{cases}$$

Если теперь сравнить полученную систему с аналогичного вида системой, полученной в параграфе 3.2, то легко убедиться в их различии – во втором уравнении полученной системы нет умножения на сопряжённую переменную, как это получается в стандартном подходе:

$$\begin{cases} \sum (y_{rt} + iy_{it}) = (a_0 + ia_1)n + (b_0 + ib_1)\sum (x_{rt} + ix_{it}), \\ \sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} - ix_{it}) = (a_0 + ia_1)\sum (x_{rt} - ix_{it}) + (b_0 + ib_1)\sum (x_{rt} + ix_{it})(x_{rt} - ix_{it}). \end{cases}$$

Поскольку использование комплексных переменных даёт исследователю более многообразные варианты моделирования, чем модели действительных переменных, только моделью (3.5.1) семейство линейных комплексно-значных моделей не ограничивается. Возможны варианты, когда вместо комплексного коэффициента используется только действительный коэффициент или только мнимый коэффициент, а возможно, что вместо комплексного аргумента используется действительный аргумент или наоборот – модель комплексного аргумента описывает поведение действительной переменной. Покажем, как с помощью данного подхода реализовать комплексный МНК для модели комплексного аргумента:

$$y_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}). \qquad (3.5.11)$$

Комплекснозначная функция, минимум которой соответствует оценкам МНК коэффициентов линейной модели комплексного аргумента, запишется так:

$$f(z) = \sum_t \left[y_t - (a_0 + ia_1) - (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}) \right]^2 =$$
$$\sum_t \left[y_t - A - BX_t \right]^2 = \sum_t (y_t^2 + A^2 + B^2 X_t^2 - 2Ay_t - 2By_t X_t + 2ABX_t))\,.$$

Рассмотрим каждое из слагаемых правой части последнего равенства по отдельности за исключением квадрата действительной переменной y_t^2, поскольку это слагаемое уже приведено к виду, удобному для вычисления производных:

$$\sum_t A^2 = \sum_t (a_0 + ia_1)^2 = \sum_t a_0^2 - \sum_t a_1^2 + i2\sum_t a_0 a_1\,, \qquad (3.5.12)$$

$$\sum_t B^2 X_t^2 = \sum_t (b_0 + ib_1)^2 (x_{rt} + ix_{it})^2 = \sum_t (b_o^2 - b_1^2 + i2b_0 b_1)(x_{rt}^2 - x_{it}^2 + i2x_{rt}x_{it}) =$$
$$b_0^2 \sum_t x_{rt}^2 - b_1^2 \sum_t x_{rt}^2 - b_0^2 \sum_t x_{it}^2 + b_1^2 \sum_t x_{it}^2 - 4b_0 b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} + \qquad (3.5.13)$$
$$i2\left[b_0 b_1 \sum_t x_{rt}^2 - b_0 b_1 \sum_t x_{it}^2 + b_0^2 \sum_t x_{rt} x_{it} - b_1^2 \sum_t x_{rt} x_{it} \right],$$

$$-2\sum_t Ay_t = -2\sum_t a_0 y_t - 2ia_1 \sum_t y_t)\,, \qquad (3.5.14)$$

$$-2\sum_t By_t X_t = -2\sum_t (b_0 + ib_1) y_t (x_{rt} + ix_{it}) =$$
$$-2b_0 \sum_t x_{rt} y_t + 2b_1 \sum_t x_{it} y_t + i\left[-2b_1 \sum_t x_{rt} y_t - 2b_0 \sum_t x_{it} y_t \right], \qquad (3.5.15)$$

$$2\sum_t ABX_t = 2\sum_t (a_0 + ia_1)(b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}) =$$
$$2a_0 b_0 \sum_t x_{rt} - 2a_1 b_1 \sum_t x_{rt} - 2a_1 b_0 \sum_t x_{it} - 2a_0 b_1 \sum_t x_{it} +$$
$$i\left[2a_1 b_0 \sum_t x_{rt} + 2a_0 b_1 \sum_t x_{rt} + 2a_0 b_0 \sum_t x_{it} - 2a_1 b_1 \sum_t x_{it} \right]. \qquad (3.5.16)$$

Вычислим с помощью полученных составляющих первые частные производные действительной части комплекснозначной функции (3.5.11) по каждому из коэффициентов a_0, a_1, b_0, b_1. Получим четыре уравнения, соответствующие четырём частным производным и четырём переменным рассматриваемой задачи:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z))}{\partial a_0} = 2(a_0 n - \sum_t y_t + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it})$$
$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z))}{\partial a_1} = 2(-a_1 n - b_1 \sum_t x_{rt} - b_0 \sum_t x_{it})$$
$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z))}{\partial b_0} = 2(b_0 \sum_t x_{rt}^2 - b_0 \sum_t x_{it}^2 - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} - \sum_t x_{rt} y_t + a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it})$$
$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z))}{\partial b_1} = 2(-b_1 \sum_t x_{rt}^2 + b_1 \sum_t x_{it}^2 - 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} + \sum_t x_{it} y_t - a_0 \sum_t x_{it} - a_1 \sum_t x_{rt})$$

Приравнивая нулю каждую из производных и группируя, получим:

$$\begin{cases} \sum_t y_t = n a_0 + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it} \\ 0 = n a_1 + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it} \\ \sum_t x_{it} y_t = a_0 \sum_t x_{it} + a_1 \sum_t x_{rt} + b_1 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} \\ \sum_t x_{rt} y_t = a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it} + b_0 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} \end{cases}. \qquad (3.5.17)$$

Аналогичные равенства можно получить, находя частные производные мнимой части комплекснозначной функции (3.5.16), и приравнивая их нулю и другими вариантами, которые вытекают из условия Даламбера-Эйлера.

Если теперь сравнить систему (3.5.17) с системой (3.5.9), то можно убедиться в том, что система (3.5.17) легко получается из (3.5.9), если в последнюю подставить:

$$y_{it} = 0.$$

В целом ряде случаев вместо линейной модели (3.5.10) может использоваться её более простой аналог - линейная модель комплексного аргумента без свободного члена:

$$y_t = (b_0 + i b_1)(x_{rt} + i x_{it}). \qquad (3.5.18)$$

Комплекснозначная функция МНК применительно к этому случаю будет иметь вид:

$$f(z) = \sum_t \left[y_t - (b_0 + i b_1)(x_{rt} + i x_{it}) \right]^2 = \sum_t (y_t^2 - 2B y_t X_t + B^2 X_t^2). \qquad (3.5.19)$$

Воспользовавшись (3.5.13) и (3.5.15), найдём частные производные действительной части этой функции по каждому из коэффициентов:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z))}{\partial b_0} = 2(b_0\sum_t x_{rt}^2 - b_0\sum_t x_{it}^2 - 2b_1\sum_t x_{rt}x_{it} - \sum_t x_{rt}y_t),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z))}{\partial b_1} = 2(-b_1\sum_t x_{rt}^2 + b_1\sum_t x_{it}^2 - 2b_0\sum_t x_{rt}x_{it} + \sum_t x_{it}y_t).$$

Откуда система МНК будет записана в таком виде:

$$\begin{cases} \sum_t x_{rt}y_t = b_0\sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1\sum_t x_{rt}x_{it} \\ \sum_t x_{it}y_t = b_1\sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0\sum_t x_{rt}x_{it} \end{cases}. \quad (3.5.21)$$

Сравнивая эту систему нормальных уравнений с системой (3.5.9), можно убедиться в том, что (3.5.21) можно получить и не прибегая к вычислению производных, а просто приравнивая нулю отсутствующие в (3.5.18) составляющие.

Покажем теперь на взаимосвязь между задачей МНК для действительных переменных и комплексных переменных Как известно, для простой линейной однофакторной модели действительных переменных:

$$y = a + bx,$$

система нормальных уравнений МНК имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_t y_t = an + b\sum_t x_t, \\ \sum_t y_t x_t = a\sum_t x_t + b\sum_t x_t^2 \end{cases}. \quad (3.5.22)$$

Если теперь в эту систему нормальных уравнений подставить вместо действительных переменных и коэффициентов комплексные переменные и комплексные коэффициенты, то для линейной однофакторной комплексно-значной функции будет получена та же самая система нормальных уравнений (3.5.9), что и ранее. Действительно, первое уравнение системы (3.5.22) при подстановке в него комплексных переменных и комплексных коэффициентов примет вид:

$$\sum_t y_{rt} + i\sum_t y_{it} = na_0 + b_0\sum_t x_{rt} - b_1\sum_t x_{it} + i(na_1 + b_1\sum_t x_{rt} + b_0\sum_t x_{it}).$$

Откуда, разделяя действительную и мнимую части равенства, получим первую часть системы МНК (3.5.9):

$$\begin{cases}\sum_t y_{rt} = na_0 + b_0\sum_t x_{rt} - b_1\sum_t x_{it} \\ \sum_t y_{it} = na_1 + b_1\sum_t x_{rt} + b_0\sum_t x_{it}\end{cases}. \qquad (3.5.23)$$

Второе уравнение системы (3.5.22) при подстановке в него комплексных переменных и комплексных коэффициентов будет представлена в виде более сложного уравнения, поэтому разобьём её по отдельным составляющим. Левая часть равенства будет выглядеть после подстановки так:

$$\sum_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it}) = \sum_t y_{rt}x_{rt} - \sum_t y_{it}x_{it} + i(\sum_t y_{it}x_{rt} + \sum_t y_{rt}x_{ir}).$$

Первое слагаемое правой части второго уравнения (3.5.22) будет иметь такой вид:

$$a_0\sum_t x_{rt} - a_1\sum_t x_{ir} + i(a_1\sum_t x_{rt} + a_0\sum_t x_{it})$$, а второе –

$$b_0(\sum_t x_{rt}^2 - \sum_t x_{it}^2) - 2b_1\sum_t x_{rt}x_{it} + i(b_1(\sum_t x_{rt}^2 - \sum_t x_{it}^2) + 2b_0\sum_t x_{rt}x_{it}).$$

Группируя в одно равенство действительные составляющие, а в другое равенство мнимые составляющие, получим ещё два уравнения:

$$\begin{cases}\sum_t x_{rt}y_{rt} - \sum_t x_{it}y_{it} = a_0\sum_t x_{rt} - a_1\sum_t x_{it} + b_0\sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1\sum_t x_{rt}x_{it} \\ \sum_t x_{rt}y_{it} + \sum_t x_{it}y_{rt} = a_0\sum_t x_{it} + a_1\sum_t x_{rt} + b_1\sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0\sum_t x_{rt}x_{it}\end{cases}. \qquad (3.5.24)$$

Сведя систему уравнений (3.5.23) и (3.5.24) в единую систему, легко убедиться в том, что получена система нормальных уравнений МНК для линейной функции комплексных переменных (3.5.9).

Прямые параллели между методом, предлагаемым в этом параграфе и МНК, применимым к моделям действительных переменных, является одним из аргументов, свидетельствующих в пользу рассматриваемого метода, а не того, который следует из стандартной постановки задачи, принятой в математической статистике.

Поскольку решение системы из четырёх уравнений с четырьмя переменными – не самая приятная задача, процедуру оценки коэффициентов линейной комплекснозначной функции(3.5.1) с помощью МНК можно и нужно упростить.

Для этого, осуществив предварительное центрирование исходных переменных задачи относительно их средних арифметических:

$$y_r' = y_r - \bar{y}_r;\ y_i' = y_i - \bar{y}_i;\ x_r' = x_r - \bar{x}_i;\ x_i' = x_i - \bar{x}_i,$$

приведём модель (3.5.1) к более простому виду:

$$y'_{rt} + iy'_{it} = (b_0 + ib_1)(x'_{rt} + ix'_{it}), \tag{3.5.25}$$

для нахождения коэффициентов которой достаточно решить такую систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \sum y'_{rt}x'_{rt} - \sum y'_{it}x'_{it} = b_0 \sum (x'^2_{rt} - x'^2_{it}) - 2b_1 \sum x'_{rt}x'_{it} \\ \sum y'_{it}x'_{rt} + \sum y'_{rt}x'_{it} = b_1 \sum (x'^2_{rt} - x'^2_{it}) + 2b_0 \sum x'_{rt}x'_{it} \end{cases}. \tag{3.5.26}$$

Или для непосредственно работы с комплексными переменными:

$$b_0 + ib_1 = \frac{\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sum (x_{rt} + ix_{it})(x_{rt} + ix_{it})}. \tag{3.5.27}$$

Покажем применимость МНК на условном примере, исходные данные которого приведены в табл. 3.1. Числитель вышеприведённой дроби для нахождения комплексного коэффициента пропорциональности равен $-163{,}905 + i31{,}048$, а знаменатель равен $-129{,}681 - i6{,}350$. Комплексный коэффициент пропорциональности будет равен:

$$b_0 + ib_1 = 1{,}249\text{-i}0{,}301.$$

Уместно напомнить, что стандартный подход, который был использован ранее в параграфе 3.2, давал применительно к этому примеру другие значения комплексного коэффициента пропорциональности:

$$b_0 + ib_1 = 1{,}257\text{-i}0{,}295$$

Различия, как видно, не столь значительные, как можно было ожидать, но они есть. Прежде, чем приступить к выбору одного из двух методов оценки коэффициентов комплекснозначных моделей – изложенного в параграфе 3.2 или же изложенного в данном параграфе, обратимся к задаче корреляционного анализа комплексных переменных.

3.6. Комплексный коэффициент парной корреляции

Поскольку при альтернативном подходе к эконометрии комплексных переменных используются новые понятия, такие как комплексная дисперсия и комплексный корреляционный момент, следует ожидать отличия и во всех других разделах комплекснозначной эконометрии от разделов, которые можно получить при стандартном подходе, изложенном в параграфах 3.1, 3.2 и 3.3.

В полной мере это касается и корреляционного анализа, если его разрабатывать применительно к комплексным переменным.

В параграфе 3.3 было показано – как можно вывести формулу для вычисления коэффициента парной корреляции. Для этого использовалась известная в математической статистике формула:

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \qquad (3.6.1)$$

Подставим в неё из параграфа 3.4 значения комплексного корреляционного момента и комплексных дисперсий. Для упрощения формы записи примем, что все исходные переменные центрированы относительно их средних арифметических. С учётом этого получим:

$$r_{XY} = \frac{\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sqrt{\sum (x_{rt} + ix_{it})^2 \sum (y_{rt} + iy_{it})^2}}. \qquad (3.6.2)$$

Раскрывая скобки числителя и группируя действительную и мнимую части, получим для него:

$$\sum (y_{rt}x_{rt} - y_{it}x_{it}) + i\sum (x_{rt}y_{it} + y_{rt}x_{it}). \qquad (3.6.3)$$

Теперь в знаменателе возведём во вторую степень выражения, находящиеся под знаком сумм и сгруппируем действительную и мнимую части:

$$\sqrt{\sum (x_{rt} + ix_{it})^2 \sum (y_{rt} + iy_{it})^2} = \sqrt{\sum (x_{rt}^2 - x_{it}^2 + i2x_{rt}x_{it}) \sum (y_{rt}^2 - y_{it}^2 + i2y_{rt}y_{it})}. \qquad (3.6.4)$$

Подставляя и числитель, и знаменатель в исходную формулу (3.6.2), получим для комплексного коэффициента парной корреляции формулу, которую можно использовать при отсутствии возможности работы с комплексными числами:

$$r_{XY} = \frac{\sum(y_{rt}x_{rt} - y_{it}x_{it}) + i\sum(x_{rt}y_{it} + y_{rt}x_{it})}{\sqrt{\sum(x_{rt}^2 - x_{it}^2 + i2x_{rt}x_{it})\sum(y_{rt}^2 - y_{it}^2 + i2y_{rt}y_{it})}}. \tag{3.6.5}$$

Отличие полученной формулы от той, которая следует из стандартной постановки задачи (3.3.8) легко обнаружить, если привести эту формулу здесь:

$$r_{XY} = \frac{\sum_t (y_{rt}y_{it} + x_{rt}x_{it}) + i(\sum_t (x_{rt}y_{it} - y_{rt}x_{it}))}{\sqrt{\sum_t ({x_{rt}}^2 + {x_{it}}^2)\sum_t ({y_{rt}}^2 + {y_{it}}^2)}}. \tag{3.6.6}$$

Таким образом, получено две разные формулы для расчёта значений коэффициента парной корреляции и необходимо определиться – какой из них следует отдать предпочтение.

Для этого необходимо вернуться к истокам корреляционного анализа. Формула (3.6.1), удобная для вывода коэффициента парной корреляции вовсе не является первичной, о чём свидетельствует, например, работа Е.Е.Слуцкого «Теория корреляции», опубликованная ещё в 1912 году[15]. Сам коэффициент парной корреляции и его смысл определяются через коэффициенты регрессии. Рассмотрим этот вывод и тогда можем получить необходимый вывод.

Прежде всего, определим линейную взаимосвязь между двумя комплексными переменными Y и X. Очевидно, что эта взаимосвязь опишется равенством:

$$Y = Y_0 + aX, \tag{3.6.7}$$

где Y_0 и a – некоторые коэффициенты. Но что это за коэффициенты? Если считать, что они – вещественные числа, то равенство (3.6.7) даёт две элементарные линейные зависимости – вещественных частей друг от друга и мнимых частей друг от друга. Влияние, скажем, мнимой части комплексной переменной X на действительную часть комплексной переменной Y эта зависимость не отражает. Поэтому имеет смысл рассматривать модель с комплексными коэффициентами.

По своему смыслу свободный член Y_0 модели (3.6.7) представляет собой константу, комплексное число, которому равна комплексная переменная Y в том случае, если комплексная переменная X принимает нулевое значение.

В корреляционном анализе для получения удобной при вычислениях формулы коэффициента парной корреляции, избавляются от свободного коэффициента посредством центрирования исходных переменных относитель-

[15] Слуцкий Е.Е. Экономические и статистические произведения: Избранное. – М.: Эксмо, 2010 – с. 642-792.

но их средних арифметических. Логика этого подхода такова. Коэффициенты регрессии Y на X и X на Y находятся с помощью МНК, который для модели

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t \tag{3.6.8}$$

предлагает решить систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_t Y_t = na_0 + a_1 \sum_t X_t \\ \sum_t Y_t X_t = a_0 \sum_t X_t + a_1 \sum_t X_t^2 \end{cases}, \tag{3.6.9}$$

а для модели

$$X_t = b_0 + b_1 Y_t \tag{3.6.10}$$

предлагает решить другую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_t X_t = nb_0 + b_1 \sum_t Y_t \\ \sum_t Y_t X_t = a_0 \sum_t Y_t + a_1 \sum_t Y_t^2 \end{cases}. \tag{3.6.11}$$

Для того чтобы найти коэффициенты регрессии a_1 и b_1, центрируют исходные переменные относительно их средних арифметических:

$$X_t - \bar{X};\ \ Y_t - \bar{Y}.$$

С учётом того, что сумма отклонений любой переменной от её средней арифметической равна нулю, равенство для первых уравнений систем нормальных уравнений будут выполняться только в том случае, когда их свободные члены (a_0 и b_0 соответственно) равны нулю. Тогда первая система нормальных уравнений для центрированных переменных превратится в одно уравнение:

$$\sum_t (Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X}) = a_1 \sum_t (X_t - \bar{X})^2,$$

точно также как и второе:

$$\sum_t (Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X}) = b_1 \sum_t (Y_t - \bar{Y})^2.$$

Откуда легко вычисляются значения коэффициентов регрессии a_1 и b_1 через центрированные переменные. Среднее геометрическое коэффициентов регрессий a_1 и b_1:

$$r = \pm\sqrt{a_1 b_1} \qquad (3.6.12)$$

и будет представлять собой коэффициент парной корреляции:

$$r = \frac{\sum_t (Y_t - \bar{Y})(X_t - \bar{X})}{\sqrt{\sum_t (X_t - \bar{X})^2 \sum_t (Y_t - \bar{Y})^2}}. \qquad (3.6.13)$$

Понятно, что значение коэффициента, по модулю равное единице, достигается только в том случае, когда $a_1=1/b_1$, то есть когда между переменными существует функциональная линейная зависимость.

Используем этот подход в случае вывода формулы для расчёта коэффициента парной корреляции комплексных переменных, для чего с помощью центрирования избавимся от свободного члена так, как это сделано в предыдущем параграфе в (3.5.26). Используя форму записи, удобную для работы с комплексными переменными (3.5.27), применительно к комплексному коэффициенту регрессии X на Y, обозначенному в (3.6.7) как a, получим:

$$a = \frac{\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sum (x_{rt} + ix_{it})(x_{rt} + ix_{it})}. \qquad (3.6.14)$$

Теперь рассмотрим регрессию, обратную данной, то есть – комплексную регрессию Y на X:

$$X = X_0 + bY, \qquad (3.6.15)$$

где X_0 и b – комплексные коэффициенты уравнения регрессии.

Комплексный коэффициент пропорциональности b также может быть найден с помощью комплексного МНК:

$$b = \frac{\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sum (y_{rt} + iy_{it})(y_{rt} + iy_{it})}. \qquad (3.6.16)$$

Поскольку коэффициент парной корреляции представляет собой среднее геометрическое коэффициентов регрессии (3.6.12), найдём среднее геометрическое коэффициентов регрессии (3.6.14) и (3.6.16):

$$r_{XY} = \pm\sqrt{a_1 b_1} = \frac{\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sqrt{\sum (x_{rt} + ix_{it})^2 \sum (y_{rt} + iy_{it})^2}}\,. \tag{3.6.17}$$

Как видно, получилась та же самая формула, что и (3.6.2), которая выведена через комплексный корреляционный момент и комплексную дисперсию. Она может быть преобразована и к виду (3.6.5) если у экономиста нет возможности работать с комплексными числами, и он вынужден оперировать только с действительными числами.

Теперь вернёмся к стандартной постановке проблемы, принятой в математической статистике, которая предполагает, что дисперсия, корреляционный момент и т.п. статистические характеристики комплексных переменных должны быть вещественными числами.

Вновь представим коэффициент парной корреляции как среднее геометрическое двух комплексных коэффициентов регрессии, только в формулы для вывода коэффициента будем подставлять те значения комплексных коэффициентов регрессии, которые получаются при минимизации дисперсии, если рассматривать её как вещественную характеристику процесса (3.1.2). Такой подход позволил в параграфе 3.2 получить систему уравнений, решая которые можно вычислить комплексные коэффициенты, минимизирующие значения этой дисперсии. Поскольку мы используем центрированные переменные, избавившись тем самым от свободного члена, то можно напрямую воспользоваться уже полученной для этого формулой (3.2.11).

Коэффициент комплексной регрессии *X* на *Y* будет вычисляться так:

$$a = \frac{\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} - ix_{it})}{\sum (x_{rt} + ix_{it})(x_{rt} - ix_{it})} = \frac{\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} - ix_{it})}{\sum (x_{rt}^2 + x_{it}^2)}\,. \tag{3.6.18}$$

Если рассматривать обратную зависимость, то есть – комплексную регрессию *Y* на *X,* то комплексный коэффициент такой регрессии будет найден аналогично:

$$b = \frac{\sum (x_{rt} + ix_{it})(y_{rt} - iy_{it})}{\sum (y_{rt} + iy_{it})(y_{rt} - iy_{it})} = \frac{\sum (x_{rt} + ix_{it})(y_{rt} - iy_{it})}{\sum (y_{rt}^2 + y_{it}^2)}\,. \tag{3.6.19}$$

Подставим теперь в формулы (3.6.18) и (3.6.19) в формулу их средней геометрической. Получим:

$$r = \pm\sqrt{\frac{\sum (x_{rt} + ix_{it})(y_{rt} - iy_{it}) \sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} - ix_{it})}{\sum_t (x_{rt}{}^2 + x_{it}{}^2) \sum_t (y_{rt}{}^2 + y_{it}{}^2)}}\,. \tag{3.6.20}$$

Первый сомножитель числителя может быть приведён к такому виду:

$$\sum(x_{rt}+ix_{it})(y_{rt}-iy_{it})=i\sum(x_{it}-ix_{rt})(y_{rt}-iy_{it})\,. \qquad (3.6.21)$$

Второй сомножитель числителя коэффициента (3.6.20) также может быть преобразован следующим образом:

$$\sum(x_{rt}-ix_{it})(y_{rt}+iy_{it})=i\sum(x_{rt}-ix_{it})(y_{it}-iy_{rt})\,. \qquad (3.6.22)$$

Теперь можно убедиться в том, что эти два сомножителя подкоренного выражения числителя (3.6.20) равны друг другу, поэтому этот числитель следует записать в таком виде:

$$i\sum(x_{rt}-ix_{it})(y_{it}-iy_{rt})\,, \qquad (3.6.23)$$

если работать непосредственно с комплексными переменными, а если работать с действительными переменными, рассматривая и вычисляя отдельно действительную и мнимую части комплексных переменных задачи, то удобнее числитель представить так:

$$i\sum(x_{rt}-ix_{it})(y_{it}-iy_{rt})=\sum(x_{rt}y_{rt}+x_{it}y_{it})+i\sum(x_{rt}y_{it}-x_{it}y_{rt})\,. \qquad (3.6.24)$$

Тогда коэффициент парной корреляции (3.6.20) может быть записан так:

$$r=\frac{i\sum(x_{rt}-ix_{it})(y_{it}-iy_{rt})}{\sqrt{\sum(y_{rt}^2+y_{it}^2)\sum(x_{rt}^2+x_{it}^2)}}\,. \qquad (3.6.25)$$

Теперь сгруппируем в числителе действительную и мнимую части коэффициента:

$$r=\frac{\sum(x_{rt}y_{rt}+x_{it}y_{it})+i\sum(x_{it}y_{rt}-x_{rt}y_{it})}{\sqrt{\sum(y_{rt}^2+y_{it}^2)\sum(x_{rt}^2+x_{it}^2)}}\,. \qquad (3.6.26)$$

Получили коэффициент, отличный от тех, которые были выведены в данном параграфе. Но поскольку этот коэффициент выводился, исходя из посылок стандартного подхода, то следует ожидать его полную идентичность с тем коэффициентом (3.3.8), который был выведен в параграфе 3.3. Приведём здесь полученную в указанном параграфе формулу:

$$r_{XY} = \frac{\sum_t (y_{it}y_{rt} + x_{it}x_{rt}) + i(\sum_t (x_{rt}y_{it} - y_{rt}x_{it}))}{\sqrt{\sum_t ({x_{rt}}^2 + {x_{it}}^2)\sum_t ({y_{rt}}^2 + {y_{it}}^2)}}. \qquad (3.6.27)$$

Легко обнаружить существенное отличие в коэффициентах – первые слагаемые числителей принципиально не равны друг другу, а мнимые составляющие отличаются знаком. Если в ходе вывода этих двух коэффициентов не допущена математическая ошибка (многочисленные проверки её не выявили, но…), то мы убеждаемся в том, что один и тот же подход, который предполагает что все статистические меры колеблемости комплексных переменных должны быть вещественными, не является сбалансированным и его применение в целях эконометрии комплексных переменных невозможно.

Поэтому будем использовать в эконометрии комплексных переменных комплексную дисперсию (3.4.3), комплексный корреляционный момент (3.4.6), комплексный МНК (3.5.10) и комплексный коэффициент корреляции (3.6.17), то есть те расчётные методы и коэффициенты, которые изложены в параграфах 3.5 и 3.6.

3.7. Интерпретация значений комплексного коэффициента парной корреляции

Определив, как вычислять комплексный коэффициент парной корреляции, следует теперь дать интерпретацию тем значениям, которые он может принимать в случае практического применения. В предыдущем параграфе было показано, что линейная взаимосвязь между двумя комплексными переменными означает в области действительных переменных, что и вещественная, и мнимая части одной комплексной переменной выступают как двухфакторные линейные зависимости от вещественной и мнимой частей другой комплексной переменной. Поэтому, если одна переменная изменяется нелинейно, то и другая переменная будет меняться нелинейно, причём визуально такую зависимость чаще всего определить сложно. На рис.3.1 приведён пример такой линейной функциональной зависимости между двумя комплексными переменными ***X*** и ***Y***. Если изучаемая зависимость не функциональная, а регрессионная, то разброс точек на комплексных плоскостях ещё меньше вызывает ассоциации с линейной зависимостью. Поэтому визуальный анализ зависимости между переменными затруднён и о линейной взаимосвязи двух комплексных переменных можно судить исключительно по расчётным характеристикам, в первую очередь - по комплексному коэффициенту парной корреляции.

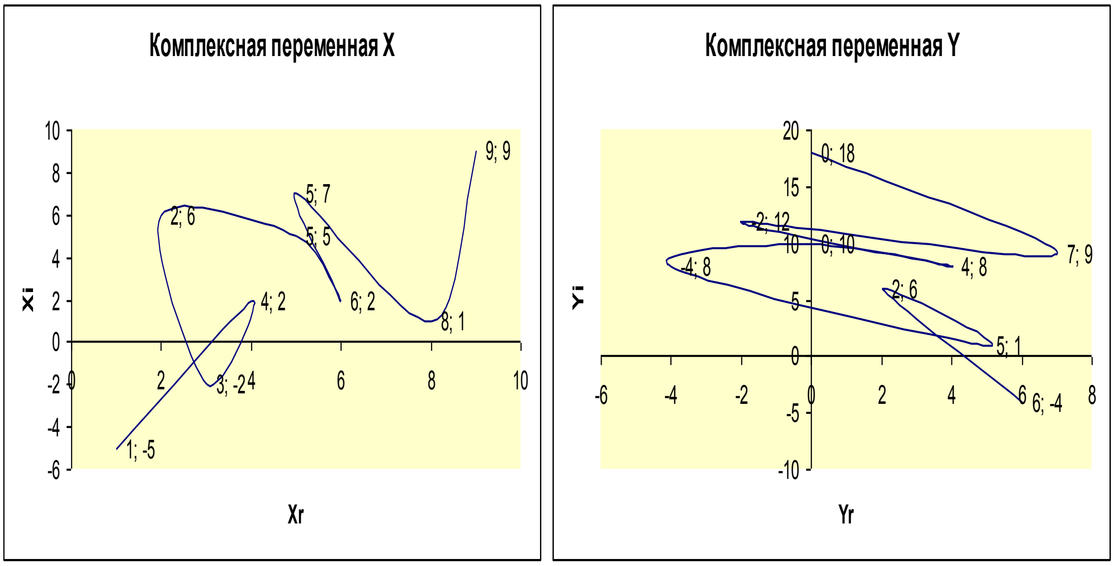

Рис. 3.1. Пример линейной функциональной зависимости между двумя комплексными переменными

Комплексный коэффициент парной корреляции, как это следует из материалов предыдущего параграфа, представляет собой среднее геометрическое двух комплексных коэффициентов регрессии

$$r_{XY} = \pm\sqrt{\dot{a}\dot{b}}\,. \qquad (3.7.1)$$

Поэтому для строго функциональной линейной комплекснозначной зависимости $Y = \dot{a}X$, $X = \dot{b}Y$ будет выполняться очевидное равенство:

$$\dot{a} = \frac{1}{\dot{b}}\,, \qquad (3.7.2)$$

откуда:

$$\dot{a}\dot{b} = \frac{1}{\dot{b}}\dot{b} = 1\,.$$

То есть, комплексный коэффициент парной корреляции для линейной функциональной зависимости равен:

$$r_{XY} = \pm(1 + i0)\,. \qquad (3.7.3)$$

Значит, для линейной функциональной зависимости между двумя комплексными переменными модуль действительной части комплексного коэффициента парной корреляции равен единице, а его мнимая составляющая равна нулю.

Это означает, что квадрат комплексного коэффициента парной корреляции (комплексный коэффициент детерминации) для линейной зависимости всегда будет равен единице. Но в каких случаях линейной функциональной зависимости между двумя комплексными переменными квадратный корень из коэффициента детерминации будет принимать значения «плюс единица», а в каких – «минус единица»?

Для ответа на этот вопрос представим комплексные коэффициенты пропорциональности в арифметической и экспоненциальной форме:

$$\dot{a} = a_0 + ia_1 = ae^{i\alpha}, \tag{3.7.4}$$

$$\dot{b} = b_0 + ib_1 = be^{i\beta}, \tag{3.7.5}$$

Их произведение будет равно:

$$\dot{a}\dot{b} = abe^{i(\alpha+\beta)} = ab\cos(\alpha+\beta) + iab\sin(\alpha+\beta). \tag{3.7.6}$$

Поскольку для линейной функциональной зависимости выполняется (3.7.3), то есть мнимая часть комплексного коэффициента парной корреляции равна нулю, то отсюда со всей очевидностью следует, что в этом случае

$$\alpha + \beta = 2\pi k, ab = 1. \tag{3.7.7}$$

Будем рассматривать для простоты случай, когда k=0.Тогда комплексный коэффициент парной корреляции определяется как квадратный корень из:

$$r_{XY} = \sqrt{\dot{a}\dot{b}} = \sqrt{abcos(\alpha+\beta)}. \tag{3.7.8}$$

Поскольку модуль каждого коэффициента пропорциональности по определению положителен, то равенство коэффициента парной корреляции «плюс единице» или «минус единице» полностью определяется косинусом угла α. Нас интересует случай, когда подкоренное выражение может быть таким:

$$\sqrt{(-1)(-1)}. \tag{3.7.9}$$

Тогда можно определить характеристики комплексного коэффициента пропорциональности. Из равенства (3.7.7) косинус подкоренного выражения (3.7.8) может быть записан так:

$$\cos(\alpha+(-\alpha))=\cos\alpha\cos(-\alpha)-\sin\alpha\sin(-\alpha)\,,$$

тогда легко определить, что интересующий нас случай (3.7.9) определяется полярным углом комплексного коэффициента пропорциональности a_0+ia_1, лежащим в пределах:

$$\frac{3}{4}\pi\le\alpha\le\frac{5}{4}\pi\,. \tag{3.7.10}$$

Для этого случая вещественная составляющая комплексного коэффициента пропорциональности всегда не положительна:

$$a_0\le 0, \tag{3.7.11}$$

а его мнимая часть всегда не меньше вещественной:

$$a_0\le a_1\,. \tag{3.7.12}$$

Этим условиям удовлетворяют, например, такие коэффициенты:

$$-1+i;\;\; -1+0i;\;\; -10-i9{,}999...$$

Что означает линейная комплекснозначная взаимосвязь с таким значением комплексного коэффициента парной корреляции? Для ответа на этот вопрос представим линейную функциональную комплекснозначную зависимость как систему равенств вещественных и мнимых частей:

$$y_r=a_0x_r-a_1x_i\,, \tag{3.7.13}$$
$$y_i=a_1x_r+a_0x_i\,, \tag{3.7.14}$$

По условиям (3.7.11) и (3.7.12) коэффициент a_0 всегда не положителен, а мнимая часть a_1 может принимать как положительные (1), так и отрицательные (2) значения. Рассматривая изменение комплексного аргумента в первом квадранте комплексной плоскости, получим, что с одновременным ростом вещественной и мнимой части аргумента вещественная часть комплексного результата Y_r убывает, а мнимая часть Y_i в силу (3.7.12) может как возрастать, так и убывать.

Итак, действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции r_r свидетельствует о степени приближения зависимости между случайными комплексными переменными к линейной зависимости и интерпретация его значений подобна интерпретации значений коэффициента парной корреляции в области действительных чисел.

Теперь необходимо выяснить смысл мнимой составляющей комплексного коэффициента парной корреляции r_i. Мнимая составляющая, как это со всей очевидностью следует из (3.7.3), будет равна нулю только в том случае, когда имеется линейная функциональная зависимость между комплексными переменными. Во всех остальных случаях она не будет равна нулю.

Крайним проявлением этой составляющей комплексного коэффициента парной корреляции является случай, когда:

$$r_{XY} = \pm(0+i). \tag{3.7.15}$$

Из чего следует, что:

$$\dot{a}\dot{b} = abe^{i(\alpha+\beta)} = ab\cos(\alpha+\beta) + iab\sin(\alpha+\beta) = -1 + i0. \tag{3.7.16}$$

Это означает, что

$$\alpha+\beta = (2k-1)\pi, ab = 1. \tag{3.7.17}$$

Что означает полученное равенство? Если рассматривать ситуацию, когда $k=1$, то, например, комплексному коэффициенту пропорциональности $a_0 + ia_1 = 1 + i0$ для того чтобы комплексный коэффициент парной корреляции принимал значения (3.7.15) МНК, применённый к обратной зависимости аргумента от результата должен дать такие оценки комплексного коэффициента: $b_0 + ib_1 = -1 + i0$. Или: коэффициенту $a_0 + ia_1 = 1 + i$ должен соответствовать коэффициент $b_0 + ib_1 = -1 - i$ - вектор, противоположный в комплексной плоскости по направлению к первому.

Теперь можно понять, в каком случае действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции будет равна нулю, а его мнимая часть по модулю будет равна единице. При нахождении регрессии комплексного аргумента на комплексный результат

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)$$

коэффициент пропорциональности $a_0 + ia_1$, найденный с помощью МНК, будет моделировать некоторую линейную последовательность $\hat{y}_r + i\hat{y}_i$. При нахождении обратной регрессии комплексного результата на комплексный аргумент:

$$x_r + ix_i = (b_0 + ib_1)(y_r + iy_i),$$

МНК будет давать такой комплексный коэффициент $b_0 + ib_1$, что его применение для регрессии:

$$y_r + iy_i = \frac{x_r + ix_i}{b_0 + ib_1}$$

будет моделировать ряд точек $\hat{y}'_r + i\hat{y}'_i$, повёрнутых относительно исходного ряда $\hat{y}_r + i\hat{y}_i$ на угол π, то есть – в обратном направлении.

Это возможно в случае полного отсутствия линейной зависимости.

Для понимания сути промежуточных значений (от нуля до единицы по модулю) мнимой составляющей комплексного коэффициента парной корреляции, можно воспользоваться результатами эмпирических исследований. Суть их заключалась в следующем.

Строилась линейная функциональная зависимость между двумя комплексными переменными. При этом действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции становилась равной единице, а мнимая – нулю.

Затем последовательно увеличивалась дисперсия ошибки этой линейной взаимосвязи, которая определялась в долях от моделируемого значения Y. Иначе говоря, на смену функциональной зависимости приходила регрессионная комплекснозначная зависимость со всё увеличивающейся дисперсией.

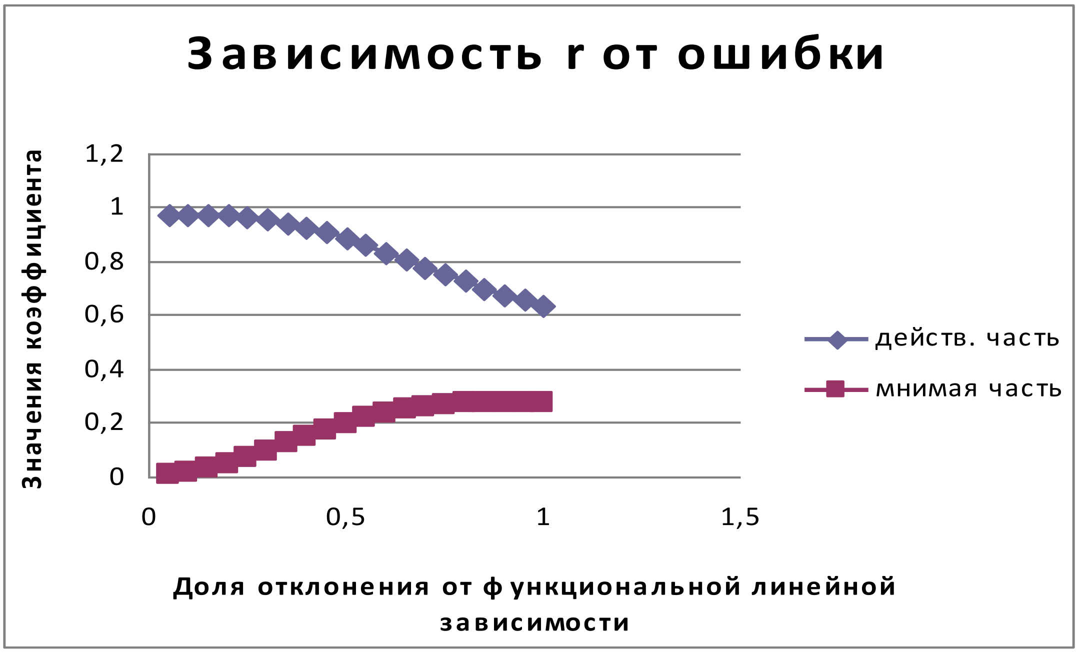

Рис. 3.2. Изменение вещественной и мнимой частей комплексного коэффициента парной корреляции при возрастающей дисперсии взаимосвязи

Чем больше становилась дисперсия между расчётной и фактической величиной Y, тем более возрастала мнимая составляющая комплексного коэффициента парной корреляции и меньше становилась его вещественная часть. Эта закономерность изображена на графике рис.3.2.

Из рисунка легко заметить, что чем ближе линейная зависимость между комплексными переменными к функциональной, тем меньше становится мнимая часть комплексного коэффициента парной корреляции.

Поскольку в современной науке действует принцип простоты, то есть, нет смысла использовать более сложную модель, если для целей исследования вполне пригодна модель простая, то можно рекомендовать такую процедуру построения комплекснозначной эконометрической модели.

Вычисляется комплексный коэффициент парной корреляции между двумя комплексными переменными. Если его вещественная часть близка по модулю к единице, а мнимая часть – к нулю, можно смело использовать линейную комплекснозначную регрессионную зависимость.

Если модуль комплексного коэффициента парной корреляции меньше чем 0,8, а мнимая часть ещё мала, то следует выбрать нелинейную комплекснозначную регрессионную модель. Но если мнимая часть комплексного коэффициента парной корреляции довольно высока, например, больше, чем 0,5, то исследователю следует тщательно изучить смысловое значение взаимосвязи между этими двумя комплексными переменными, поскольку возникает большое сомнение в наличии между ними какой-нибудь взаимозависимости.

3.8. Оценки параметров нелинейных эконометрических моделей комплексных переменных

Общие принципы МНК, которые были определены в параграфе 3.5 этой главы для эконометрических комплекснозначных моделей, применённые к задачам оценивания параметров эконометрических моделей, в случае каждой отдельной модели комплексных переменных требуют индивидуального применения. МНК, адаптированный для простой линейной модели комплексных переменных, формирует общие принципы использования МНК применительно к линейным комплекснозначным эконометрическим моделям. На этой основе можно предложить и подход, позволяющий с помощью МНК оценить выборочные значения коэффициентов нелинейных эконометрических моделей комплексных переменных, если их представить в линейной форме.

В области действительных переменных процедура оценивания коэффициентов нелинейных моделей в общем случае не является простым. Для аддитивных нелинейных моделей формирование системы нормальных уравнений не представляет особого труда, например, для нелинейной аддитивной модели вида:

$$y = a_1 x^2 + a_2 \ln x + a_3 \cos x$$

система нормальных уравнений МНК будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum yx^2 = a_1 \sum x^4 + a_2 \sum x^2 \ln x + a_3 \sum x^2 \cos x \\ \sum y \ln x = a_1 \sum x^2 \ln x + a_2 \sum \ln^2 x + a_3 \sum \ln x \cos x \\ \sum y \cos x = a_1 \sum x^2 \cos x + a_2 \sum \ln x \cos x + a_3 \sum \cos^2 x \end{cases}.$$

И оценки коэффициентов такой модели будут обладать всеми замечательными свойствами оценок МНК. Но вот при оценивании параметров мультипликативных нелинейных моделей непосредственное использование МНК затруднительно.

Так, для оценивания с помощью МНК параметров простой степенной модели:

$$Y_t = a_0 x_t^{a_1}$$

необходимо решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (Y_t - a_0 x_t^{a_1})^2}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial (Y_t - a_0 x_t^{a_1})^2}{\partial a_1} = 0 \end{cases}.$$

И хотя сегодня такая задача не представляет собой каких-либо вычислительных трудностей, но на момент создания эконометрии, она была практически не разрешима. Кроме того, эта задача сегодня не представляет трудностей для специалистов в области экономико-математических методов, которые владеют аппаратом численных методов, с помощью которого эта система и решается. Практикующие экономисты, не владеющие в должной мере математическими методами, испытывают затруднения, если, конечно, в их распоряжении нет готовых прикладных программ, решающих подобные задачи.

Именно поэтому в своё время и был предложен менее точный, но значительно более простой способ решения поставленной задачи – линеаризация исходной нелинейной модели. Для рассматриваемой в качестве примера степенной функции левую и правую части исходного равенства логарифмируют по любому основанию и получают линейную модель (осуществим логарифмирование по натуральному основанию):

$$\ln Y_t = \ln a_0 + a_1 \ln x_t \Leftrightarrow Y'_t = a'_0 + a_1 x'_t.$$

Коэффициенты этой линеаризованной модели уже можно легко найти с помощью МНК. После оценивания параметров данной модели обратный переход к степенной модели достаточно прост – нужно только по известному значению a'_0 найти коэффициент a_0:

$$a_0 = e^{a'_0}.$$

Давно уже известно, что оценки параметров исходной степенной модели, найденные таким способом, будут смещены – ведь минимизируются квадраты отклонений не степенной модели, а её линеаризованного аналога. Но в подавляющем большинстве случаев это не представляет особой проблемы – модель, чьи параметры найдены подобным образом, достаточно хорошо описывает исходный ряд.

Очевидно, что если для задач оценивания параметров эконометрических моделей действительных переменных с помощью МНК его непосредственное применение приводит к вычислительным сложностям, связанным с необходимостью решения систем нелинейных уравнений, то для случая оценивания параметров нелинейных эконометрических моделей комплексных переменных это обстоятельство усугубляется в ещё большей степени в силу свойств нелинейных комплекснозначных функций, которые были рассмотрены во второй главе.

Поэтому для целей практического применения МНК в эконометрии комплексных переменных возникает необходимость разработки практических методик оценивания параметров каждой из рассмотренных ранее эконометрических моделей комплексных переменных, воспользовавшись для этого подходом, аналогичным тому, который используется в эконометрии действительных переменных.

Рассмотрим такую возможность, последовательно изучая функции комплексных переменных в том порядке, в котором изучалось конформное отображение этих функций во второй главе монографии.

Первой из нелинейных моделей комплексных переменных рассмотрим степенную комплекснозначную функцию с действительными коэффициентами. Она имеет следующий вид:

$$y_{rt} + iy_{it} = a_0(x_{rt} + ix_{it})^{b_0}. \qquad (3.8.1)$$

Прежде, чем показать возможность применения МНК к этой функции, покажем на одну очень интересную особенность этой и подобных моделей. Представив каждую из комплексных переменных в экспоненциальном виде, и подставив их в модель (3.8.1). Получим:

$$R_{yt}e^{i\theta_{yt}} = a_0 R_{xt}^{b_0} e^{ib_0\theta_{xt}}. \qquad (3.8.2)$$

Где

$$R_{yt}=\sqrt{y_{rt}^2+y_{it}^2},\quad R_{xt}=\sqrt{x_{rt}^2+x_{it}^2},\quad \theta_{yt}=arctg\frac{y_{it}}{y_{rt}},\quad \theta_{xt}=arctg\frac{x_{it}}{x_{rt}}.$$

Вспомнив о том, что две комплексные переменные, представленные в экспоненциальной форме равны друг другу в том и только в том случае, когда равны друг другу их модули и аргументы, получим:

$$R_{yt}=a_0R_{xt}^{b_0}, \text{ а } \theta_{yt}=b_0\theta_{xt}.$$

Из этого со всей очевидностью следует, что для каждого наблюдения t можно найти значение показателя степени b_0:

$$b_{0t}=\theta_{yt}/\theta_{xt}=\frac{arctg\frac{y_{it}}{y_{rt}}}{arctg\frac{x_{it}}{x_{rt}}} \tag{3.8.3}$$

и коэффициента пропорциональности a_0:

$$a_{0t}=\frac{R_{yt}}{R_{xt}^{b_{0t}}}=\frac{R_{yt}}{R_{xt}^{\theta_{yt}/\theta_{xt}}}. \tag{3.8.4}$$

То есть, для оценки значений коэффициентов степенной комплексно-значной функции нет необходимости использовать МНК – коэффициенты оцениваются на каждом наблюдении!

Эта возможность вновь демонстрирует отличие свойств моделей комплексных переменных перед моделями действительных переменных – ведь появляется уникальная возможность оценивания коэффициентов нелинейной модели на каждом наблюдении и давать экономическую интерпретацию моделируемому процессу не в целом за какой-то период, а на конкретном наблюдении, если, конечно, коэффициенты модели несут в себе экономический смысл, а моделируемая зависимость описывается именно этой функцией.

Это свойство даёт возможность анализировать два ряда значений $\{a_{0t}\}$ и $\{b_{0t}\}$, которые представляют собой выборочные значения коэффициентов из некоторой генеральной совокупности коэффициентов модели (3.8.1), описывающей математическое ожидание исследуемой взаимосвязи. Так как априорно в эконометрии предполагается, что мы имеем дело с нормальным распределением вероятностей, и выборочные значения коэффициентов a_{0t} и b_{0t}, найденные по (3.8.3) и (3.8.4) колеблются вокруг некоторых математических ожиданий a_0 и b_0, то лучшей оценкой искомых параметров модели (3.8.1) выступают их средние арифметические:

$$b_0 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{arctg\,\dfrac{y_{it}}{y_{rt}}}{arctg\,\dfrac{x_{it}}{x_{rt}}} \qquad (3.8.5)$$

и

$$a_0 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_{rt}^2 + y_{it}^2)^{1/2}}{(x_{rt}^2 + x_{it}^2)^{\frac{1}{2}\frac{arctg\frac{y_{it}}{y_{rt}}}{arctg\frac{x_{it}}{x_{rt}}}}}. \qquad (3.8.6)$$

Для таких оценок легко высчитываются их дисперсия и доверительные границы, поэтому нелинейная модель (3.8.1) неожиданно представляется весьма удобной и очень простой для моделирования разнообразных экономических процессов.

Но, поскольку задачей данного параграфа является поиск подходов по использованию МНК, применительно к этой модели, покажем её решение. Такая задача может возникнуть, если исследователю необходимо не просто вычислить параметры эконометрической модели, а построить эту модель, чтобы описать некоторую среднюю тенденцию. Тогда необходимо использовать МНК. Прежде всего, в этом случае следует осуществить линеаризацию исходной модели. Тогда получим:

$$\ln(y_{rt} + iy_{it}) = \ln a_0 + b_0 \ln(x_{rt} + ix_{it}).$$

Так как мы работаем с главными значениями логарифмов, то полученное выражение может быть представлено так:

$$\ln R_{yt} + i\varphi_{yt} = \ln a_0 + b_0(\ln R_{xt} + i\varphi_{xt}),$$

или, приводя к виду линейной модели:

$$\ln R_{yt} + i\varphi_{yt} = (\ln a_0 + i0) + (b_0 + i0)(\ln R_{xt} + i\varphi_{xt}).$$

С учётом этой формы записи, воспользовавшись ранее полученной системой МНК для линейной модели (3.5.10), и подставляя эти значения в систему МНК (в том числе и нулевые), получим:

$$\begin{cases} \sum_t \ln R_{yt} = n \ln a_0 + b_0 \sum_t \ln R_{xt} \\ \sum_t \varphi_{yt} = b_0 \sum_t \varphi_{it} \end{cases} . \qquad (3.8.7)$$

Откуда:

$$b_0 = \sum_t \varphi_{yt} / \sum_t \varphi_{xt} , \qquad (3.8.8)$$

$$\ln a_0 = \frac{1}{n}\left(\sum_t \ln R_{yt} - \frac{\sum_t \varphi_{yt}}{\sum_t \varphi_{xt}} \sum_t \ln R_{xt}\right) . \qquad (3.8.9)$$

В общем случае оценки (3.8.7) будут отличаться от оценок (3.8.5) и (3.8.6). В этой работе мы не будем сравнивать их друг с другом, и давать соответствующие рекомендации. Отметим лишь, что использование МНК для линеаризованной модели приводит к тому, что оценки (3.8.8) и (3.8.9) будут смещёнными, в отличие от оценок (3.8.5) и (3.8.6).

Теперь покажем, как найти параметры степенной модели комплексных переменных с комплексными коэффициентами, которая представляет собой наиболее общий вид степенных функций комплексных переменных:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(x_{rt} + ix_{it})^{(b_0 + ib_1)} . \qquad (3.8.7)$$

Для этой функции найти коэффициенты на каждом наблюдении не получится, поскольку модель имеет четыре коэффициента, а не два, как в модели (3.8.1). Здесь уместно сказать, что любая комплекснозначная модель с действительными или мнимыми коэффициентами может быть построена только по одному наблюдению. Объясняется это очень просто, ведь комплекснозначная функция представляет собой ни что иное, как систему двух действительных функций, и если на каком-либо наблюдении t в распоряжении экономиста имеются данные по x_{rt}, x_{it}, y_{rt} и y_{it}, подставляя их в функциональную зависимость и приравнивая левую и правую части равенства, получаем тем самым два равенства с двумя неизвестными коэффициентами, которые сразу же и вычисляются.

Применительно к степенной функции её коэффициенты находятся на одном наблюдении для таких её разновидностей, как модель с действительными коэффициентами (3.8.1) и таких моделей:

$$y_{rt} + iy_{it} = a_0 (x_{rt} + ix_{it})^{ib_1} ,$$
$$y_{rt} + iy_{it} = ia_1 (x_{rt} + ix_{it})^{b_0} ,$$

$$y_{rt} + iy_{it} = ia_1(x_{rt} + ix_{it})^{ib_1}.$$

А после того, как коэффициенты таких моделей найдены на каждом наблюдении t, легко вычисляются их средние арифметические, дисперсии и т.п.

Вернёмся к степенной комплекснозначной модели с комплексными коэффициентами (3.8.7). Вновь приведём эту функцию к линейному виду, прологарифмировав левую и правую части равенства по натуральному основанию:

$$\ln(y_{rt} + iy_{it}) = \ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(x_{rt} + ix_{it}). \tag{3.8.8}$$

Мы, как и прежде, используем главные значения логарифмов. Для комплексного аргумента логарифм будет таким:

$$\ln(x_{rt} + ix_{it}) = \ln R_x + i\varphi_x, \tag{3.8.9}$$

где R_x – модуль комплексной переменной определяющего фактора, φ_x - её полярный угол. Для комплексной переменной моделируемого результата логарифм запишется так:

$$\ln(y_{rt} + iy_{it}) = \ln R_y + i\varphi_y, \tag{3.8.10}$$

где R_y – модуль комплексной переменной результата, φ_y - её полярный угол. Для комплексного коэффициента пропорциональности модели (3.8.7) логарифм запишем так:

$$\ln(a_0 + ia_1) = \ln R_a + i\varphi_a, \tag{3.8.11}$$

где R_a – модуль комплексного коэффициента пропорциональности, а φ_a - его полярный угол.

Приводить комплексный коэффициент (b_0+ib_1) в экспоненциальный вил нет особой необходимости. С учётом этих обозначений, получим для модели степенной функции комплексных переменных с комплексными коэффициентами следующую линеаризованную модель:

$$\ln R_y + i\varphi_y = (\ln R_a + i\varphi_a) + (b_0 + ib_1)(\ln R_x + i\varphi_x). \tag{3.8.12}$$

Для простоты последующих действий, введём обозначения:

$$\ln(a_0 + ia_1) = \ln R_a + i\varphi_a = A_0 + iA_1. \tag{3.8.13}$$

Полученная модель, как легко убедиться, приведена к виду линейной модели комплексных переменных с комплексными коэффициентами:

$$\ln R_y + i\varphi_y = (A_0 + iA_1) + (b_0 + ib_1)(\ln R_x + i\varphi_x).$$

Коэффициенты такой модели могут быть найдены с помощью уже адаптированным применительно к линейным комплекснозначным моделям МНК. Подставляя в систему нормальных уравнений (3.5.10) значения модели (3.8.12), с учётом обозначений (3.8.13), получим:

$$\begin{cases} \sum_t \ln R_{yt} = TA_0 + b_0 \sum_t \ln R_{xt} - b_1 \sum_t \varphi_{xt} \\ \sum_t \varphi_{yt} = TA_1 + b_1 \sum_t \ln R_{xt} + b_0 \sum_t \varphi_{xt} \\ \sum_t \ln R_{yt} \ln R_{xt} - \sum_t \varphi_{yt}\varphi_{xt} = A_0 \sum_t \ln R_{xt} - A_1 \sum_t \varphi_{xt} + b_0 \sum_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) - 2b_1 \sum_t \varphi_t \ln R_t \\ \sum_t \varphi_{yt} \ln R_{xt} + \sum_t \varphi_{xt} \ln R_{yt} = A_0 \sum_t \varphi_{xt} + A_1 \sum_t \ln R_{xt} + b_1 \sum_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) + 2b_0 \sum_t \varphi_t \ln R_t \end{cases} \quad (3.8.14)$$

Решая эту систему, можно найти значения неизвестных коэффициентов A_0, A_1, b_0, b_1. В итоге получим:

$$y_{rt} + iy_{it} = e^{A_0 + iA_1}(x_{rt} + ix_{it})^{(b_0 + ib_1)}.$$

Для того чтобы получить всё же модель вида (3.8.7), необходимо коэффициент пропорциональности привести из экспоненциальной формы в форму арифметическую. Для этого по имеющимся значениям A_0 и A_1 легко найти a_0 и a_1:

$$a_0 = e^{A_0} \cos A_1, \quad a_1 = e^{A_0} \sin A_1.$$

Одним из подвидов видов степенных функций комплексных переменных является степенная функция комплексного аргумента. В общем виде она может быть представлена следующим образом:

$$y_{rt} = (a_0 + ia_1)(x_{rt} + ix_{it})^{(b_0 + ib_1)}. \quad (3.8.15)$$

Прологарифмировав левую и правую части равенства по натуральному основанию, получим такую линеаризованную модель:

$$\ln y_{rt} = \ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(x_{rt} + ix_{it}). \quad (3.8.16)$$

С учётом введённых ранее обозначений:

$$\ln y_{rt} = (\ln R_a + i\varphi_a) + (b_0 + ib_1)(\ln R_x + i\varphi_x) = A_0 + iA_1 + (b_0 + ib_1)(\ln R_x + i\varphi_x)\,. \quad (3.8.17)$$

Отличие этой модели от модели комплексных переменных заключается в том, что в левой части полученного равенства нет мнимой части. Поэтому система нормальных уравнений для степенной функции комплексного аргумента может быть представлена в таком виде:

$$\begin{cases} \sum_t \ln y_{rt} = TA_0 + b_0 \sum_t \ln R_{xt} - b_1 \sum_t \varphi_{xt} \\ 0 = TA_1 + b_1 \sum_t \ln R_{xt} + b_0 \sum_t \varphi_{xt} \\ \sum_t \ln y_{rt} \ln R_{xt} = A_0 \sum_t \ln R_{xt} - A_1 \sum_t \varphi_{xt} + b_0 \sum_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) - 2b_1 \sum_t \varphi_{xt} \ln R_{xt} \\ \sum_t \ln y_{rt} \varphi_{xt} = A_0 \sum_t \varphi_{xt} + A_1 \sum_t \ln R_{xt} + b_1 \sum_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) + 2b_1 \sum_t \varphi_{xt} \ln R_{xt} \end{cases}, \quad (3.8.18)$$

решая которую, найдём оценки МНК для степенной функции комплексного аргумента с комплексными коэффициентами.

Рассмотрим теперь методику оценивания параметров модели показательной функции комплексных переменных, которую в общем виде запишем так:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)e^{(b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it})}\,. \quad (3.8.19)$$

Вновь линеаризуем модель, логарифмируя для этого левые и правые части равенства. Получим:

$$\ln(y_{rt} + iy_{it}) = \ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it})\,. \quad (3.8.20)$$

С учётом введённых обозначений (3.8.10) и (3.8.11):

$$\ln R_{yt} + i\varphi_{yt} = A_0 + iA_1 + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it})\,. \quad (3.8.21)$$

Вновь оценка параметров этой модели не представляет особых трудностей, поскольку система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \sum_t \ln R_{yt} = TA_0 + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it} \\ \sum_t \varphi_{yt} = TA_1 + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it} \\ \sum_t \ln R_{yt} x_{rt} - \sum_t \varphi_{yt} x_{it} = A_0 \sum_t x_{rt} - A_1 \sum_t x_{it} + b_0 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} \\ \sum_t \ln R_{yt} x_{it} + \sum_t \varphi_{yt} x_{rt} = A_0 \sum_t x_{it} + A_1 \sum_t x_{rt} + b_1 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} \end{cases}. \quad (3.8.22)$$

Решая эту систему, находим параметры исходной модели.

Аналогичным способом можно с помощью МНК оценить параметры более простой показательной модели – модели показательной функции комплексного аргумента:

$$y_{rt} = (a_0 + ia_1)e^{(b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it})}. \tag{3.8.23}$$

Логарифмируя, и вводя соответствующие обозначения, получим следующую линеаризованную функцию:

$$\ln y_{rt} = A_0 + iA_1 + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}). \tag{3.8.24}$$

Тогда система нормальных уравнений для линеаризованной показательной функции комплексного аргумента примет вид:

$$\begin{cases} \sum_t \ln y_{rt} = TA_0 + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it} \\ 0 = TA_1 + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it} \\ \sum_t \ln y_{rt} x_{rt} = A_0 \sum_t x_{rt} - A_1 \sum_t x_{it} + b_0 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} \\ \sum_t \ln y_{rt} x_{it} = A_0 \sum_t x_{it} + A_1 \sum_t x_{rt} + b_1 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} \end{cases}. \tag{3.8.25}$$

Её решение даст экономисту искомые значения коэффициентов модели.

Также просто найти параметры модели логарифмической функции комплексных переменных, которая в общем виде записывается так:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(x_{rt} + ix_{it}). \tag{3.8.26}$$

Применительно к этой модели следует сразу же отметить, что модель представлена в аддитивной форме и её, в отличие от всех нелинейных моделей, рассмотренных выше, не надо линеаризовать. Разве что – следует найти главное значение логарифма комплексного аргумента. Это обстоятельство свидетельствует о том, что оценки комплексных коэффициентов этой модели будут несмещёнными, поскольку минимизируется сумма квадратов комплекснозначных отклонений модели (3.8.26) от фактических значений, а не её линеаризованного аналога.

Система нормальных уравнений для этой модели, с учётом обозначений (3.8.9), уместных для логарифмируемого фактора, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum_t y_{rt} = Ta_0 + b_0 \sum_t \ln R_{xt} - b_1 \sum_t \varphi_{xt} \\ \sum_t y_{it} = Ta_1 + b_1 \sum_t \ln R_{xt} + b_0 \sum_t \varphi_{xt} \\ \sum_t y_{rt} \ln R_{xt} - \sum_t y_{it}\varphi_{xt} = a_0 \sum_t \ln R_{xt} - a_1 \sum_t \varphi_{xt} + b_0 \sum_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) - 2b_1 \sum_t \varphi_{xt} \ln R_{xt} \\ \sum_t y_{rt}\varphi_{xt} + \sum_t y_{it} \ln R_{xt} = a_0 \sum_t \varphi_{xt} + a_1 \sum_t \ln R_{xt} + b_1 \sum_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) + 2b_0 \sum_t \varphi_{xt} \ln R_{xt} \end{cases}. \quad (3.8.27)$$

Её решение даст экономисту искомые значения оценок коэффициентов модели.

Следует указать, что полученные точечные оценки представляют собой выборочное значение коэффициентов. Задачу оценки их значимости и вычисления доверительных границ для истинных значений коэффициентов будем рассматривать несколько позже.

Здесь мы не рассматриваем МНК применительно к оцениванию коэффициентов моделей Жуковского и тригонометрических моделей, поскольку сложно представить себе те прикладные задачи, которые могли бы быть решены с помощью этих моделей.

Итак, зная свойства конформных отображений простых функций комплексных переменных, можно использовать их для решения разнообразных задач современной эконометрии, находя значения коэффициентов эконометрических моделей с помощью МНК так, как это предложено в данном параграфе. Примеры построения нелинейных комплекснозначных эконометрических моделей будут приведены в последующих главах монографии, когда будут решаться прикладные экономические задачи.

3.9. Оценка доверительных границ выборочных значений комплекснозначных моделей

Поскольку в данной главе рассматриваются проблемы и задачи построения эконометрических моделей исключительно к условиям стационарных обратимых процессов, априорно предполагалось, что исследователь имеет дело с выборочными значениями случайных величин. А поскольку оцениваются выборочные значения, то необходимо определить – насколько можно доверять этим выборочным значениям, насколько они близки к своим истинным величинам – математическому ожиданию? В математической статистике эта задача с определённым успехом решается. Поэтому вполне естественно желание перенести методы и подходы математической статистики и на случай комплекснозначных эконометрических моделей.

Понятно, что если перед исследователем стоит задача исследовать простой стационарный процесс, проявляющийся в выборке случайной нормально распределённой величины *Y*, то, рассчитав среднюю арифметическую:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\,, \qquad (3.9.1)$$

и вычислив дисперсию отклонений фактических наблюдений от этой средней σ^2, можно определить тот интервал, в котором находится истинное значение Y:

$$\bar{Y} - \sigma t_\alpha \le Y \le \bar{Y} - \sigma t_\alpha\,. \qquad (3.9.2)$$

Если вместо одномерного случая рассматривать комплекснозначную переменную, то ход рассуждений не должен, на первый взгляд, нарушаться – высчитываются средние арифметические действительной и мнимой частей, для них определяются доверительные границы и затем определяется зона доверительных значений случайной комплексной величины:

$$\begin{aligned} y_r - \sigma t_\alpha \le y_r \le y_r - \sigma t_\alpha\,, \\ y_i - \sigma t_\alpha \le y_i \le y_i - \sigma t_\alpha\,. \end{aligned} \qquad (3.9.3)$$

Рис. 3.3 наглядно демонстрирует эту процедуру. На комплексной плоскости доверительная область представляет собой прямоугольник, очерченный сторонами, определяемыми доверительными границами (3.9.3). Центром этой доверительной области является точка на комплексной плоскости, определяемая координатами $(\bar{y}_r.\bar{y}_i)$. Но прямоугольник, как форма доверительной области, получается в том случае, когда случайные переменные являются независимыми друг от друга, а в комплекснозначной экономике одним из принципов провозглашается принцип взаимосвязанности действительной и мнимой частей комплексной переменной. Они должны отражать разные стороны одного и того же явления или объекта. Поэтому предпосылка о независимости друг от друга y_r и y_i, лежащая в основе определения доверительных границ общеизвестным методом, в нашем случае не верна.

По такой логике доверительная область должна представлять собой некоторое облако рассеяния возможных и допустимых значений, которое не должно иметь острых углов. Это облако, очевидно, должно приобретать в общем случае форму эллипса.

Вышеизложенная стандартная процедура определения доверительных границ (3.9.3) не является единственной в математической статистике – она наиболее распространена, и только. В многомерной статистике изучен вариант совместного распределения случайных величин, и именно он может быть применён в случае комплекснозначной экономики. Поскольку комплексная переменная представляет собой двумерную величину, то применительно к ней как нельзя лучше соответствует T^2 статистика Хотеллинга, которая представляет собой геометрическое место точек эллипсоида доверительной области для двух случайных нормально распределённых величин[16].

Доверительный интервал для математического ожидания μ действительной случайной величины строится с помощью статистики t:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{s}} \sqrt{n}, \tag{3.9.4}$$

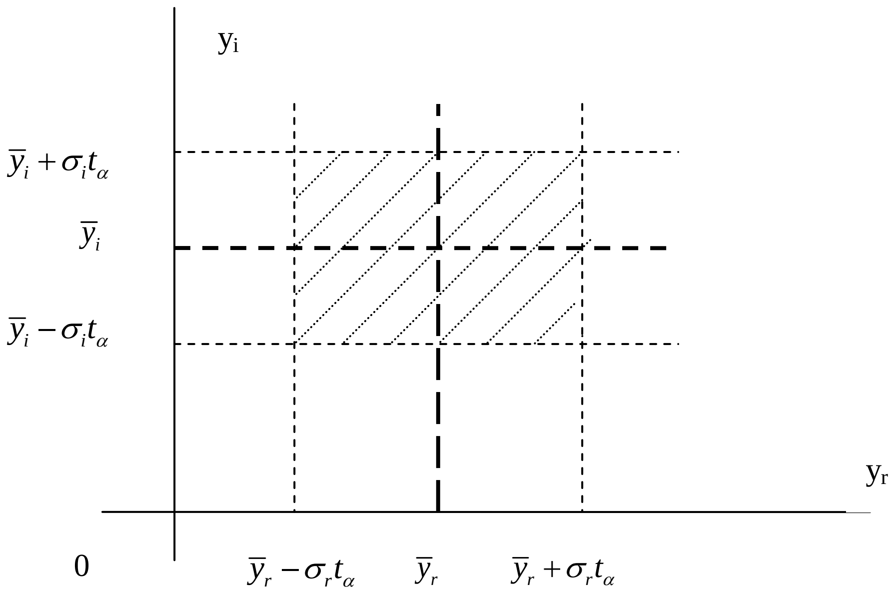

Рис.3.3. Пример доверительной области комплексных переменных

которая имеет t-распределение с n-1 степенями свободы. Это равенство можно переписать в эквивалентной форме:

$$t^2 = n(\bar{x} - \mu)\bar{C}^{-1}(\bar{x} - \mu), \tag{3.9.5}$$

где $\bar{C}^{-1}$- матрица, обратная матрице оценок ковариаций.

Для нахождения совместной доверительной области с помощью аппарата многомерных статистических методов для двумерной случайной величины с помощью распределения Хотеллинга вводится аналог формы (3.9.5), который имеет вид:

$$T^2 = \frac{n s_{rt}^2 s_{it}^2}{s_{rt}^2 s_{it}^2 - s_{rit}^2} \left(\frac{(y_{rt} - \bar{y}_r)^2}{s_{rt}^2} + \frac{(y_{it} - \bar{y}_i)^2}{s_{it}^2} - 2 \frac{s_{rit}(y_{rt} - \bar{y}_r)(y_{it} - \bar{y}_i)}{s_{rt}^2 s_{it}^2} \right). \tag{3.9.6}$$

---

[16] Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973. - С. 208.

Для вычисления T^2 вначале определяются выборочные оценки математических ожиданий случайных величин $\bar{y}_r$, $\bar{y}_i$ как средние арифметические значений рядов y_{rt} и y_{it}, а затем находятся выборочные дисперсии $s_{rt}^2, s_{it}^2, s_{rit}^2$. Для упрощения формулу (3.9.6) представляют в матричной форме:

$$T^2 = n(\bar{Y} - \mu)^T C^{-1}(\bar{Y} - \mu), \qquad (3.9.7)$$

где μ – вектор математических ожиданий двумерного случайного вектора *Y*;

$\bar{Y}$ - вектор средних значений (выборочных оценок) математических ожиданий двумерного случайного вектора *Y*.

Хотеллинг связал величину T^2 с распределением *F*, которая для двумерного случая будет иметь вид:

$$T_\alpha^2 = \frac{2(n-1)}{n-2} F_\alpha. \qquad (3.9.8)$$

Статистика F_α имеет *2* и *n-2* степени свободы.

Доверительная область случайной комплекснозначной переменной и её характеристики, полученные с помощью стиатистики Хотеллинга, могут быть применены и к оценке доверительных границ выборочных оценок регрессионных зависимостей между комплекснозначными переменными. Адаптацию этого подхода на случай комплекснозначной экономики осуществила А.Ф.Чанышева.

Поскольку любая нелинейная элементарная однофакторная комплекснозначная функция, может быть (как это было показано в §3.8) с помощью различных методов приведена к линейной форме:

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x_r + ix_i), \qquad (3.9.9)$$

то её посредством центрирования переменных линеаризованной модели относительно их средних арифметических можно свести к уравнению с одним коэффициентом:

$$y'_r + iy'_i = (b_0 + ib_1)(x'_r + ix'_i). \qquad (3.9.10)$$

В результате задача определения доверительной области регрессионной модели сводится к построению доверительной области для двумерной случайной величины $B = (b_0, b_1)$. Лучшей оценкой комплексного коэффициента пропорциональности для случая стохастических нормально распределённых величин, а именно его мы и рассматриваем, выступают оценки МНК.

Но особенностью простой линейной комплекснозначной модели без свободного члена является возможность нахождения пары коэффициентов по каждому наблюдению:

$$b_{0t} = \frac{y_{rt}x_{rt} + y_{it}x_{it}}{x_{rt}^{\;2} + x_{it}^{\;2}}, \qquad (3.9.11)$$

$$b_{1t} = \frac{y_{it}x_{rt} - y_{rt}x_{it}}{x_{rt}^{\;2} + x_{it}^{\;2}}. \qquad (3.9.12)$$

Тогда метод нахождения доверительной области комплексного коэффициента пропорциональности, предложенный А.Ф.Чанышевой сводится к такой последовательности:

1. С помощью МНК находятся точечные оценки математических ожиданий случайных величин $\hat{b}_0$ и $\hat{b}_1$: $\bar{B} = \hat{b}_0 + i\hat{b}_1$,

2. С помощью (3.9.11) и (3.9.12) формируется случайный ряд комплексной переменной $b_{0t} + ib_{1t}$,

3. Вычисляется двумерная ковариационная матрица $\bar{C}$ для случайного вектора $B = (b_0, b_1)$ по формуле:

$$\bar{C} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(b_{kt} - \hat{b}_k)(b_{lt} - \hat{b}_l); k = 0,1; l = 0,1, \qquad (3.9.13)$$

а также обратная к ней матрица $\bar{C}^{-1}$.

4. Рассчитывается по (3.9.4) интервальная оценка для математического ожидания случайного вектора $B = (b_0, b_1)$.

Доверительные границы математического ожидания *2*-мерного случайного вектора *B* с доверительной вероятностью *P* описываются уравнением:

$$(\bar{B} - \mu)^T \bar{C}^{-1}(\bar{B} - \mu) = \frac{2(n-1)}{n(n-2)}F_{1-P,2,n-2}, \qquad (3.9.14)$$

Доверительная область для μ определяется неравенством:

$$(\bar{B} - \mu)^T \bar{C}^{-1}(\bar{B} - \mu) < \frac{2(n-1)}{n(n-2)}F_{1-P,2,n-2}. \qquad (3.9.15)$$

Уравнение (3.9.14) определяет эллипс с центром в случайной точке $\bar{B}$, случайные размеры и направления главных осей которого определяются $\bar{C}^{-1}$ и числом $F_{1-P,2,n-2}$. Доверительная область (3.9.15) представляет собой множество внутренних точек этого случайного эллипса. По теории этот эллипс накрывает неизвестную точку μ с вероятностью *P*. Однако А.Ф.Чанышева показала, что на практике это не так – существенная часть точек выходит за область эллипса и эта область по своей сути не является доверительной. Поэтому она предложила ввести поправочный коэффициент[17]:

$$H = \frac{(n-2)^2}{2(n-1)}, \tag{3.9.16}$$

с учётом которого статистика T^2 Хотеллинга должна быть связана со статистикой F следующим образом:

$$T^2 = H \times \frac{2(n-1)}{n(n-2)} F_{1-P,k,n-k} = \frac{n-2}{n} \times F_{1-P,2,n-2} \tag{3.9.17}$$

Тогда уравнение эллипса (3.9.11) примет вид:

$$(\overline{B}-\mu)^T \overline{C}^{-1} (\overline{B}-\mu) = \frac{n-2}{n} F_{1-P,2,n-2}. \tag{3.9.18}$$

Приведём пример на некоторых условных данных, который демонстрирует суть процедуры вычисления доверительных границ комплексного коэффициента пропорциональности регрессионной комплекснозначной модели[18]. Исходные данные условного примера по случайным величинам представлены в табл. 3.2. Они подобраны так, чтобы имели одинаковую размерность и нормальное распределение. Следовательно, они удовлетворяют исходным допущениям для решения задачи определения доверительных границ оценок МНК.

Табл. 3.2.

Наблюдения по случайным величинам

№	x_r	x_i	y_r	y_i
1	50	20	25,6	78,4
2	49	20	25,4	81,4
3	42	21	22,6	75,8
4	56	23	27,3	79,2
5	47	21	29,5	65,4
6	51	22	29,0	71,4
7	50	24	22,7	67,8
8	56	27	31,0	64,6
9	48	23	26,6	74,2
10	50	25	30,1	71,2
11	46	26	30,0	63,4

[17] Чанышева А.Ф. Нахождение интервальной оценки комплексного уравнения регрессии // Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы Международной научно-практической конференции. 5 - 6 апреля 2009 г.: в 2ч., под ред. Давниса В.В. Воронеж.: Изд-во ВГУ, 2009

[18] Расчёты, приведённые в данном параграфе, выполнены А.Ф.Чанышевой.

12	57	25	23,7	74,0
13	54	23	30,4	80,2
14	51	28	22,6	72,9
15	53	27	25,0	81,4

Прежде, чем приступить к вычислению коэффициентов этой линейной регрессионной модели, осуществим предварительное центрирование исходных данных относительно их средних арифметических с тем, чтобы модель была представлена в виде (3.9.10).

МНК, применённый к таким центрированным данным этой таблицы, позволил построить линейную регрессионную модель:

$$\hat{y}_r + i\hat{y}_i = (0,981457 + i0,981518)(x_r + ix_i) .$$

Теперь, воспользовавшись тем, что действительная и мнимая части комплексного коэффициента пропорциональности легко вычисляются на каждом наблюдении t, для чего можно использовать (3.9.11) и (3.9.12), получим значения действительной и мнимой части комплексного коэффициента пропорциональности на каждом наблюдении (табл. 3.3).

Табл. 3.3.

Оценки коэффициента регрессии по каждому наблюдению

№	b_0	b_1
1	0,982069	1,175172
2	1,0253998	1,242229
3	1,152162	1,228133
4	0,9140683	1,038601
5	1,0415244	0,926152
6	0,9895694	0,9737
7	0,8989625	0,92503
8	0,9002417	0,719339
9	1,0525014	1,041949
10	1,0513292	0,898959
11	1,0847148	0,76597
12	0,8252822	0,935525
13	1,0113657	1,053599
14	0,9431685	0,912438
15	0,9963899	1,028254

Сравнивая динамический ряд комплексного коэффициента регрессии с его оценкой, полученной на всём множестве с помощью МНК, можно убедиться в том, что они действительно выступают как некоторые оценки математического ожидания значений этого коэффициента.

Теперь имеются все значения для того, чтобы с помощью формулы (3.9.13) найти ковариационную матрицу для данного ряда, а также обратную к ней. Поскольку в дальнейшем используется матрица, обратная к ковариационной, именно её значения и представляют интерес (табл. 3.4).

Табл. 3.4.
Матрица, обратная к ковариационной

157,55109	-28,0328
-28,03279	49,50967

Определим доверительную вероятность на уровне 99%. При *k=2* и *n=15* имеем из таблиц F_α=5,8. Подставляя все полученные характеристики в модифицированную статистику Хотеллинга (3.9.17), получаем уравнение эллипса (3.9.18), описывающее доверительную границу для коэффициента регрессии $b_0 + ib_1$:

$$157,55b_0^2 + 49,51b_1^2 - 255,614b_0 - 45,615b_1 - 56,06b_0b_1 + 144,4 \le 0$$

Полученный эллипс можно изобразить на комплексной плоскости комплексного коэффициента пропорциональности (рис. 3.4) и нанести на него фактические значения коэффициентов из табл. 3.3. Как видно из рисунка, все фактические значения комплексного коэффициента *B* попали в построенную доверительную область. Если уменьшить доверительную вероятность, например, до 95%, границы эллипса сузятся и некоторые значения могту выйти за границы доверительной области.

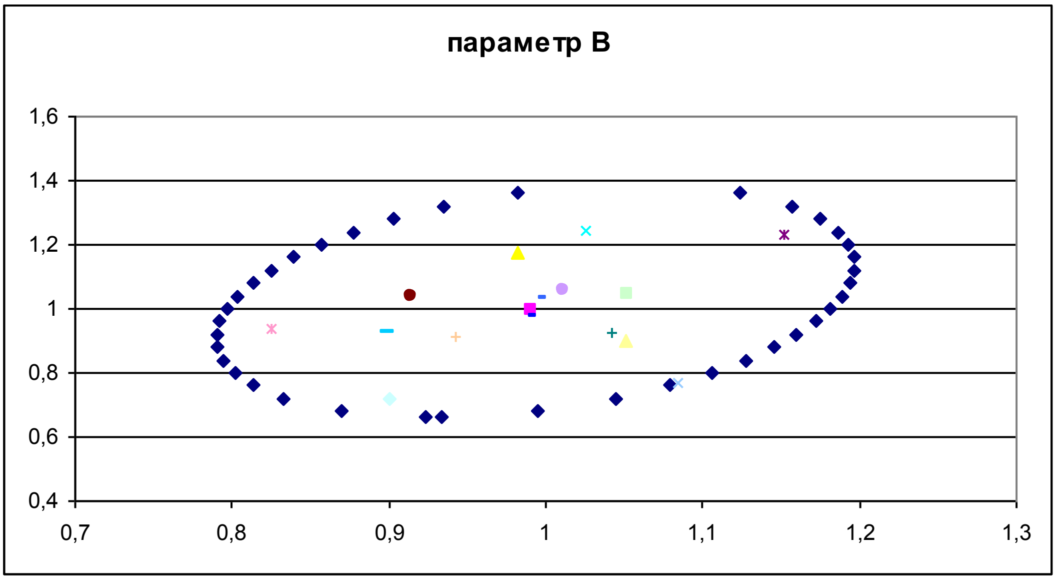

Рис. 3.4. Доверительная область для коэффициента регрессии $b_0 + ib_1$.

Зная доверительную область для коэффициентов регрессионной модели, легко построить доверительную область для расчётных значений комплексного *Y*. Для этого необходимо уравнение доверительной границы для коэффициентов *B* умножить на комплексную переменную $x_r + ix_i$:

$$(157,55b_0^2 + 49,51b_1^2 - 255,614b_0 - 45,615b_1 - 56,06b_0b_1 + 144,4)(x_r + ix_i) \le 0$$

Доверительная граница для последнего 15-го наблюдения (для 99% доверительной вероятности) в качестве примера приведена на рис. 3.5. Из рисунка видно, что фактическое значение величины $y_r + iy_i$ лежит в пределах построенной доверительной области.

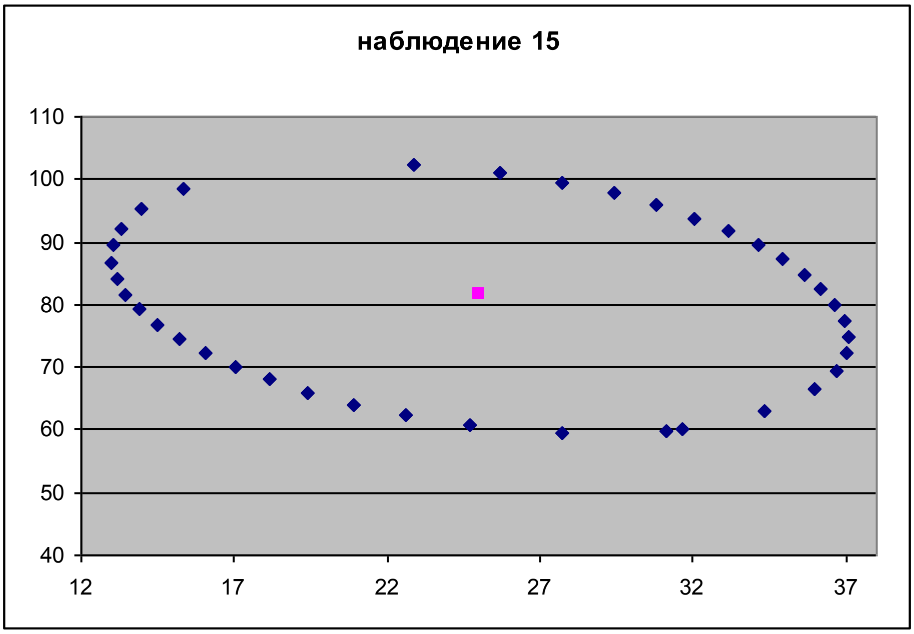

Рис.3.5. Доверительная граница для 15-го наблюдения за комплексным результатом

Правда, этот способ построения доверительных границ (названный нами декомпозиционным) не совсем корректный, поскольку комплексный аргумент также является случайной величиной, и он вносит свою дисперсию в моделируемый результат. Более корректно, на наш взгляд, будет использование описанной процедуры непосредственно к расчётным величинам комплексного результата $\hat{y}_r + i\hat{y}_i$. Логика этого подхода такова.

1. С помощью МНК находится оценка величин $\hat{b}_0$ и $\hat{b}_1$: $\overline{B} = \hat{b}_0 + i\hat{b}_1$ и соответственно $\hat{y}_r + i\hat{y}_i$.

2. Случайный ряд комплексной переменной $y_{rt} + iy_{it}$ является исходным и имеется в распоряжении исследователя.

3. Вычисляется двумерная ковариационная матрица $\overline{C}$ по формуле:

$$\overline{C} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(y_{kt} - \hat{y}_k)(y_{lt} - \hat{y}_l); k = r, i; l = r, i\,,$$

а также обратная к ней матрица $\overline{C}^{-1}$.

Для рассматриваемого условного примера матрица, обратная к ковариационной, приведена в табл. 3.5.

Табл. 3.5.
Матрица, обратная к ковариационной

0,0844132	-0,02444
-0,024437	0,039274

4. Рассчитывается по (3.9.4) интервальная оценка для математического ожидания случайного вектора $Y_r + iY_i$.

С её помощью можно определить и доверительные границы для моделируемой случайной комплексной переменной:

$$186{,}9 - 0{,}475 Y_r + 0{,}084 Y_r^{\,2} - 4{,}92 Y_i - 0{,}048 Y_r Y_i + 0{,}039 Y_i^{\,2} = 0 \,.$$

Доверительные границы будут иметь вид эллипса и, как показали исследования, фактические значения попадают в эту доверительную область.

Предложенный А.Ф. Чанышевой подход можно развить и на задачу определения доверительных границ других оценок показателей выборочных величин.

3.10. Коэффициент сбалансированности в оценивании степени адекватности эконометрических моделей

Аппарат теории функций комплексной переменной (ТФКП) открывает перед экономистом возможность не только более точно описывать некоторые сложные социально-экономические процессы, но и решать такие задачи, которые в области действительных переменных являются очень громоздкими, либо не решаются вовсе.

Во время моделирования различных процессов современные исследователи, так или иначе, сталкиваются с проблемой оценки адекватности полученной модели. Обычно для того, чтобы выяснить, насколько хорошо полученная модель описывает исходный ряд данных, вычисляются различные коэффициенты, по которым уже делаются выводы о степени адекватности модели. Таким коэффициентом, дающим характеристику о соответствии моделируемых процессов реальным, выступает средняя ошибка аппроксимации, которую рекомендуется вычислять по одной из формул[19]:

$$A_{first} = \frac{100\%}{\bar{y}} \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (y_t - y'_t)^2}{n}}, \qquad (3.10.1)$$

либо

$$A_{second} = \frac{100\%}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} \left| \frac{y_t - y'_t}{y_t} \right|. \qquad (3.10.2)$$

Здесь A_{first} и A_{second} – это значение средней ошибки аппроксимации, $\bar{y}$ - среднее значение по исходному ряду данных, y_t – фактическое значение на наблюдении t, y'_t - расчётное значение на наблюдении t, n – количество наблюдений.

В большинстве случаев эти коэффициенты дают хорошие результаты и их достаточно для оценки адекватности модели, хотя значения их, естественно, отличаются друг от друга. Однако, как заметил И.С.Светуньков[20], на практике существует ряд ситуаций, в которых ни одна из приведённых формул не даёт правильной информации о свойствах построенных моделей, а вводит исследователя в заблуждение относительно точности модели. Это может случиться в двух ситуациях:

1. Расчёт средней ошибки аппроксимации для ряда, среднее значение по которому близко к нулю;
2. Расчёт средней ошибки аппроксимации для ряда данных, в котором имеются значения, близкие к нулю.

Действительно, из формулы (3.10.1) следует, что в случаях, когда среднее значение $\bar{y}$ по ряду данных близко к нулю, значение ошибки аппроксимации становится очень большим и перестаёт отражать реальные свойства модели, вне зависимости от того, насколько модель адекватна реальному процессу. С такими ситуациями исследователь будет встречаться, когда, например, осуществит центрирование исходного ряда относительно его средней арифметической.

В свою очередь, из формулы (3.10.2) видно, что, если в ряде данных имеются значения y_t, близкие к нулю, то значение ошибки аппроксимации также становится чрезмерно завышенным, вне зависимости от адекватности построенной модели, поскольку некоторые ошибки представляют собой

[19] Эконометрика: Учебник / И.И.Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др.; Под ред. И.И. Елисеевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2004.

[20] Светуньков И.С. !!!

частное, где в знаменателе стоит величина, близкая нулю. Одновременно с этим, если значение y_t' равно нулю (или близко к нулю), то, как видно из формулы (3.10.2), коэффициент перестаёт учитывать разницу между фактическим и расчётным значениями, так как под знаком суммы получается единица.

В подобных ситуациях оценить степень адекватности моделируемого ряда по формулам (3.10.1) и (3.10.2) невозможно. Особенно остро эта проблема проявляется, когда исходный ряд данных содержит как отрицательные, так и положительные значения, а его необходимо привести к безразмерным величинам. Значения, полученные в результате такого приведения, будут как положительными, так и отрицательными, да ещё и близкими к нулю. Найти решение такой задачи в области действительных переменных сложно. И.С.Светуньков предложил рассмотреть фактические y_t и расчётные y_t' значения переменных не в виде самостоятельных рядов, а в виде ряда комплексных чисел: $z_t = y_t + iy_t'$.

Если нанести точки этого ряда на комплексную плоскость, то будет получена некоторая их совокупность, лежащая вокруг линии, выходящей из начала координат под углом 45^0, причем - чем ближе расчётные значения к фактическим, тем ближе точки ряда приближаются к этой линии.

Другая картина получается, если эти точки изобразить на псевдоевклидовой плоскости, на которой по горизонтальной оси откладываются действительные числа, а по вертикальной – мнимые числа. На псевдоевклидовой плоскости длина вектора $z_t = y_t + iy_t'$ находится по формуле:

$$|z_t| = \sqrt{y_t^2 + (iy_t')^2} = \sqrt{y_t^2 - y_t'^2} \tag{3.10.3}$$

Особенности представления комплексной переменной на псевдоевклидовой плоскости были рассмотрены в первой главе, поэтому напомним лишь, что евклидовой плоскости нулевую длину может иметь только нулевой вектор (с координатами (0;0)), а на псевдоевклидовой плоскости, как можно заметить из формулы (3.10.3) нулевую длину могут иметь и ненулевые векторы. Например, у комплексного числа 2+2i модуль на псевдоевклидовой плоскости будет:

$$R = \sqrt{2^2 + (2i)^2} = \sqrt{2^2 - (2)^2} = \sqrt{4-4} = 0.$$

Таких векторов, длина которых равна нулю, на плоскости будет множество, и все они будут удовлетворять условию: $|y_t| = |y_t'|$. То есть, как следствие, одному из двух условий:

$$y_t = y_t', \tag{3.10.4}$$
$$y_t = -y_t'. \tag{3.10.5}$$

Таким образом, вектора, координаты которых удовлетворяют условию (3.10.4) или (3.10.5), лежат на соответствующих прямых в псевдоевклидовой плоскости и имеют нулевые длины. Эти прямые называются *изотропными*[21]. На рис. 3.6 изотропные прямые показаны пунктирными линиями. Они делят плоскость на 4 сектора:

$$|y_t| > |y_t'| \begin{cases} y_t > 0 - \textit{правый сектор}, \\ y_t < 0 - \textit{левый сектор}, \end{cases}$$
$$|y_t| < |y_t'| \begin{cases} y_t > 0 - \textit{верхний сектор}, \\ y_t < 0 - \textit{нижнийсектор}, \end{cases}$$

Как видно из (3.10.3), длина вектора на псевдоевклидовой плоскости также может быть:

- действительным числом, если $|y_t| > |y_t'|$,
- мнимым числом, если $|y_t| < |y_t'|$.

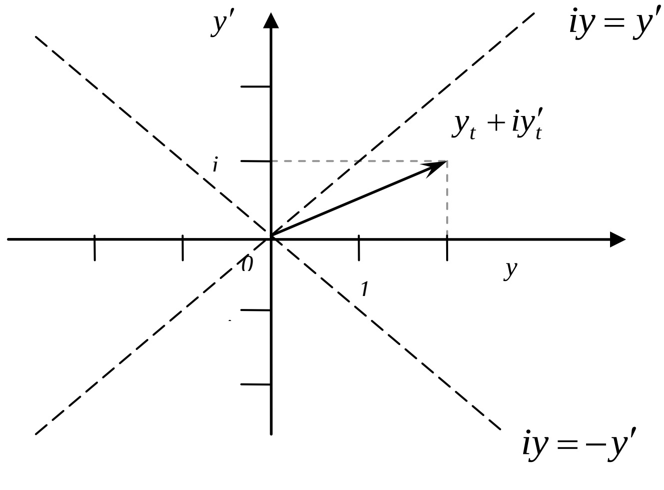

Рис. 3.6. Представление комплексного числа на псевдоевклидовой плоскости.

На плоскости все векторы с действительными длинами будут лежать либо в правом, либо в левом секторе, в то время как векторы с мнимыми длинами будут лежать либо в верхнем, либо в нижнем секторе.

[21] Сазанов А.А. Четырёхмерный мир Минковского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.. – С. 71.

Для нас эти свойства интересны возможностью сопоставить фактические значения с расчётными и получить информацию о том, насколько наша модель соответствует действительности:

1. Если фактические данные по модулю больше расчётных, то есть $|y_t| > |y'_t|$, то модуль комплексного числа $z_t = y_t + iy'_t$ на псевдоевклидовой плоскости будет действительным числом.
2. Если фактические данные по модулю меньше расчётных, то есть $|y_t| < |y'_t|$, то модуль комплексного числа $z_t = y_t + iy'_t$ на псевдоевклидовой плоскости будет мнимым числом.
3. Если фактические и расчётные равны, то модуль комплексного числа $z_t = y_t + iy'_t$ равен нулю.

Зная эти особенности изображений комплексных переменных на псевдоевклидовой плоскости, можно воспользоваться этим для рассматриваемой задачи оценки адекватности эконометрической модели. Для этого воспользуемся соотношением между двумя модулями: на псевдоевклидовой плоскости R_2 и на евклидовой плоскости R_1:

$$R_t^1 = \sqrt{y_t^2 + y_t'^2},$$

$$R_t^2 = \sqrt{y_t^2 - y_t'^2}.$$

Можно отметить, что:

1. R_t^2 может быть как мнимым, так и действительным числом, в то время как R_t^1 может быть только действительным числом;
2. $R_t^2 = 0$, если фактические значения по модулю равны расчётным;
3. Всегда $R_t^1 \geq 0$, при этом $R_t^1 = 0$ только тогда, когда $y_t = y'_t = 0$;
4. В случае, когда фактические значения равны нулю, $R_t^1 = \sqrt{y_t'^2} = y'_t$, $R_t^2 = \sqrt{-y_t'^2} = iy'_t$;
5. В случае, когда расчётные значения равны нулю, $R_t^1 = \sqrt{y_t^2} = y_t$, $R_t^2 = \sqrt{y_t^2} = y_t$.

Используя эти свойства, можно получить коэффициент сбалансированности ряда фактических данных ряду расчётных данных, предложенный И.С.Светуньковым:

$$B = \frac{\dfrac{\sum_{t=1}^{n}\sqrt{y_t^2 - y_t'^2}}{n}}{\dfrac{\sum_{t=1}^{n}\sqrt{y_t^2 + y_t'^2}}{n}} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\sqrt{y_t^2 - y_t'^2}}{\sum_{t=1}^{n}\sqrt{y_t^2 + y_t'^2}} \qquad (3.10.6)$$

Поскольку числитель формулы (3.10.6) содержит подкоренное выражение, которое может для некоторых t быть отрицательным, коэффициент В в общем случае будет комплексным числом.

При этом возможны два крайних случая.

Первый крайний случай, когда коэффициент сбалансированности является действительным. Как видно из (3.10.6) это возможно для случая, если у модели имеются систематические отклонения, такие что $|y_t| > |y_t'|$. Тогда подкоренное выражение числителя всегда положительно.

Второй крайний случай, когда коэффициент сбалансированности будет мнимым. Из (3.10.6) следует, что это может быть только в том случае, когда у модели имеются систематические отклонения от реальных данных другого свойства $|y_t| < |y_t'|$.

В том случае, когда модель описывает фактический ряд данных так, что ошибка аппроксимации имеет как положительные, так и отрицательные значения, а размах их колебаний примерно одинаков, то мнимая часть комплексного коэффициента сбалансированности будет равна его действительной части.

Предложенный коэффициент сбалансированности обладает вполне понятными свойствами.

Прежде всего, как следует из (3.10.6), и числитель коэффициента, и его знаменатель всегда положительны. Следовательно, вещественная и мнимая части коэффициента сбалансированности всегда величины неотрицательные.

Помимо этого очевидного свойства, у коэффициента сбалансированности есть и другие. В том случае, когда модель идеально описывает фактические значения и ошибка аппроксимации равна нулю, то числитель коэффициент сбалансированности будет равен нулю, а значит и сам коэффициент будет равен нулю. Если модель описывает реальный ряд значений с некоторой небольшой ошибкой аппроксимации, то числитель формулы (3.10.6) коэффициента сбалансированности будет невелик, а после отнесения его к знаменателю, близок к нулю. Следовательно, близость к нулю действительной и мнимой частей этого коэффициента свидетельствует о высокой степени адекватности модели.

В том случае, когда модель плохо описывает исходный ряд данных, числитель коэффициента будет далёк от нуля и по своему значению стремится к знаменателю, но больше него быть никогда не может. Таким образом, и действительная, и мнимая часть коэффициента сбалансированности не будут превышать единицу.

Итак, если коэффициент сбалансированности имеет действительную и мнимую части, с близкими друг другу значениями, это означает, что у модели отсутствует смещение. Если при этом величины действительной и мнимой частей этого коэффициента близки к нулю, то это говорит о хорошей аппроксимации модели.

Например, если в результате расчёта получился $B=0,5+i0,1$, то это значит, что фактические значения по модулю больше расчётных, модель смещена, а так как действительная часть значительно больше нуля, то это означает, что модель ещё и плохо описывает исходный ряд данных.

Рассмотрим, как можно использовать предложенный И.С.Светуньковым коэффициент на практике. В своё время нами была построена производственная функция комплексных переменных для Диатомового комбината г. Инзы[22], которая описывала зависимость валовой прибыли и издержек производства (комплексный производственный результат) от капитала и труда (комплексные производственные ресурсы). Тем самым моделируется три показателя:

- валовая прибыль,
- издержки производства,
- валовой выпуск.

Поскольку данные о производстве на этом комбинате составляют коммерческую тайну, то все исходные данные были приведены к безразмерным величинам и при необходимости приводятся в следующих главах монографии. Здесь нам эти данные не интересны. Работа комбината проходит в сложных условиях конкурентной борьбы, поэтому есть месяцы бесприбыльной и даже убыточной работы. А это означает, что исходные данные в результате приведения к безразмерным величинам находятся недалеко от нуля, принимая как положительные, так и отрицательные значения, иногда близкие к нулю. Безразмерные исходные данные по валовой прибыли и её расчетные значения, полученные с помощью нашей модели, приведены в табл. 3.6.

Табл.3.6.

Фактические и расчётные значения валовой прибыли Диатомового комбината

t	*Прибыль факт.*	*Прибыль моделируемая*
1	0,012308	-0,049609
2	-0,058620	-0,032465
3	-0,165870	-0,038947
4	-0,007310	-0,012894
5	0,007612	-0,008581

[22] Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 136 с

6	-0,000110	0,025115
7	0,063887	0,010122
8	0,023063	0,038876
9	0,050557	0,037702
10	0,026168	0,054776
11	0,062789	0,074427
12	0,140044	0,097013
13	0,085624	0,114934
14	0,123722	0,120919

Теперь необходимо определить, насколько адекватно модель описывает реальную производственную ситуацию.

По значениям таблицы судить об адекватности модели довольно сложно. Более наглядным является графическое представление. На рис. 3.7 приведён график изменения во времени валовой прибыли (в относительных величинах) и расчётных значений этой прибыли.

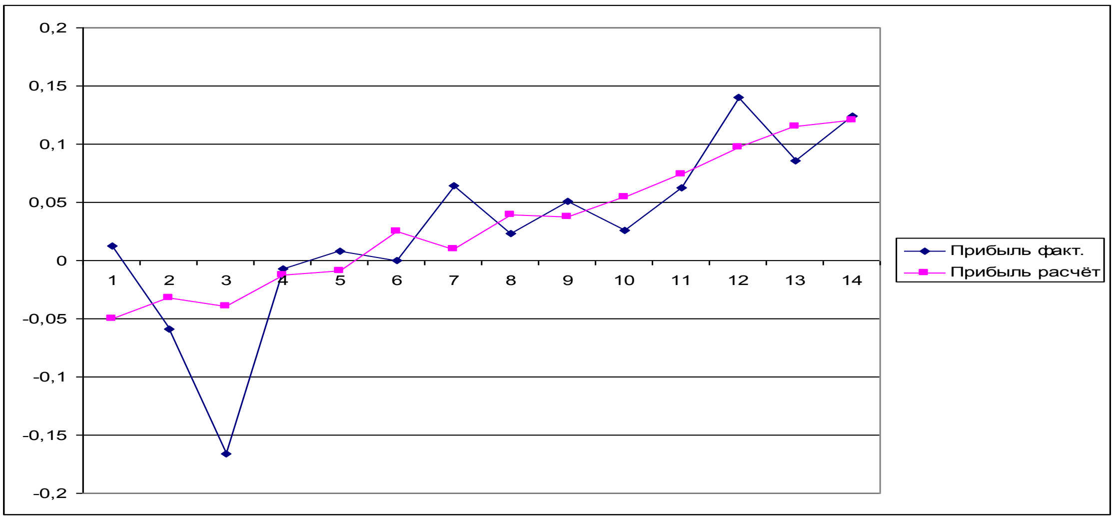

Рис. 3.7. Динамика прибыли Диатомового комбината.

Рисунок демонстрирует, что в целом модель описывает общую тенденцию роста валовой прибыли, но необходимо ответить на вопрос: а на сколько адекватно модель это делает?

Вначале рассчитаем ошибки аппроксимации (3.10.1) и (3.10.2) так, как это делается сегодня в эконометрии[23]. Получим соответственно:

$$A_{first} = 173{,}7122\%, \quad A_{second} = 1678{,}0838\%,$$

Как видно, ошибки аппроксимации получаются просто гигантскими, при этом, если A_{first} составляет более сотни процентов, то A_{second} показывает

[23] Вычисления выполнены И.С.Светуньковым.

ошибку более, чем в тысячу процентов! Формальный вывод однозначен - модель ни в коем случае использовать нельзя.

Однако, как легко убедиться, исходный ряд соответствует второму из случаев, когда эти коэффициенты дают искажённое представление - некоторые значения ряда близки к нулю, и именно деление на величину, близкую к нулю, искажает картину.

Если вычислить коэффициент детерминации между расчётными значениями и фактическими, то картина представляется несколько иной - $R^2 = 0{,}6309$. Это означает, что модель неплохо описывает реальные значения, и уж совсем не так ужасно описывает их, как следует из значений средних ошибок аппроксимации в процентах.

Теперь вычислим коэффициент сбалансированности, предложенный И.С.Светуньковым (3.10.6). Он оказался равным

$$B = 0{,}3749 + 0{,}2452i\,.$$

Это означает, что модель не самым лучшим образом описывает исходный ряд данных, поскольку действительная часть коэффициента сбалансированности не близка к нулю, и мнимая часть, хотя и меньше действительной, но также не может рассматриваться как близкая к нулю. Но действительная часть комплексного коэффициента и мнимая его часть отличаются друг от друга незначительно – всего на 0,13. То есть, смещение модели относительно фактических величин есть, но оно не значительно.

Величины действительной и мнимой части коэффициента сбалансированности в определённой степени характеризуют и точность аппроксимации. Интересно, что коэффициент детерминации указывает на то, что 63% процентов изменений реальных значений моделируется моделью, а 37% значений осталось необъяснённой. При этом действительная часть коэффициента сбалансированности, оценённая в процентах, равна 37,5%. Очевидно, что это – не простое совпадение. По величинам вещественной и мнимой части коэффициента сбалансированности действительно можно считать – насколько модель хорошо описывает реальные значения.

Если данные из табл. 3.6 представить в виде комплексных чисел и нанести их на псевдоевклидову плоскость, то получится своеобразный «портрет», который даёт исследователю дополнительную информацию о соответствии модели реальным данным (рис. 3.8). Из рисунка видно, что отклонение расчётных данных от фактических в целом действительно представляется сбалансированным, модель не смещена, а для части наблюдений дала неплохие результаты аппроксимации, но несколько точек очень сильно отклоняются от изотропной прямой $y_t = y'_t$, что вызвано действием неучтённых в модели факторов или краткосрочным действием некоторых случайных факторов. К тому же одна из точек в третьем квадранте псевдоевклидовой плоскости (для третьего наблюдения) значительно отдалена от изотропной линии, и именно эта точка и вносит существенную дисперсию в результаты моделирования.

Итак, коэффициент сбалансированности свободен от указанных недостатков средних абсолютных ошибок аппроксимации и даёт исследователю дополнительную информацию о степени адекватности эконометрической модели действительных переменных.

Коэффициент сбалансированности И.С.Светунькова, применимый для оценки адекватности эконометрической модели действительных переменных, может быть использован применительно к комплекснозначным эконометрическим моделям.

Действительно, комплекснозначная эконометрическая модель может быть рассмотрена как система двух моделей действительных переменных – отдельное уравнение для действительной части, и отдельное – для мнимой. Тогда можно построить псевдоевклидову плоскость отдельно для вещественной части модели и сравнить реальные значения с моделируемыми, и точно также построить псевдоевклидову плоскость для мнимой части комплексной переменной и мнимой составляющей комплекснозначной модели.

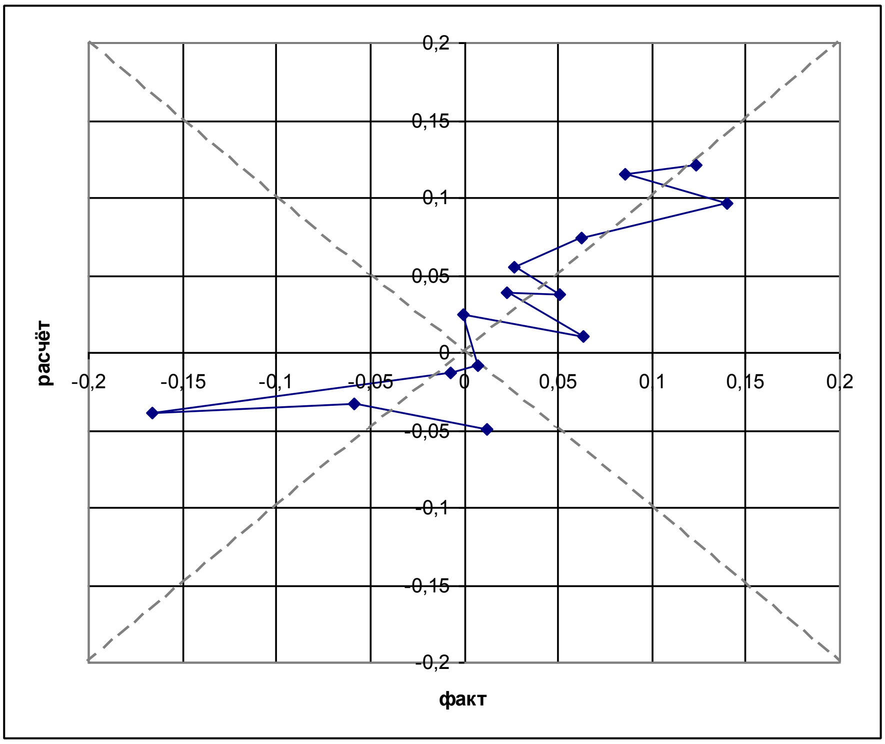

Рис. 3.8. Фактические и расчётные данные на псевдоевклидовой плоскости

Для оценки адекватности описания моделью действительной части будет рассчитываться коэффициент сбалансированности действительной части:

$$B_r = \frac{\sum_{t=1}^{n} \sqrt{y_{rt}^2 - y_{rt}'^2}}{\sum_{t=1}^{n} \sqrt{y_{rt}^2 + y_{rt}'^2}}, \qquad (3.10.7)$$

а для оценки адекватности описания мнимой части комплексной переменной, другой коэффициент сбалансированности мнимой части:

$$B_i = \frac{\sum_{t=1}^{n} \sqrt{y_{it}^2 - y_{it}'^2}}{\sum_{t=1}^{n} \sqrt{y_{it}^2 + y_{it}'^2}}, \qquad (3.10.8)$$

И тот, и другой коэффициент являются независимыми друг от друга и должны, поэтому рассматриваться изолированно, вне взаимосвязи. Иначе говоря, их нельзя складывать друг с другом и на их основе делать какие-то общие выводы о комплекснозначной модели в целом. Следовательно, общее представление об адекватности комплекснозначной эконометрической модели складывается из представления о том, насколько адекватно описывается действительная часть, и насколько адекватно описывается мнимая часть.

Глава четвёртая. Производственные функции комплексного аргумента

4.1. Производственные функции комплексного аргумента

Для моделирования в целом работы предприятия, региона, отрасли или страны используют зависимость результатов производства от используемых ресурсов, не изучая сам процесс преобразования ресурсов в производственный результат. На каждом из уровней иерархии производства для моделирования этой зависимости исходят из ряда различного рода предположений и допущений, который для целей нашего исследования не представляют никакого интереса. Мы исходим из того, что перед нами есть некоторая производственная структура, моделирование которой мы осуществляем, рассматривая исключительно как процесс преобразования производственных ресурсов в производственный результат.

По сути, предлагается рассматривать производство как «черный ящик», на вход которого поступают ресурсы $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а на выходе получается некоторый производственный результат $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$:

$$Y = f(X). \tag{4.1.1}$$

Такую зависимость в экономике принято называть «производственной функцией». В теории производственных функций, которая использует действительные переменные, рассматривается производственный результат, как одна действительная переменная, на изменение которого оказывает влияние несколько производственных ресурсов, то есть – рассматривается многофакторная зависимость:

$$y = f(x_i), \quad i = 1, 2, 3, \ldots n. \tag{4.1.2}$$

Ресурсы, которые используются при промышленном производстве, разнообразны. К ним можно отнести: трудовые ресурсы; материальные ресурсы; финансовые ресурсы; капитальные ресурсы (станки, механизмы и т.п.); интеллектуальные ресурсы и др. Кроме того, каждый из ресурсов в свою очередь представляет собой некоторую агрегированную величину, например, трудовые ресурсы можно разделить на: промышленно-производственный персонал и непроизводственный персонал. Но и промышленно-производственный персонал в свою очередь разделяется на: рабочих и учеников, инженерно-технических работников, служащих и т.п.

Если попытаться в максимальной степени приблизить модель к экономическим реалиям, то необходимо включить в неё все эти ресурсы в как можно более детализированной форме, но такая модель становится чрезвычайно громоздкой, поэтому из всего многообразия производственных ресурсов останавливаются на двух основных и в высшей степени агрегированных – труде L и капитале K. Логика выделения этих двух типов ресурсов из всего многообразия такова.

Для выпуска некоторого количества товара Q помимо капитала и труда следует потратить определённое количество материальных и финансовых ресурсов, тепла и электроэнергии. Причём количество ресурсов, использованных в производстве, в определённой мере можно считать прямо пропорциональным выпуску за исключением капитала и труда. Эти два ресурса, конечно же, меняются с изменением выпуска, но это изменение не носит прямолинейный характер, это, во-первых, а во-вторых, эти два ресурса взаимозаменяемы – увеличивая капитальные ресурсы и внедряя новые технологии, можно добиться увеличения производительности труда и снижения тем самым затрат труда. То есть, можно большим числом капитального ресурса и меньшим числом трудового ресурса получить одно и то же количество выпускаемой продукции.

Такая взаимозаменяемость в определённой мере присуща любому уровню производственной иерархии, например, на уровне предприятия можно при постоянстве капитальных ресурсов, увеличивая затраты труда, организовать работу в две или три смены, добившись роста производства. Такого же объёма производства можно добиться и в том случае, когда оставляя неизменной численность занятых на предприятии, увеличивать капитал посредством внедрения более производительного оборудования. Правда, себестоимость валовая прибыль и рентабельность в первом случае будут существенно отличаться от таких же показателей по второму варианту, но эти особенности не рассматриваются в теории производственных функций.

Для целей нашего научного исследования важно, что чаще всего в производственную функцию из всего многообразия ресурсов включают два ресурса – труд и капитал:

$$Q = f(K, L). \qquad (4.1.3)$$

Мы не будем здесь пересказывать разделы теории производственных функций, поскольку читатель этой монографии наверняка с ними знаком, а при необходимости может ознакомиться с ними по многочисленным монографиям и учебникам. Мы рассмотрим возможность и особенности применения комплекснозначных моделей применительно к задачам теории производственных функций.

Поскольку (4.1.3) графически представляет собой отражение точек плоскости ресурсов на действительную ось производственных результатов, то, заменив плоскость действительных переменных на плоскость комплексных переменных, мы сохраним смысл задачи, но поменяем её форму. Тогда производственная функция комплексного аргумента будет иметь вид:

$$Q = f(K + iL). \qquad (4.1.4)$$

Отнесение трудовых ресурсов к мнимой части не вызвано какими-либо особыми экономическими соображениями – исключительно соображениями удобства. Впрочем, в первой главе мы вводили правило, в соответствии с которым к действительной части комплексной переменной отнесём активную часть экономического показателя, а к мнимой - пассивную. В некотором смысле это правило соблюдено и в рассматриваемом случае - поскольку трудовые ресурсы в производстве в большей степени подвержены разнообразным изменениям по сравнению с капитальными ресурсами, их можно отнести к мнимой части.

В соответствии с правилами ТФКП знак равенства в (4.1.4) означает, что производственный результат, представленный в виде действительной переменной, на самом деле представим как комплексная переменная, чья мнимая часть равна нулю:

$$\begin{aligned} &Q + iQ_i = f(K + iL), \\ &Q_i = 0. \end{aligned} \qquad (4.1.5)$$

Поскольку в экономике гладкие функции существуют лишь в головах некоторых отчаянных экономистов, а на практике не встречаются, точного функционального соответствия между ресурсами и производственным результатом (4.1.4) быть не может, а может быть в лучшем случае регрессионная зависимость. С учётом этого при построении на практике производственной функции комплексного аргумента будет получена зависимость такого вида:

$$Q = f(K + iL) + \varepsilon_r + i\varepsilon_i . \qquad (4.1.6)$$

Из этого следует, что производственная функция комплексного аргумента (ПФКА) представляет собой конформное отображение множества точек, лежащих на комплексной плоскости производственных ресурсов на комплексную плоскость производственного результата, по действительной оси которой откладывается Q, а по мнимой – величина отклонений ε_i. Причём это отображение имеет в общем случае вид линейной регресии, совпадающей с осью действительных значений Q, отклонение от которой носит случайный характер. Это конформное отображение изображено на рис. 4.1.

Если для нахождения значений коэффициентов ПФКА использовать метод наименьших квадратов (МНК), то будет выполняться равенство:

$$\sum(\varepsilon_r + i\varepsilon_i) = 0 . \qquad (4.1.7)$$

Особенности комплексной ошибки аппроксимации и способы измерения степени аппроксимации были изложены в предыдущей главе монографии, поэтому в данной и последующих главах не будем уделять этим характеристикам особого внимания.

Формальной математической основой для ПФКА может послужить любая элементарная комплекснозначная функция из множества известных, свойства основных из которых были изучены во второй главе монографии.

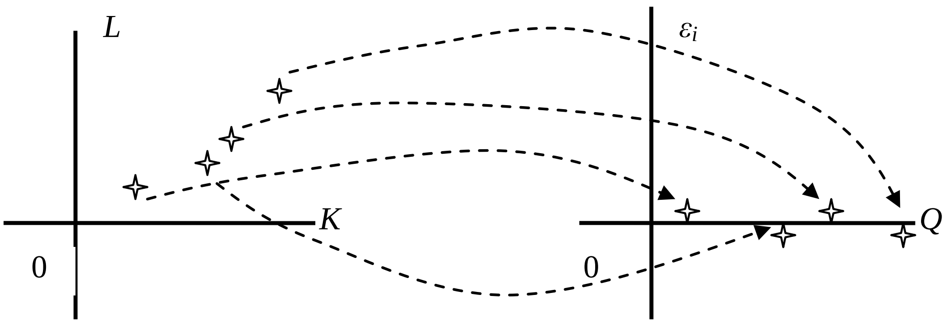

Рис. 4.1. Конформное отображение ПФКА точек комплексной плоскости производственных ресурсов на комплексную плоскость результата

В данной главе мы последовательно рассмотрим ПФКА, исходя из общенаучного принципа – от простого к сложному, то есть, начнём с линейной производственной функции комплексного аргумента и, получив некоторые результаты, перейдём к более сложным моделям. Но прежде, чем это сделать, обратим внимание на область определения задачи – все переменные, как производственные ресурсы, так и производственный результат являются положительными.

4.2. Линейная комплекснозначная модель комплексного аргумента и мультиколлинеарность

Прежде, чем перейти к изучению особенностей функций комплексного аргумента как моделей производственного процесса, обратим на одну важную особенность этих функций. Во второй главе монографии были рассмотрены конформные отображения этих моделей, где было показано, что они представляют собой уравнение линии в трёхмерном пространстве. Эта особенность моделей комплексного аргумента может в определённых случаях рассматриваться как существенное преимущество по сравнению с моделями действительных переменных, особенно для линейной модели комплексного аргумента. Покажем это.

Любая комплекснозначная модель является многофакторной, поскольку комплексный аргумент состоит из двух действительных переменных, отнесённых, соответственно, к вещественной и к мнимой частям. Поэтому, прежде чем перейти к рассмотрению модели производственной функции комплексного аргумента, логично провести сравнительный анализ функций комплексного аргумента с двухфакторными моделями действительных переменных, которые довольно широко используются экономистами в моделировании экономики.

При построении многофакторных моделей социально-экономической динамики (в том числе и двухфакторных), учёные практически всегда встречаются с тем, что многие, а весьма часто и все коэффициенты парной корреляции между переменными, включаемыми в модель, близки по модулю к единице. Это явление получило название «мультиколлинеарности». Мультиколлинеарность, как следует из самого названия явления, возникает тогда, когда факторы модели имеют одинаковые, монотонные относительно друг друга тенденции в динамике.

При этом возникает большая неприятность – попытка использования МНК для оценки коэффициентов многофакторных моделей в условиях мультиколлинеарности приводит к тому, что система нормальных уравнений МНК становится вырожденной - коэффициенты уравнений этой системы оказываются близкими друг к другу.

Эта проблема построения многофакторных моделей в условиях мультиколлинеарности занимает умы учёных с середины XX века и с тех пор и по настоящее время учёные предлагают разные способы борьбы моделирования в условиях мультиколлинеарности. Возникло даже особое направление в математической статистике – робастная статистика, главной задачей которой как раз и является построение многофакторных моделей в условиях мультиколлинеарности.

Покажем, как можно получить удовлетворительные оценки МНК многофакторной модели действительных переменных в условиях мультиколлинеарности, не прибегая к сложным математическим процедурам[24]. Прежде всего, запишем систему нормальных уравнений МНК для многофакторной линейной модели:

$$Y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + ... + a_n x_{nt}, \tag{4.2.1}$$

опуская пределы суммирования для простоты записи, и понимая, что оно ведётся для всех t, начиная с $t=1$, и заканчивая $t=T$:

$$\begin{cases} \sum Y_t = a_0 T + a_1 \sum x_{1t} + ... + a_n \sum x_{nt} \\ \sum Y_t x_{1t} = a_0 \sum x_{1t} + a_1 \sum x_{1t}^2 + ... + a_n \sum x_{nt} x_{1t} \\ ... \\ \sum Y_t x_{nt} = a_0 \sum x_{nt} + a_1 \sum x_{1t} x_{nt} + ... + a_n \sum x_{nt}^2 \end{cases}. \tag{4.2.2}$$

[24] Светуньков С.Г.. Моделирование в условиях мультиколлинеарности // Промышленная энергетика, 1994, № 6. – С. 28 - 32

Теперь представим эту систему уравнений в виде уравнений в отрезках. Получим:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_0}{\dfrac{\sum Y_t}{T}} + \dfrac{a_1}{\dfrac{\sum Y_t}{\sum x_{1t}}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\dfrac{\sum Y_t}{\sum x_{nt}}} \\ 1 = \dfrac{a_0}{\dfrac{\sum Y_t x_{1t}}{\sum x_{1t}}} + \dfrac{a_1}{\dfrac{\sum Y_t x_{1t}}{\sum x_{1t}^2}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\dfrac{\sum Y_t x_{1t}}{\sum x_{nt} x_{1t}}} \\ \ldots \\ 1 = \dfrac{a_0}{\dfrac{\sum Y_t x_{nt}}{\sum x_{nt}}} + \dfrac{a_1}{\dfrac{\sum Y_t x_{nt}}{\sum x_{1t} x_{nt}}} + \ldots + \dfrac{a_n}{\dfrac{\sum Y_t x_{nt}}{\sum x_{nt}^2}} \end{cases}. \qquad (4.2.3)$$

Поскольку каждое уравнение системы МНК представляет собой уравнение гиперплоскости в гиперпространстве коэффициентов a_i, то решением системы является точка пересечения гиперплоскостей в гиперпространстве. Но если коэффициенты уравнений этих гиперплоскостей очень близки друг к другу, то это означает, что гиперплоскости практически параллельны, а именно это и происходит в условиях мультиколлинеарности. Это, в свою очередь, означает, что малейший сдвиг хотя бы одной из гиперплоскостей в гиперпространстве приводит к тому, что точка пересечения всех гиперплоскостей существенно меняет свои координаты, которые являются искомыми оценками МНК. В таких условиях решение системы нормальных уравнений с округлением, например, до 10-го знака после запятой, приводит к получению одних значений коэффициентов многофакторной модели, а округление в процессе вычислений, например, до 8-го знака после запятой – к получению других, иногда противоположных по знаку коэффициентов той же самой многофакторной линейной модели.

Уравнения системы МНК в (4.2.3) представлены в виде уравнений гиперплоскостей в отрезках в гиперпространстве коэффициентов модели. Если в однофакторном случае оценки МНК представляют собой точку пересечения на плоскости параметров двух прямых условий МНК, поскольку неизвестных параметров всего два – a_0 и a_1, и задачу можно изобразить на плоскости, то уже при числе факторов, равном двум, число коэффициентов модели будет равно трем – a_0, a_1 и a_2. Графически такую задачу оценивания параметров многофакторной модели следует рассмотреть не на плоскости, а в трехмерном пространстве параметров. Действительно, число неизвестных параметров становится равным трем и их можно изобразить в качестве осей трехмерного пространства $0a_0$, $0a_1$ и $0a_2$. В этом случае условия МНК представляют собой систему из трех уравнений с тремя неизвестными, причем каждое из уравнений представляет собой не что иное, как уравнение плоскости в пространстве. Решение системы МНК в данном случае будет представлять собой точку пересечения трех плоскостей в этом пространстве коэффициентов. Координаты этой точки дают искомые с помощью МНК значения коэффициентов модели.

Если представить задачу нахождения коэффициентов многофакторных моделей в условиях мультиколлинеарности с помощью МНК в виде системы (4.2.3), то практически всегда величины полученных отрезков, отсекаемых гиперплоскостями условий МНК на каждой из осей гиперпространства коэффициентов, практически совпадают друг с другом, т.е. сами гиперплоскости почти параллельны друг другу. Очевидно, поэтому, что решение системы МНК, которое представляет собой точку пересечения этих практически параллельных друг другу гиперплоскостей в гиперпространстве, является чрезвычайно неустойчивым - малейшая ошибка в округлении может привести к тому, что гиперплоскости могут, перемещаясь незначительно в гиперпространстве, иметь новую точку их пересечения, значительно удаленную от первоначальной. При этом решение системы МНК, как точка пересечения гиперплоскостей, меняется так, что искажается не только абсолютная величина коэффициентов многофакторной модели, но и сам знак этих коэффициентов, что и происходит повсеместно.

Следовательно, последствия мультиколлинеарности действительно вызваны неприемлемостью существующего алгоритма оценивания параметров многофакторных моделей в этом случае. Тогда исследования должны быть направлены не на борьбу с объективно существующей реальностью - сильной коллинеарностью практически всех показателей и факторов социально-экономической динамики (что подтверждается явлением ложной корреляции), не на совершенствование математических алгоритмов работы со слабо обусловленными матрицами, а на улучшение используемого аппарата оценивания коэффициентов таких моделей.

Для повышения устойчивости оценок параметров многофакторных моделей необходимо «развести» гиперплоскости системы нормальных уравнений МНК, устранить их практическую параллельность. Следовательно, надо сделать так, чтобы отрезки на осях гиперпространств оценок параметров моделей были в максимально возможной степени отличны друг от друга, а не совпадать до такой степени, как это происходит всегда в условиях мультиколлинеарности. Лучший вариант – предложить такой вариант получения оценок МНК, при котором гиперплоскости будут перпендикулярны друг другу – это даст возможность получить устойчивые оценки коэффициентов модели.

Для того чтобы решить эту задачу, вспомним формулу определения угла между двумя плоскостями в трёхмерном пространстве. Если одна плоскость записывается уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (4.2.4)$$

а вторая плоскость уравнением

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{4.2.5}$$

то косинус угла между ними можно определить по формуле[25]:

$$\cos\gamma = \frac{AA' + BB' + CC''}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \tag{4.2.6}$$

Если плоскости почти параллельны, то угол между ними близок к нулю и косинус угла, соответственно, близок к единице. Если же плоскости перпендикулярны друг другу, то угол между ними равен 90 градусов и косинус равен нулю. Это означает, что для получения устойчивых оценок МНК в условиях мультиколлинеарности необходимо сделать такие преобразования, чтобы числитель был равен (или близок) нулю, или знаменатель стремился к бесконечности.

С помощью формулы определения косинуса угла между плоскостями (4.2.6) можно определить косинус угла между плоскостями системы (4.2.2) в пространстве коэффициентов эконометрической модели.

Косинус угла между первой и второй плоскостями, описываемых, соответственно, первым и вторым уравнениями системы нормальных уравнений, будет определяться так:

$$\cos\gamma_{12} = \frac{T\sum x_{1t} + \sum x_{1t}\sum x_{1t}^2 + \ldots + \sum x_{nt}\sum x_{1t}x_{nt}}{\sqrt{T^2 + (\sum x_{1t})^2 + \ldots + (\sum x_{nt})^2}\sqrt{(\sum x_{1t})^2 + (\sum x_{1t}^2)^2 + \ldots + (\sum x_{1t}x_{nt})^2}}. \tag{4.2.7}$$

Равен нулю, как об этом говорилось, он может быть лишь в двух случаях – когда числитель равен нулю, а знаменатель - стремится к бесконечности.

Если второе условие, привести знаменатель к бесконечности, не увеличивая в этом же направлении числитель, не выполнимо, то первое условие выполняется легко. Для этого следует произвести центрирование исходных переменных относительно их средней арифметической. Следует напомнить, что операция центрирования представляет собой такое преобразование исходного ряда $\{x_t\}$, при котором из каждого значения ряда вычитается средняя арифметическая этого ряда:

$$x_t' = x_t - \bar{x}. \tag{4.2.8}$$

---

[25] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. - С. 85.

Как следует из элементарных основ математической статистики, сумма такого центрированного ряда будет равна нулю. Поэтому в формуле (4.2.7) будут равны нулю такие суммы:

$$\sum x_{1t} = 0, \ \sum x_{2t} = 0, \ \ldots , \sum x_{nt} = 0. \tag{4.2.9}$$

А так как все они являются сомножителями каждого слагаемого числителя (4.2.7), то числитель будет равен нулю. При этом знаменатель всегда будет больше нуля. Это означает, что косинус угла между первой и второй гиперплоскостями равен нулю, то есть угол между ними равен 90 градусов и эти две гиперплоскости перпендикулярны друг другу. В свою очередь это говорит о том, что линия пересечения этих гиперплоскостей будет определяться очень устойчиво вне зависимости от ошибок округления.

Легко убедиться в том, что при условии (4.2.8) для всех коэффициентов модели углы между первой гиперплоскостью и другими гиперплоскостями гиперпространства искомых коэффициентов, определяемых системой нормальных уравнений МНК, будут прямыми, и первая гиперплоскость будет находиться по отношению к остальным гиперплоскостям плоскости перпендикулярно. При центрировании относительно средних арифметических косинусы углов между другими гиперплоскостями системы (4.2.2), например, второй и третьей, не будут равны нулю, но они будут меньше, чем в случае использования не центрированных переменных, а это свидетельствует о том, что гиперплоскости пересекают друг друга под более тупым углом, чем прежде и точка пересечения всех гиперплоскостей будет более устойчива к ошибкам округления и поступлению новой информации.

Во многих случаях эта простая процедура даёт удовлетворительные результаты, поэтому в условиях мультиколлинеарности следует всегда осуществлять предварительное центрирование всех исходных переменных. Однако на практике встречаются ситуации, когда и этот подход не даёт нужных результатов. Рассмотрим пример, исследованный М.Глущенковой и А.Земляной. Пусть мы наблюдаем некоторый социально-экономический процесс, который описывается функциональной двухфакторной линейной моделью с нулевым свободным членом:

$$y_t = 7,3x_{1t} + 2x_{2t}. \tag{4.2.10}$$

Факторы x_{1t} и x_{2t} в рассматриваемый период меняются линейно и это изменение описывается линейной функциональной зависимостью одного фактора от другого:

$$x_{2t} = 0,273972603x_{1t}. \tag{4.2.11}$$

Очевидно, что в таком случае коэффициент парной корреляции между ними будет равен единице, что свидетельствует о крайнем случае мультиколлинеарности - о линейной функциональной зависимости между ними. В таблице 4.1 рассчитаны, в соответствии с приведённой формулой (4.2.10) при линейно изменяющихся переменных, величины результативного показателя y_t. Следует ещё раз подчеркнуть, что все данные табл. 4.1 - результаты функциональной зависимости (4.2.10) между всеми переменными.

Теперь поставим обратную задачу, а именно - по данным таблицы, не зная коэффициенты зависимости (4.2.10), построить многофакторную линейную модель, то есть – рассчитать по данным таблицы значения коэффициентов модели:

$$y_t = a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t}$$

Таблица 4.1

Данные условного примера

t	x_{1t}	x_{2t}	*Расчётное значение Y_t, полученное по (4.2.10)*
1	2	0,547945205	15,69589
2	4	1,095890411	31,39178
3	6	1,643835616	47,08767
4	8	2,191780822	62,78356
5	10	2,739726027	78,47945
6	12	3,287671233	94,17534
7	14	3,835616438	109,8712
8	16	4,383561644	125,5671
9	18	4,931506849	141,263
10	20	5,479452055	156,9589
11	22	6,02739726	172,6548
12	24	6,575342466	188,3507
13	26	7,123287671	204,0466
14	28	7,671232877	219,7425
15	30	8,219178082	235,4384
16	32	8,767123288	251,1342
17	34	9,315068493	266,8301
18	36	9,863013699	282,526
19	38	10,4109589	298,2219
20	40	10,95890411	313,9178

Поскольку между всеми переменными задачи имеется строго функциональная зависимость, на первый взгляд может показаться, что задача будет легко решена, поскольку в задаче нет ни одной случайной ошибки и неопределённости – задача полностью детерминирована. Достаточно взять любые две точки из таблицы, подставить их в уравнение и решить систему, например, для 5 и 15 точки:

$$\begin{cases} 78,47945 = a_1 10 + a_2 2,739726027 \\ 156,9589 = a_1 20 + a_2 5,479452055 \end{cases}.$$

В таком случае будет получено точные значения исходной модели (4.2.10). Конечно, следует ожидать такой же точности и от более сложного метода оценки значений коэффициентов модели, которым является МНК. Используем его для нахождения оценок исходной модели по табличным данным, зная, что свободный член равен нулю. Система нормальных уравнений для такой модели будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum Y_t x_{1t} = a_1 \sum x_{1t}^2 + a_2 \sum x_{2t} x_{1t} \\ \sum Y_t x_{2t} = a_1 \sum x_{1t} x_{2t} + a_2 \sum x_{2t}^2 \end{cases}.$$

Уравнения, с помощью которых можно вычислить коэффициенты, рассчитанные по данным табл. 4.1, примут вид такой системы:

$$\begin{cases} 90094,411 = a_1 11480 + a_2 3145,206 \\ 24683,403 = a_1 3145,206 + a_2 861,700 \end{cases}. \quad (4.2.12)$$

Следующий шаг – решить систему и получить искомые значения коэффициентов. Но прежде, чем сделать это, приведём эту систему уравнений к системе уравнений в отрезках так, как это сделано в (4.2.3). Получим:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \\ 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \end{cases}. \quad (4.2.13)$$

Как видно, система уравнений вырождена и не имеет решений. Плоскости уравнений МНК не только параллельны друг другу, они полностью совпадают друг с другом, то есть, они не имеют точку пересечения. Значит, многофакторный МНК не позволяет решить поставленную задачу.

Теперь осуществим предварительное центрирование исходных данных, которые приведены в табл. 4.1, относительно их средних арифметических, надеясь на улучшение ситуации. Тогда система нормальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 20875,53 = a_1 2660 + a_2 728,77 \\ 5719,32 = a_1 728,77 + a_2 199,66 \end{cases}. \quad (4.2.14)$$

Очевидно, значения этой системы отличаются от тех значений, которые были получены без центрирования (4.2.12), но позволяет ли такое действие решить поставленную задачу? Для этого вновь представим полученную систему как систему уравнений в отрезках:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \\ 1 = \dfrac{a_1}{7,8479452} + \dfrac{a_2}{28,645} \end{cases}.$$

Легко убедиться в том, что эта система совпадает с (4.2.13), что говорит о том, что задача не может быть решена.

Между всеми переменными имеется строгая линейная зависимость, которая в трёхмерном пространстве исходных переменных представляет собой точки, лежащие на одной прямой линии, а поскольку эти точки лежат на одной прямой, то существует бесконечное количество плоскостей, которым будет принадлежать эта прямая линия. Система (4.2.13) это и демонстрирует – она даёт возможность бесконечного сочетания пар значений коэффициентов модели плоскости в трёхмерном пространстве, то есть позволяет получить бесконечное множество уравнений плоскостей, пересекающихся друг с другом и содержащих в себе прямую линию. Одной из таких плоскостей и является плоскость, описываемая уравнением (4.2.10). Но выделить эту плоскость из бесконечного числа других, как видно, с помощью МНК не представляется возможным.

Мы рассмотрели предельных случай, который не встречается в реальной экономической задаче, но ситуации, близкие к рассматриваемой, встречаются повсеместно, когда коэффициенты парных корреляций между факторами и между факторами и моделируемым результатом по модулю близки к единице, например, равны *0,97*. И в таких случаях мы будем иметь проблему оценивания коэффициентов многофакторной линейной модели, которая не имеет удовлетворительного решения в области действительных переменных.

Линейные модели комплексного аргумента, позволяют решить эту задачу и демонстрируют новое общее направление, применимое и к моделям действительных переменных. В общем виде линейная модель комплексного аргумента имеет вид:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i) + (b_0 + ib_1)\,. \tag{4.2.15}$$

После центрирования исходных переменных относительно их средних арифметических эта модель будет выглядеть проще:

$$y_r = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)\,. \tag{4.2.16}$$

Выделяя действительную и мнимую части этого равенства, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i, \\ 0 = a_1 x_r + a_0 x_i \end{cases}. \tag{4.2.17}$$

Откуда:

$$\begin{cases} y_r = a_0 x_r - a_1 x_i, \\ x_r = -\dfrac{a_0}{a_1} x_i \end{cases}. \qquad (4.2.18)$$

Первое уравнение полученной системы говорит о том, что результат линейно зависит от факторных переменных, а второе уравнение свидетельствует о том, что для линейной функции комплексного аргумента свойственна линейная функциональная зависимость между факторными переменными. Иначе говоря, *линейная функция комплексного аргумента имеет право на существование исключительно в условиях линейной взаимосвязи между факторами модели, то есть – в условиях проявления крайнего случая мультиколлинеарности – линейной функциональной зависимости между факторами*! Учёные борются всеми силами за то, чтобы устранить последствия действия мультиколлинеарности, а введённая в научный оборот функция комплексного аргумента в иных случаях использоваться и не должна!

Применим МНК к оценке коэффициентов комплекснозначной модели (4.2.16) так, как это было показано в третьей главе. В ней была выведена формула для оценки линейной модели комплексного аргумента (3.5.21):

$$\begin{cases} \sum\limits_t x_{rt} y_t = a_0 \sum\limits_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2a_1 \sum\limits_t x_{rt} x_{it} \\ \sum\limits_t x_{it} y_t = a_1 \sum\limits_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2a_0 \sum\limits_t x_{rt} x_{it} \end{cases}.$$

Применительно к данным таблицы 4.1 эта система примет вид:

$$\begin{cases} 90094,41 = a_0 10618,29 - a_1 6290,41 \\ 24683,4 = a_1 10618,29 + a_0 6290,41 \end{cases}. \qquad (4.2.19)$$

Или в отрезках:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a_0}{8,4848} - \dfrac{a_1}{14,3225} \\ 1 = \dfrac{a_1}{2,3246} + \dfrac{a_0}{3,9239} \end{cases}. \qquad (4.2.20)$$

Легко убедиться в том, что получена устойчивая система нормальных уравнений, решая которую, получим такую модель комплексного аргумента:

$$y_r = (7,3 - i2)(x_1 + ix_2). \qquad (4.2.21)$$

Если теперь раскрыть скобки и сгруппировать действительную и мнимую части полученного равенства, то оно преобразуется в следующее:

$$y_r = 7,3x_1 + 2x_2 + i(-2x_1 + 7,3x_2)\,. \qquad (4.2.22)$$

Действительная часть полученного равенства полностью соответствует исходной функции (4.2.10), а мнимая часть легко преобразуется в такое равенство:

$$0 = i(-2x_{1t} + 7,3x_{2t}) \to x_{2t} = \frac{2}{7,3}x_{1t} = 0,273972603x_{1t}\,. \qquad (4.2.23)$$

То есть, моделируется исходная зависимость между факторами (4.2.11). М.Глущенкова и Н.Земляная провели многочисленные расчёты на этом и других условных примерах, задавая дисперсию в факторы, уменьшая тем самым корреляцию между ними, а также внося дисперсию в уравнение зависимости, переводя её из функциональной в регрессионную. Каждый раз оценки линейной функции комплексной переменной оказывались устойчивыми к этим дисперсиям.

В завершение данного параграфа следует указать на принципиальное отличие линейной двухфакторной модели действительных переменных типа:

$$y_t = a_0x_{1t} + a_1x_{2t} \qquad (4.2.24)$$

и линейной модели комплексного аргумента:

$$y_t = (a_0 + ia_1)(x_{1t} + ix_{2t})\,. \qquad (4.2.25)$$

Не смотря на то, что в модели (4.2.24), как и в модели (4.2.25) две переменные и два коэффициента, они описывают разные фигуры. Модель действительных переменных (4.2.24) представляет собой уравнение плоскости в пространстве исходных переменных. Модель же комплексного аргумента (4.2.25) – уравнение прямой линии в этом пространстве.

Это значит, что в ситуации, когда между переменными x_{1t} и x_{2t} нет линейной зависимости, модель комплексного аргумента будет давать плохие результаты, почему и следует использовать модель действительных переменных. В таком случае наблюдаемые точки расположены вокруг некоторой плоскости в пространстве с некоторым отклонением от прямой линии, причём – чем меньше коэффициент парной корреляции между ними, тем больше откланяются точки на плоскости, описываемой (4.2.24) от прямой линии. Но если точки в трёхмерном пространстве ложатся на одну прямую линию, их следует описывать линейной моделью комплексного аргумента, поскольку МНК одну плоскость из множества возможных определяет с большими проблемами, описанными выше.

Из этого в очередной раз следует вывод о том, что модели комплексных переменных – иные, нежели модели действительных переменных и их использование в моделировании экономики расширяет инструментальную базу экономики, облегчая решение сложных задач моделирования социально-экономических процессов.

4.3. Линейная производственная функция комплексного аргумента

Экономическая динамика сложна и многообразна. Нельзя исключать и такой вариант её развития, который описывается линейным характером изменения её показателей. В этом случае можно использовать для различных целей экономического анализа линейную ПФКА. Именно свойства линейной ПФКА, предложенной и изложенной в начале 2005 г., послужили основой для формирования комплекснозначной экономики[26]. Основные её характеристики хорошо изучены и описаны в монографии, опубликованной в 2008 году[27], поэтому в данной монографии остановимся лишь на наиболее важных её свойствах. Для построения этой простой функции будем использовать три переменные, описывающие производственный процесс, а именно: объём производства Q_t, затраты труда L_t и затраты капитала K_t. Представим производственные ресурсы в виде комплексной переменной.

Будем изучать линейную функцию комплексного аргумента без свободного члена, понимая, что при необходимости от него легко избавиться центрированием исходных переменных относительно их средних арифметических. Модель линейной производственной функции комплексного аргумента представим в следующем виде:

$$Q_t = \left(a_0 + i a_1\right)\left(K_t + i L_t\right). \qquad (4.3.1)$$

Перемножив два сомножителя в правой части равенства (4.3.1) и группируя отдельно вещественную и мнимую части, получим:

$$Q_t = \left(K_t a_0 - L_t a_1\right) + i\left(L_t a_0 + K_t a_1\right) \cdot \qquad (4.3.2)$$

Таким образом, производственную функцию (4.3.2) можно представить в виде системы двух уравнений:

$$Q_t = K_t a_0 - L_t a_1, \qquad (4.3.3)$$

и

[26] Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Исследование свойств производственной функции комплексного аргумента (препринт). – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2005. – 24 с.

[27] Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных. – М.: ЛКИ, 2008. – 136 с.

$$0 = L_t a_0 + K_t a_1. \tag{4.3.4}$$

Поскольку из материалов предыдущего параграфа ясно, что (4.3.1) представляет собой уравнение прямой линии в трехмерном пространстве, то на плоскости ресурсов она описывает такую линейную проекцию:

$$K_t = -\frac{a_0}{a_1} L_t. \tag{4.3.5}$$

Поскольку по определению капитальные ресурсы и трудовые ресурсы положительны, то (4.3.5) указывает на то, что один из коэффициентов пропорциональности должен быть отрицательным. Поскольку при этом чаще всего рост ресурсов ведёт к росту результатов производства, то для выполнения этого условия, необходимо, чтобы в (4.3.3) отрицательным был коэффициент a_1.

Это означает, что представив коэффициенты и ресурсы положительными, мы должны использовать такую линейную производственную функцию комплексного аргумента:

$$Q_t = \left(a_0 - ia_1\right)\left(K_t + iL_t\right). \tag{4.3.6}$$

Теперь довольно просто определить коэффициенты такой модели и их экономический смысл. Для этого из (4.3.1) выразим комплексный коэффициент пропорциональности через объёмы производства и производственные ресурсы:

$$a_0 - ia_1 = \frac{Q_t}{K_t + iL_t} = \frac{Q_t(K_t - iL_t)}{K_t^2 + L_t^2}, \tag{4.3.7}$$

Данное равенство, как это следует из свойств комплексных чисел, выполняется только в том случае, когда равны друг другу вещественные и мнимые части комплексных чисел в левой и правой частях равенства (4.3.7). Это свойство позволяет легко получить формулы для расчёта каждого из коэффициентов - раскрывая скобки и группируя отдельно вещественную и мнимую части, получаем формулы для вычисления каждого из коэффициентов. Для действительной части коэффициента пропорциональности:

$$a_0 = \frac{Q_t K_t}{K_t^2 + L_t^2}, \tag{4.3.8}$$

и для мнимой части коэффициента пропорциональности

$$a_1 = \frac{Q_t L_t}{K_t^2 + L_t^2}. \qquad (4.3.9)$$

Из приведённых формул видно, что пара значений коэффициентов рассчитывается, когда имеется хотя бы одно наблюдение как за значениями ресурсов, так и за значениями производственного результата. Это свойство сразу же отличает предлагаемую функцию от её аналогов в области действительных чисел, где для нахождения двух неизвестных коэффициентов необходимо иметь хотя бы два наблюдения. Это свойство производственной функции (4.3.6) легко объяснимо - функция имеет только один неизвестный комплексный коэффициент, поэтому его значения легко определяются по одному наблюдению. Если бы мы находили коэффициенты более сложной линейной модели комплексного аргумента, например такого типа:

$$Q_t = (b_0 + ib_1) + (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t),$$

то перед нами была бы модель с двумя комплексными коэффициентами, для нахождения значений которых необходимо уже иметь два наблюдения. Но поскольку мы изучаем простую функцию без свободного члена, то это означает, что для её практического использования необходимо осуществить предварительное центрирование исходных переменных относительно их средних арифметических.

Полученные формулы (4.3.8) и (4.3.9) позволяют не только найти численные значения коэффициентов по известным величинам затрат и результатов, но и дать экономическую интерпретацию коэффициентам a_0 и a_1 в том случае, когда производственный результат хорошо моделируется этой линейной функцией.

Знаменатели формул одинаковы и характеризуют масштаб привлекаемых ресурсов. Отличие в формулах наблюдается только в числителях, которые и позволяют понять смысловую нагрузку каждого коэффициента.

Числитель действительного коэффициента a_0 характеризует степень использования капитальных ресурсов, числитель мнимой части комплексного коэффициента характеризует степень использования трудовых ресурсов.

Поэтому есть смысл их называть именно так – коэффициент a_0 называть коэффициентом использования капитальных ресурсов, а коэффициент a_1 - коэффициентом использования трудовых ресурсов.

Построим линейную ПФКА по статистическим значениям произведённого национального дохода, величины основных производственных фондов и среднегодовой численности промышленно-производственного персонала бывшего СССР с 1972 по 1989 год. Эти данные, приведённые к относительным величинам, а также значения коэффициентов использования ресурсов, рассчитанные в соответствии с (4.3.8) и (4.3.9), приведены в таблице 4.1[28].

Для вычисления коэффициентов модели (4.3.1) все исходные данные таблицы отцентрированы относительно их средних арифметических.

По результатам изменения во времени комплексного коэффициента пропорциональности можно заметить, что для наблюдений, соответствующих 1981, 1982 и 1983 году комплексный коэффициент пропорциональности существенно отличается от значений всего ряда. Это легко объяснить – ведь проведено предварительное центрирование исходных данных относительно их средних арифметических, поэтому в точках, где наблюдения за ресурсами по своему значению приближаются к средним арифметическим, их разность близка к нулю, а в результате деления на малую величину, что предусматривается формулами (4.3.8) и (4.3.9), получаются значительные расчётные величины коэффициентов.

Таблица 4.1.

Расчёт коэффициентов использования ресурсов для экономики бывшего СССР с 1972 по 1989 г.

Год	Национальный доход, Q_t	Основные производственные фонды, K_t	Среднегодовая численность промышленно-производственного персонала, L_t	Коэффициенты использования ресурсов	
				a_0	a_1
1972	1,000	1,000	1,000	0,553187	0,066240
1973	1,079	1,091	1,013	0,521700	0,061203
1974	1,130	1,193	1,029	0,526128	0,058947
1975	1,159	1,292	1,049	0,562921	0,055536
1976	1,232	1,393	1,073	0,537856	0,039692
1977	1,295	1,496	1,091	0,523597	0,026845
1978	1,361	1,612	1,109	0,510070	0,008363
1979	1,399	1,724	1,124	0,591209	-0,02362
1980	1,476	1,846	1,136	0,530158	-0,10133
1981	1,554	1,973	1,147	0,200023	0,420264
1982	1,671	2,107	1,159	0,822334	0,244040
1983	1,750	2,247	1,165	0,713303	0,124065
1984	1,819	2,390	1,169	0,641294	0,080584
1985	1,847	2,518	1,174	0,546466	0,057859
1986	1,875	2,649	1,178	0,484325	0,044366
1987	1,914	2,778	1,175	0,456662	0,033584
1988	2,014	2,904	1,151	0,502928	0,019308
1989	2,097	3,024	1,122	0,524799	0,003609

[28] Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных. – М.: ЛКИ, 2008. – С. 50/

Действительно, например, для 1981 года центрированная относительная величина капитальных ресурсов бывшего СССР равна *0,015389*, в то время как для 1984 года она равна *0,432389*. Если игнорировать наблюдения за комплексным коэффициентом в эти годы, то можно заметить, что действительная часть комплексного коэффициента пропорциональности колеблется относительно величины *0,53422*, а мнимая часть комплексного коэффициента пропорциональности колеблется относительно значения *0,04278*, имея всё же тенденцию к некоторому снижению своего значения за весь период наблюдения.

Последнее означает, что в годы существования бывшего СССР для обеспечения национального дохода привлекалось относительно меньшее количество персонала, а это означает некоторый рост производительности труда.

Посмотрим теперь - как линейная производственная функция комплексного аргумента (4.3.6) будет себя вести на примере экономики России и можно ли её использовать для этого случая. В таблице 4.2 приведены соответствующие статистические данные с 1998 по 2004 год. В качестве результата производственной функции Q_t нами используется валовой внутренний продукт, в качестве трудовых затрат L_t – численность занятого в экономике населения, в качестве капитала K_t - инвестиции в основной капитал. В двух последних столбцах этой же таблицы приведены результаты расчёта коэффициентов использования ресурсов.

Таблица 4.2.

Исходные данные для построения производственной функции и расчётные значения коэффициентов использования ресурсов[29]

Год	Валовой внутренний продукт, Q_t		Инвестиции в основной капитал, K_t		Численность занятого в экономике населения, L_t		Коэффициенты использования ресурсов	
	Абсолютные значения, млрд.руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, млрд.руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, млн. чел.	Относительные значения	a_0	a_1
1998	2630	1,000	407,1	1,000	63,6	1,000	0,89868	0,00634
1999	4823	1,834	670,4	1,651	62,7	0,986	0,78225	0,01232
2000	7306	2,778	1165,2	2,860	64,2	1,009	0,78447	0,00901
2001	8944	3,401	1504,7	3,702	64,5	1,014	1,19895	0,07636
2002	10834	4,119	1762,4	4,331	66,2	1,041	1,12936	0,04457
2003	13285	5,051	2186,2	5,371	65,8	1,035	0,97630	0,00944
2004	16779	6,380	3105,1	7,627	66,9	1,053	0,74852	0,00649

[29] Краткосрочные экономические показатели Российской Федерации/Госкомстат России. - Октябрь 2004 (http://www.cir.ru).

Вновь наблюдаем в середине рассматриваемого отрезка влияние масштаба центрированных величин на коэффициенты модели - для 2001 – 2002 года коэффициент в сильно степени подвержен влиянию результатов центрирования. Очевидно, что по полученным значениям сделать вывод о характере производственного процесса сложно - нужны либо более длинные ряды, либо избавляться от свободного комплексного коэффициента иным путём, избегая центрирования относительно средних арифметических.

Итак, самая простая модель комплексного аргумента (4.3.6), не смотря на то, что её коэффициенты имеют простой экономический смысл, не является универсальной, а потому малопригодна для описания реальных экономических ситуаций.

Более сложна, а значит, и более приспособлена для описания реальных экономических процессов линейная ПФКА со свободным членом:

$$Q_t = (b_0 + ib_1) + (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t). \qquad (4.3.10)$$

Этот свободный член снимает жёсткие требования относительно исходных данных и точек отсчёта. Поэтому она может более точно отражать реальные процессы. Впрочем, экономические процессы никогда не бывают линейными или нелинейными в соответствии с некоторой заданной формой. «Всё течёт, всё изменяется» - эту фразу древнего философа Греции следует понимать и к экономике. Все процессы в экономике меняются, меняются и складывающиеся пропорции и обнаруженные закономерности.

Поскольку возможны ситуации, которые описывают модели типа (4.3.10), следует рассмотреть свойства этих моделей и метод нахождения оценок её коэффициентов.

Для этого представим модель (4.3.10) не только в момент t, но и в следующем наблюдении:

$$Q_{t+1} = (b_0 + ib_1) + (a_0 + ia_1)(K_{t+1} + iL_{t+1}). \qquad (4.3.11)$$

Если теперь от левой части равенства (4.3.11) отнять левую часть равенства (4.3.10), а от правой части равенства (4.3.11) отнять правую часть предыдущего равенства, получим:

$$\Delta Q_t = (a_0 + ia_1)(\Delta K_t + i\Delta L_t). \qquad (4.3.12)$$

Откуда легко вывести формулы для вычисления комплексного коэффициента пропорциональности.

Для действительной части коэффициента пропорциональности это будет:

$$a_0 = \frac{\Delta Q_t \Delta K_t}{\Delta K_t^2 + \Delta L_t^2}, \qquad (4.3.13)$$

а для мнимой части коэффициента пропорциональности:

$$a_1 = \frac{\Delta Q_t \Delta L_t}{\Delta K_t^2 + \Delta L_t^2}. \qquad (4.3.14)$$

Поскольку в знаменателе каждой формулы одна и та же величина, характеризующая изменение отдачи масштаба ресурсов, то смысл коэффициентов определяется их числителями.

Первый коэффициент, составляющий действительную часть комплексного коэффициента пропорциональности, отражает прирост капитальных ресурсов, а второй – прирост трудовых ресурсов. Поэтому действительный коэффициент модели (4.3.11) может быть назван коэффициентом экстенсивности капитальных ресурсов, а второй соответственно – коэффициентом экстенсивности трудовых ресурсов.

Воспользовавшись полученными формулами для вычисления коэффициентов, оценим их значения на вышеприведённых примерах.

В табл. 4.3 приведены результаты вычислений по экономике бывшего СССР.

Действительная часть комплексного коэффициента пропорциональности изменяется вокруг некоторого среднего, которое равно 0,535. Колебания эти имеют большой размах, но явно выраженной тенденции к изменению своих значений этот коэффициент не демонстрирует.

Таблица 4.3.
Расчёт коэффициентов экстенсивности использования ресурсов
для экономики бывшего СССР с 1972 по 1989 г.

Год	Прирост национального дохода, ΔQ_t	Прирост основных производственных фондов, ΔK_t	Прирост среднегодовой численности промышленно-производственного персонала, ΔL_t	Коэффициенты использования ресурсов	
				a_0	a_1
1972					
1973	0,079	0,091	0,013	0,850769	0,121538
1974	0,051	0,102	0,016	0,487992	0,076548
1975	0,029	0,099	0,020	0,281443	0,056857
1976	0,073	0,101	0,024	0,684142	0,162568
1977	0,063	0,103	0,018	0,593524	0,103723
1978	0,066	0,116	0,018	0,555588	0,086212
1979	0,038	0,112	0,015	0,333307	0,044639
1980	0,077	0,122	0,012	0,625100	0,061485
1981	0,078	0,127	0,011	0,609600	0,052800
1982	0,117	0,134	0,012	0,866188	0,077569

1983	0,079	0,140	0,006	0,563251	0,024139
1984	0,069	0,143	0,004	0,48214	0,013486
1985	0,028	0,128	0,005	0,218417	0,008532
1986	0,028	0,131	0,004	0,213541	0,006520
1987	0,039	0,129	-0,003	0,302162	-0,00703
1988	0,100	0,126	-0,024	0,765864	-0,14588
1989	0,083	0,120	-0,029	0,65350	-0,15793

Мнимая часть комплексного коэффициента пропорциональности, которая в определённой степени отражает интенсивность использования трудовых ресурсов, демонстрирует уменьшение своих значений во времени. Если попытаться дать некоторую смысловую интерпретацию этой тенденции, то можно говорить о том, что трудовые ресурсы в бывшем СССР с каждым годом использовались всё менее и менее экстенсивно, то есть – всё более и более интенсивно по сравнению с предыдущим годом. Это означает рост производительности труда. Именно такой вывод был получен и с помощью модели (4.3.1). В первом приближении эту тенденцию изменения коэффициента экстенсивности использования трудовых ресурсов можно описать моделью линейного тренда:

$$a_{1t} = 0{,}1575 - 0{,}0137t\,.$$

Тогда с помощью линейной ПФКА производственный процесс в бывшем СССР может быть более или менее удачно описан моделью:

$$\Delta Q_t = \left(0{,}535 + i(0{,}1575 - 0{,}0137t)\right)\left(\Delta K_t + i\Delta L_t\right),$$

где t=*T-1972, T* – текущий год.

Здесь следует указать на то, что формулы (4.3.13) и (4.3.14) будут стремиться к бесконечности, если прирост капитала и трудовых ресурсов незначителен и близок к нулю.

Посмотрим, что может дать эта модель линейной ПФКА на примере экономики России. Поскольку нас интересует демонстрация возможностей рассматриваемой модели, можно остановиться на тех данных, которые были приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.4.

Исходные данные для построения производственной функции и расчётные значения коэффициентов использования ресурсов

Год	Прирост ВВП, ΔQ_t	Прирост инвестиций в основной капитал, ΔK_t	Прирост численность занятого в экономике населения, ΔL_t	Коэффициенты экстенсивности использования ресурсов	
				a_0	a_1
1998					

1999	0,834	0,651	-0,014	-38,7810	-0,018330
2000	0,944	1,209	0,023	49,62157	0,017623
2001	0,623	0,842	0,005	104,9132	0,003678
2002	0,718	0,629	0,027	16,72674	0,029552
2003	0,932	1,04	-0,006	-161,5470	-0,005410
2004	1,329	2,256	0,018	166,5680	0,010520

В табл. 4.4 приведены результаты расчёта коэффициентов экстенсивности использования капитальных и трудовых ресурсов. Как можно обнаружить из анализа характера изменения этих коэффициентов во времени, ни первый коэффициент, ни второй никакой тенденции изменения во времени не имеют. Следовательно, линейная ПФКА для моделирования экономики России по используемым данным применяться не может.

Естественно, что можно и не высчитывать значения коэффициентов на каждом наблюдении, а оценивать их величины на всём множестве наблюдений с помощью МНК.

Так, для центрированных исходных данных (то есть – для модели (4.3.1)), для вычисления оценок МНК модели комплексного аргумента необходимо решить комплексное уравнение:

$$a_0 + ia_1 = \frac{\sum Q_t (K_t + iL_t)}{\sum (K_t + iL_t)^2}. \qquad (4.3.15)$$

Применительно к примеру бывшего СССР оценки МНК комплексного коэффициента пропорциональности оказались такими:

$$a_0 + ia_1 = 0,52936 - i0,03976$$

Вычисление значений коэффициента на каждом наблюдении и расчёт их средних значений, приведённый ранее давал такие значения этого комплексного коэффициента пропорциональности:

$$a_0 + ia_1 = 0,53422 + i0,04278$$

Значения действительной части коэффициента близки друг другу, но значения мнимой части – отличаются. Поэтому, понимая, что оценки МНК свободны от недостатков процедуры вычисления коэффициентов на каждом наблюдении, в случае, когда экономист принимает решение использовать модель производственной функции в форме линейной функции комплексного аргумента, ему следует использовать оценки МНК.

4.4. Степенная производственная функция

Двухфакторная линейная зависимость в области действительных переменных представляет собой уравнение плоскости в трёхмерном пространстве. Линейная модель комплексного аргумента, как было выяснено ранее – представляет собой уравнение прямой линии.

Нелинейные двухфакторные модели действительных переменных представляют собой уравнение нелинейных поверхностей в трёхмерном пространстве, а нелинейные модели комплексного аргумента, соответственно, представляют собой уравнение некоторой кривой линии в трёхмерном пространстве. Зная это, рассмотрим нелинейные модели производственной функции комплексного аргумента.

Начнём это рассмотрение с традиционной для теории производственной функций формы – степенной модели. Из всего разнообразия форм степенных комплекснозначных функций рассмотрим вначале функцию с действительными коэффициентами. Она будет иметь вид:

$$Q_t = a(K_t + iL_t)^b . \tag{4.4.1}$$

Линеаризуя её, получим:

$$\ln Q_t = \ln a + b\ln(K_t + iL_t) . \tag{4.4.2}$$

Выделяя действительную и мнимую части линеаризованной функции, и используя главное значение логарифма, получим следующие равенства:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln a + b\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}, \\ 0 = barctg\,\dfrac{L_t}{K_t} \end{cases} . \tag{4.4.3}$$

Из второго равенства имеем обязательное условие: $L_t=0$, что означает невозможность использования этой модели в моделировании производственных процессов.

Усложним модель за счёт введения в неё комплексного коэффициента пропорциональности:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t)^b . \tag{4.4.4}$$

Логарифмируем левые и правые части модели:

$$\ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} + iarctg\,\frac{a_1}{a_0} + b\ln(K_t + iL_t) . \tag{4.4.5}$$

Теперь, приводя отдельно действительную и мнимую части полученных равенств, модель может быть представима в виде системы двух равенств:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} + b\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}, \\ arctg\dfrac{a_1}{a_0} = -barctg\dfrac{L_t}{K_t}. \end{cases} \tag{4.4.6}$$

Из полученной системы следует вывод о том, что степенная производственная функция комплексного аргумента (4.4.4) может использоваться в том случае, когда между ресурсами имеется линейная зависимость (не важно – прямая или обратная) с постоянным углом наклона между ними.

При этом зависимость между производственными ресурсами и производственным результатом носит сложный характер, который сложно понять из первого равенства (4.4.6). Но её суть можно определить из экспоненциальной формы записи модели (4.4.4):

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\,(L_t^2 + K_t^2)^b\,. \tag{4.4.7}$$

Для наглядного представления этой зависимости следует воспользоваться известным в теории производственных функций приёмом - определением уравнения изокванты. Следует напомнить, что график изокванты представляет собой совокупность точек на плоскости ресурсов, каждой из которых соответствует одно и то же значение производственного результата. Поэтому, полагая $Q = const$, можно получить уравнение изокванты для модели (4.4.4):

$$L_t^2 + K_t^2 = C\,, \tag{4.4.8}$$

где

$$C = \left(\frac{Q}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}\right)^{\frac{1}{b}}. \tag{4.4.9}$$

Таким образом, изокванты модели (4.4.4) представляют собой вид окружностей с разными диаметрами, величина которых определяется производственным результатом и коэффициентами модели. Если рассматривать трёхмерное пространство, то это означает что проекции на плоскость ресурсов фигуры, описываемой моделью (4.4.9), представляют собой окружности.

Следовательно, в трёхмерном пространстве модель (4.4.4) представляет собой пересечение плоскости, перпендикулярной плоскости ресурсов и для которой отношение между ресурсами есть величина постоянная, и нелинейной поверхности, на которой всё точки с равными объемами представляют собой окружность (4.4.9).

Если показатель степени b равен единице, то линия их пересечения, будет являться прямой линией, во всех остальных случаях – нелинейной, вогнутой или выгнутой к плоскости ресурсов.

Для того, чтобы оценить коэффициенты такой модели на практическом материале, следует использовать МНК так, как это показано в разделе комплекснозначной эконометрики предыдущей главы.

Рассмотрим теперь модель производственной функции комплексного аргумента с комплексным коэффициентом пропорциональности и мнимым показателем степени:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)(L_t + iK_t)^{ib}. \tag{4.4.19}$$

Логарифмируя и выделяя действительные и мнимые части, получим:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} - b\,arctg\,\dfrac{K_t}{L_t}, \\ arctg\,\dfrac{a_1}{a_0} = b\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}. \end{cases} \tag{4.4.20}$$

Здесь мы видим из второго равенства, что между ресурсами должна быть зависимость такая, что она описывает окружность. В трёхмерном пространстве это означает модель одной четверти цилиндра, перпендикулярного к плоскости ресурсов.

Между производственными ресурсами и производственным результатом имеется сложная нелинейная зависимость такой формы:

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\,e^{-b\,arctg\frac{K_t}{L_t}}. \tag{4.4.21}$$

Её вид определяется значениями коэффициентов модели.

Если предположить, что производственный результат является величиной постоянной, то можно найти уравнение изокванты такой производственной функции.

Из (4.4.21) при условии постоянства результата имеем очевидное равенство:

$$-b\,arctg\,\frac{K_t}{L_t} = const. \tag{4.4.22}$$

То есть, изокванта представляет собой прямую линию на плоскости ресурсов, выходящую из начала координат.

Легко заметить, что смена показателя степени с действительного на мнимый симметрично поменяла свойства действительной и мнимой частей.

Следовательно, вместе с ограничением на форму изменения ресурсов (цилиндрическую) зависимость производственного результата от ресурсов, изображённая в пространстве, представляет собой нелинейную кривую, располагающуюся на поверхности цилиндра.

Форма этой модели значительно сложнее, чем форма модели с действительным показателем степени.

Степенная форма производственной функции комплексного аргумента может иметь и более сложный вид, если использовать комплексный показатель степени:

$$Q_t = a(L_t + iK_t)^{(b_0 + ib_1)} . \tag{4.4.23}$$

Логарифмируя левую и правую части функции, получим:

$$\ln Q_t = \ln a + (b_0 + ib_1)\ln(L_t + iK_t) = \ln a + (b_0 + ib_1)(\ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} + iarctg\frac{K_t}{L_t}) . \tag{4.4.24}$$

Откуда, выделяя действительную и мнимую части:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln a + b_0 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} - b_1 arctg\dfrac{K_t}{L_t}, \\ 0 = b_0 arctg\dfrac{K_t}{L_t} + b_1 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} . \end{cases} \tag{4.4.25}$$

Из второго равенства этой системы уравнений следует, что модель (4.4.23) пригодна для моделирования производственных процессов, для которых зависимость между ресурсами носит сложный нелинейный характер, представление которой в явном виде проблематично. Поскольку при разных значениях коэффициентов b_0 и b_1 эта зависимость принимает самый различный вид, то она имеет больше оснований для практического применения, нежели модели степенных производственных функций комплексного аргумента, рассмотренные ранее.

Универсальной следует признать степенную производственную функцию комплексного аргумента с комплексными коэффициентами:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)(L_t + iK_t)^{(b_0 + ib_1)} , \tag{4.4.26}$$

поскольку, логарифмируя левую и правую части этой функции, и выделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{cases} \ln Q_t = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2} + b_0 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} - b_1 arctg\,\dfrac{K_t}{L_t}, \\ 0 = arctg\,\dfrac{a_1}{a_0} + b_0 arctg\,\dfrac{K_t}{L_t} + b_1 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2}. \end{cases} \quad (4.4.27)$$

Разные сочетания коэффициентов этой модели позволяет моделировать самые различные нелинейные зависимости производственного результата от ресурсов, зависимость между которыми меняется от линейной (при $b_1=0$) до сложных нелинейных. Коэффициенты такой модели следует находить с помощью МНК так, как об этом говорилось в третьей главе монографии.

Впрочем, использование комплексного показателя степени позволяет находить промежуточные значения этого показателя. Для этого возьмём отношения друг к другу левых и правых частей модели в рядом стоящие моменты времени. Получим:

$$\frac{Q_t}{Q_{t-1}} = \left(\frac{L_t + iK_t}{L_{t-1} + iK_{t-1}}\right)^{b_0 + ib_1}. \quad (4.4.28)$$

Откуда легко найти комплексный показатель степени:

$$b_{t0} + ib_{t1} = \ln\frac{Q_t}{Q_{t-1}} / \ln\left(\frac{L_t + iK_t}{L_{t-1} + iK_{t-1}}\right).$$

Продемонстрируем изменение показателя степени для этой модели на примере экономики России. Для этого будем использовать более длинный ряд данных с 1995 по 2009 год. Результаты вычисления комплексного показателя степени приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5.
Исходные данные (в безразмерных величинах) для построения степенной ПФКА и расчётные значения комплексного показателя степени

Год	ВВП, Q_t	Основные фонды, K_t	Численность экономически активного населения, L_t	Коэффициенты	
				b_0	b_1
1995	1	1	1		
1996	1,406	2,523	0,983	0,373	0,238
1997	1,640	2,564	0,961	5,833	6,783
1998	1,841	2,726	0,950	1,836	0,801
1999	3,376	2,749	1,019	15,272	-19,114
2000	5,114	3,204	1,021	2,715	0,919
2001	6,261	3,906	1,008	1,016	0,312
2002	7,574	4,714	1,022	1,016	0,222
2003	9,246	5,853	1,028	0,924	0,176
2004	11,919	6,280	1,029	3,609	0,603

2005	15,127	7,404	1,042	1,450	0,204
2006	18,843	8,457	1,046	1,653	0,210
2007	23,274	10,469	1,059	0,990	0,105
2008	29,001	12,457	1,071	1,266	0,111
2009	27,371	14,371	1,056	-0,404	-0,035

На протяжении всего периода вычислений комплексный показатель степени менял свои значения. Особенно это заметно для ситуации времени дефолта – 1998-1999 годы. Расчётное значение коэффициента существенно изменилось. Если же рассматривать комплексный показатель степени за последующий период, то его действительная и мнимая части менялись не столь значительно. Следовательно, в этот период модель (4.4.26) может описать производство более или менее удовлетворительно.

В завершение обзора модели степенной производственной функции комплексного аргумента необходимо отметить, что экономическая интерпретация её коэффициентов затруднительна. Это можно рассматривать как недостаток модели по сравнению с простой линейной производственной функцией комплексного аргумента. В то же время сложно найти производственные процессы, которые бы изменялись по линейному закону, поэтому экономическая простота интерпретации, похоже, не только очевидное, но и единственное преимущество линейной модели.

Существенным преимуществом степенной ПФКА является то, что ареал её применения несравнимо более обширен, поскольку при $b_0=1$ и $b_1=0$ модель (4.4.26) превращается именно в модель линейной производственной функции комплексного аргумента, что говорит о том, что линейная модель ПФКА является частным случаем степенной модели. Кстати, при $b_0=1$ и $b_1=0$ моделируется обратно пропорциональная комплекснозначная зависимость, которая в теории производственных функциях вряд ли применима, поскольку увеличение производственных ресурсов этой модели приводит к уменьшению производственного результата.

4.5. Показательная производственная функция комплексного аргумента

Из семейства возможных моделей показательных производственных функций комплексного аргумента рассмотрим показательную функцию по натуральному основанию, понимая, что с таким же успехом могут быть применены и другие основания – десятичные, двоичные и т.п.

Исследование этой функции начнём, как и прежде по принципу: от простого – к сложному. Самой простой в этом семействе представляется модель показательной функции с действительными коэффициентами:

$$Q_t = ae^{b(K_t + iL_t)}. \tag{4.5.1}$$

Эта функция легко может быть преобразована к такому виду:

$$Q_t = ae^{bK_t}e^{ibL_t}. \tag{4.5.2}$$

В силу того, что для комплексных переменных об их равенстве друг другу можно говорить только в том случае, когда равны друг другу действительные и мнимые части, можно убедиться в том, что эта модель означает систему двух равенств:

$$\begin{cases} Q_t = ae^{bK_t}, \\ 2\pi k = bL_t. \end{cases} \tag{4.5.3}$$

Здесь *k=0,1,2,3,…*

Любое значение *k* свидетельствует только об одном – трудовые ресурсы здесь рассматриваются как величина постоянная. А из первого равенства системы, видно, что эта модель представляет собой однофакторную степенную зависимость объёма производства от капитальных ресурсов при постоянной величине труда, никак не влияющего ни на результат, ни на другой ресурс. Использовать такую модель на практике не имеет никакого смысла.

Точно такой же, но «симметричный» относительно производственных ресурсов смысл имеет показательная функция с мнимым показателем степени:

$$Q_t = ae^{ib(K_t + iL_t)}. \tag{4.5.4}$$

Эта функция легко может быть преобразована к такому виду:

$$Q_t = ae^{ibK_t}e^{-bL_t}. \tag{4.5.5}$$

Откуда:

$$\begin{cases} Q_t = ae^{-bL_t}, \\ 2\pi k = bK_t. \end{cases} \tag{4.5.6}$$

Что вновь свидетельствует о том, что моделируется всё та же однофакторная зависимость производственного результата от труда при постоянстве капитальных ресурсов.

Не особо изменится практическая значимость этой модели, если использовать теперь не действительный, а мнимый коэффициент пропорциональности:

$$Q_t = iae^{b(K_t + iL_t)}. \tag{4.5.7}$$

И эта функция может быть преобразована к удобному для понимания её сути виду:

$$Q_t = ae^{i(\pi/2)}e^{bK_t}e^{ibL_t}. \tag{4.5.8}$$

Аргумент мнимого коэффициента пропорциональности определён с точностью до одного периода. Теперь легко получить систему двух уравнений, характеризующих действительную и мнимую части модели (4.5.7):

$$\begin{cases} Q_t = ae^{bK_t}, \\ \dfrac{\pi}{2} = -bL_t. \end{cases} \tag{4.5.9}$$

И это означает, что модель (4.5.7) предполагает априорное постоянство капитального ресурса, что делает использование и такой комплекснозначной модели бессмысленным.

Усложним модель за счёт использования комплексного коэффициента пропорциональности оставляя вещественном коэффициент пропорциональности при показателе степени:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)e^{b(K_t + iL_t)}. \tag{4.5.10}$$

Эта модель комплексного аргумента может быть представлена в виде равенств друг другу вещественной и мнимой частей, что составляет следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\,e^{bK_t}, \\ 2\pi k = arctg\,\dfrac{a_1}{a_0} + bL_t. \end{cases} \tag{4.5.11}$$

И вновь мы видим, что эта модель предполагает априорное выполнение постоянства трудового ресурса (второе уравнение системы (4.5.11)) и однофакторную зависимость производственного результата от капитальных ресурсов.

Таким образом, в отличие от модели степенной производственной функции комплексного аргумента модель показательной производственной функции комплексного аргумента лишена многообразия и может быть представлена для практических целей исключительно в форме с комплексным показателем степени:

$$Q_t = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(K_t+iL_t)}. \qquad (4.5.12)$$

Рассмотрим свойства модели (4.5.12), как единственной формы показательной производственной функции комплексного аргумента.

Выделяя её действительную и мнимую части, получим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\,\dfrac{e^{b_0 K_t}}{e^{b_1 L_t}}, \\ 2\pi k = arctg\,\dfrac{a_1}{a_0} + b_0 L_t + b_1 K_t. \end{cases} \qquad (4.5.13)$$

Из второго уравнения системы следует, что модель показательной степенной функции комплексного аргумента предполагает априорное наличие линейной зависимости между производственными ресурсами, причём – при положительности коэффициентов показателя степени эта зависимость обратно пропорциональная.

Первое уравнение показывает, что аналогом комплекснозначной функции (4.5.12) в области действительных переменных (при линейном изменении ресурсов) выступает экспоненциальная модель:

$$Q_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\,\frac{e^{b_0 L_t}}{e^{b_1 K_t}} = ae^{b_0 L_t - b_1 K_t}.$$

Эта же функция в логарифмах будет выглядеть так:

$$\ln Q_t = A + b_0 L_t - b_1 K_t. \qquad (4.5.14)$$

Графически модель будет представлять собой экспоненту, расположенную на плоскости, перпендикулярной оси ресурсов, все точки на которой удовлетворяют второму равенству системы (4.5.13).

Найти коэффициенты такой модели с помощью МНК не представляет особых затруднений.

Впрочем, есть возможность, не прибегая к МНК, определить - насколько модель может быть пригодна для описания реальной экономической производственной ситуации.

Для этого разделим левые и правые части равенства (4.5.12) в момент времени *t* на левые и правые части этого же равенства в предыдущий момент. Получим:

$$\frac{Q_t}{Q_{t-1}} = e^{(b_0+ib_1)(\Delta K_t+i\Delta L_t)}. \qquad (4.5.15)$$

Тогда комплексный показатель степени можно определить по двум значениям исходных переменных:

$$b_0 + ib_1 = \frac{\ln \dfrac{Q_t}{Q_{t-1}}}{\Delta K_t + i\Delta L_t}. \tag{4.5.16}$$

Для демонстрации такой возможности вновь будем использовать пример экономики России. Исходные данные и результаты сведены в табл. 4.6.

Таблица 4.6.
Показательная ПФКА и
расчётные значения комплексного показателя степени

Год	ВВП, Q_t	Основные фонды, K_t	Численность экономически активного населения, L_t	Коэффициенты	
				b_0	b_1
1995	1	1	1		
1996	1,406	2,523	0,983	2,891	0,002
1997	1,640	2,564	0,961	0,711	1,562
1998	1,841	2,726	0,950	2,717	0,046
1999	3,376	2,749	1,019	0,912	-7,959
2000	5,114	3,204	1,021	0,288	-0,004
2001	6,261	3,906	1,008	0,235	0,005
2002	7,574	4,714	1,022	0,175	-0,004
2003	9,246	5,853	1,028	0,595	-0,001
2004	11,919	6,280	1,029	0,212	-0,001
2005	15,127	7,404	1,042	0,209	-0,002
2006	18,843	8,457	1,046	0,105	-0,001
2007	23,274	10,469	1,059	0,111	-0,001
2008	29,001	12,457	1,071	-0,030	-0,001
2009	27,371	14,371	1,056	0,000	0,000

Как видно из таблицы, комплексный показатель степени показательной ПФКА меняется, особенно его действительная часть. Это свидетельствует о том, что такая модель для моделирования протекающего производственного процесса не пригодна.

4.6.Логарифмическая производственная функция комплексного аргумента

Логарифмическая функция комплексной переменной является периодической функцией и мы будем, как и договаривались в начале монографии, использовать исключительно главное значение логарифма. В этом случае логарифмическая производственная функция комплексного аргумента примет следующий вид:

$$Q_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t)\,. \qquad (4.6.1)$$

В этой функции влияние свободного члена очевидно – вещественная часть этого коэффициента a_0 характеризует сдвиг производственного результата при начальных значениях переменных, а мнимая часть коэффициента a_1 характеризует корректировку мнимой части равенства. Поскольку иных интерпретаций и влияний на результаты моделирования производства этот комплексный коэффициент не оказывает, для рассмотрения свойств модели им вначале можно пренебречь. Тогда без ущемления общности задачи модель логарифмической производственной функции комплексного аргумента может быть представлена так:

$$Q_t = (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t)\,. \qquad (4.6.2)$$

Эту функцию легко привести к форме, удобной для исследования, а именно – к системе двух равенств, действительных частей и мнимых частей. Эта система будет иметь вид:

$$\begin{cases} Q_t = b_0 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} - b_1 arctg\,\dfrac{L_t}{K_t}, \\ 2\pi k = b_1 \ln\sqrt{L_t^2 + K_t^2} + b_0 arctg\,\dfrac{L_t}{K_t}. \end{cases} \qquad (4.6.3)$$

Второе равенство этой системы, как и прежде, характеризует априорное утверждение о том, какова взаимосвязь между производственными ресурсами, а первое равенство представляет собой аналог комплекснозначной модели на множестве вещественных чисел.

Как можно заметить из второго равенства данная модель предполагает наличие самых разных форм зависимости между производственными ресурсами. Эти формы определяются, в первую очередь значениями коэффициентов b_0 и b_1 . Так, если например, равен нулю коэффициент b_0, то зависимость между ресурсами должна описываться уравнением окружности. А если равен нулю коэффициент b_1, то зависимость между ресурсами описывается прямой линией. В том случае, когда эти коэффициенты не равны нулю, то зависимость между производственными ресурсами может принимать самые разные формы, в том числе, и так, как изображаются изокванты «неоклассических производственных функций». С этих позиций модель логарифмической производственной функции комплексного аргумента является универсальной.

Поскольку и первое равенство системы, моделирующее зависимость между производственными ресурсами и производственным результатом, также представляет собой комбинацию уравнения окружности и уравнение арктангенса, то и оно в зависимости от значений и знаков коэффициентов может описывать довольно разнообразное сочетание прямой линии и окружности. Кривая в пространстве, которая в итоге получается как пересечение этих двух нелинейных поверхностей, имеет сложный характер и модель в состоянии описывать сложные траектории развития производственных систем.

Существенным достоинством этой модели является то очевидное обстоятельство, что (4.6.5) представляет собой систему двух уравнений с двумя неизвестными, поэтому коэффициенты модели могут быть найдены с помощью всего одного наблюдения за производственным процессом. То есть, практическое применение такой модели представляется простым.

Действительно, из (4.6.2) следует формула для нахождения комплексного коэффициента пропорциональности:

$$b_0 + ib_1 = \frac{Q_t}{\ln(K_t + iL_t)}. \tag{4.6.4}$$

Вновь применим эту формулу к данным по экономике России за последние годы. В табл. 4.7 приведены только результаты вычисления комплексного коэффициента пропорциональности.

Таблица 4.7.

Комплексный коэффициент пропорциональности логарифмической ПФКА

Год	Коэффициенты	
	b_0	b_1
1995	0,470	-1,066
1996	1,239	-0,462
1997	1,445	-0,514
1998	1,578	-0,499
1999	2,831	-0,934
2000	3,961	-1,007
2001	4,346	-0,787
2002	4,726	-0,641
2003	5,139	-0,501
2004	6,392	-0,561
2005	7,483	-0,520
2006	8,766	-0,504
2007	9,871	-0,423
2008	11,468	-0,389
2009	10,252	-0,282

Результаты вычислений коэффициентов логарифмической модели показывают, что обе части комплексного коэффициента возрастают во времени. Причём, начиная с 2001 года почти линейно. Поэтому, например, логарифмическую функцию можно использовать для практики, описав тренды изменения коэффициентов так:

$$Q_t = (0{,}9281\mathrm{t} + 2{,}9644 + i(0{,}0498\mathrm{t} - 0{,}7611))\ln(K_t + iL_t)$$

Поскольку сама возможность моделирования производства макроуровня России с помощью логарифмической ПФКА не отвергается, возможно использование этой функции со свободным членом (4.6.1):

$$Q_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t)\,.$$

Для проверки такой возможности вновь вычислим коэффициенты, меняющиеся во времени. Для этого воспользуемся разностями между левыми и правыми частями показателей, отличающихся друг от друга на единицу времени:

$$Q_t - Q_{t-1} = (b_0 + ib_1)\ln\frac{K_t + iL_t}{K_{t-1} + iL_{t-1}}\,. \qquad (4.6.5)$$

Откуда легко вычислить комплексный коэффициент пропорциональности для логарифмической ПФКА с комплексным свободным членом (4.6.1):

$$b_0 + ib_1 = \frac{Q_t - Q_{t-1}}{\ln\dfrac{K_t + iL_t}{K_{t-1} + iL_{t-1}}}\,. \qquad (4.6.6)$$

Расчёты этого комплексного коэффициента пропорциональности приведены в табл. 4.8.

Таблица 4.8.
Комплексный коэффициент пропорциональности
логарифмической ПФКА со свободным членом

Год	Коэффициенты	
	b_0	b_1
1995	0,444122	0,282994
1996	8,863934	10,30833
1997	3,191134	1,391758
1998	38,66129	-48,387
1999	11,36293	3,844329

2000	5,759372	1,769688
2001	7,008043	1,528732
2002	7,741272	1,471488
2003	37,98628	6,349217
2004	19,5134	2,739132
2005	27,95692	3,559588
2006	20,77293	2,194427
2007	32,95931	2,880673
2008	-11,3934	-0,99884
2009	0,444122	0,282994

Оба коэффициента, представленные в таблице, меняют во времени как свои значения, так и знаки. Причём это изменение носит мало предсказуемый характер с очень высокой дисперсией, поэтому следует однозначный вывод – для моделирования данного процесса логарифмическая ПФКА со свободным членом использоваться не может.

В завершение параграфа следует отметить, что логарифмическая функция – это функция периодическая, а, следовательно, при её практическом использовании следует это иметь всегда в виду.

4.7. Обобщение главы

Теория функций комплексного переменного не рассматривает модели комплексного аргумента – когда действительная переменная зависит от комплексной. Возможно, что это и сделано где-то в специальных главах ТФКП, но они не доступны для анализа. Поскольку комплексный аргумент сам по себе представляет двухфакторную зависимость, то аналогия между двухфакторными производственными функциями действительных переменных и моделями комплексного аргумента напрашиваются сами собой.

В этой главе было показано – как модели комплексного аргумента могут выступать в виде моделей производственных функций, как они могут моделировать разнообразные производственные процессы. Как продемонстрировали примеры, приведённые в данной главе, в некоторых случаях отдельные модели вполне прилично описывают реальные производственные процессы на макроуровнях, другие модели к описанию этих процессов не пригодны. Но ведь разнообразие производственных процессов вовсе не сводится к тем примерам с реальными данными, которые приведены в этой главе. Их значительно больше. Реальные производственные процессы имеют столь разнообразный характер взаимосвязей, что «втискивание» их в «прокрустово ложе» неоклассических функций, которое повсеместно осуществляют экономисты, приводит к очевидным результатам – с помощью этих моделей искажается отображение реальности, и зачастую, весьма существенно.

Поэтому задача расширения инструментария теории производственных функций является весьма актуальной. И здесь, как нельзя кстати, появляется аппарат ПФКА. Исследование, результаты которого приведены в четвёртой главе, свидетельствует о том, что каждая из рассмотренных моделей комплексного аргумента будет наилучшей для описания какого-то своего, оригинального производственного процесса. Вычисление траекторий производственного процесса для каждой из рассмотренных производственных функций комплексного аргумента на условных примерах показывает, что они генерируют самые разнообразные формы – выпуклые, вогнутые, возрастающие, убывающие, с асимптотой и без неё… Каждый читатель может получить эти траектории самостоятельно, подставляя в формулы моделей собственные ряды и задавая при этом разные значения коэффициентов. Приводить поэтому в этой главе всё это многообразие не было смысла, главное было – показать саму принципиальную возможность использования в экономике моделей комплексного аргумента. Их использование в моделировании производственных процессов обогащает инструментальную базу экономиста, но практически каждая из описанных моделей, как было показано, имеет свой аналог в области вещественных чисел.

Принципиально важным новым результатом, который в этой главе выявил новые стороны математического аппарата теории функций комплексных переменных применительно к решению экономических задач, оказалась возможность построения линейной двухфакторной модели в условиях мультиколлинеарности. Как было показано в этой главе, методы действительных переменных не позволяют удовлетворительно решить такую задачу, а ТФКП даёт весьма обнадёживающие результаты. Двухфакторная линейная модель действительных переменных представляет собой уравнение плоскости в трёхмерном пространстве. Поэтому в ситуации, когда точки, лежащие на этой плоскости, находятся на прямой линии (мультиколлинеарность), МНК демонстрирует свою беспомощность в нахождении уравнения этой плоскости. Линейная функция комплексного аргумента описывает именно эту прямую линию в трёхмерном пространстве. Поэтому МНК, применённый к этой функции, даёт устойчивые оценки двухфакторной модели в условиях мультиколлинеарности.

Поскольку нелинейные функции комплексного аргумента зачастую означают наличие линейной зависимости между ресурсами, то проблема влияния мультиколлинеарности на результаты построения двухфакторных нелинейных моделей может проявиться и в этом случае. Нелинейные модели комплексного аргумента в этом случае будут давать устойчивые значения коэффициентов модели, поскольку они только в этом случае и имеют право на существование.

И вообще, следует указать на важную особенность, отличающую модели комплексного аргумента от двухфакторных моделей действительных переменных. Модели действительных переменных описывают плоскость (в линейном случае) или нелинейные поверхности в трёхмерном пространстве.

Модели комплексного аргумента описывают прямую линию, лежащую на плоскости (в линейном случае) или кривую, лежащую на поверхностях.

Это обстоятельство свидетельствует о том, что ПФКА имеют довольно узкий ареал применения по сравнению с моделями действительных переменных, но они описывают именно те процессы, описание которых моделями действительных переменных осуществляется плохо.

Здесь следует указать ещё на одну уникальную возможность, которой мы воспользуемся в некоторых последующих главах. Она заключается в том, что если есть возможность использовать зависимость вещественной переменной от комплексной:

$$y_t = f(x_{rt} + ix_{it}), \tag{4.7.1}$$

то существует и обратная зависимость, а значит, и возможность рассматривать зависимость комплексной переменной от некоторого вещественного аргумента:

$$x_{rt} + ix_{it} = F(y_t), \tag{4.7.2}$$

Очевидно, что такое «преобразование» действительной переменной в комплексную возможно с помощью соответствующей комплекснозначной функции, например, возведением в комплексную степень.

Такая возможность отвечает ряду реально существующих экономических явлений, когда, например, повышение дохода потребителя приводит к тому, что его функция спроса определяется изменением как цены единицы изделия, которое его удовлетворяет, так и количества товаров, которое он готов приобрести по этой цене. Поэтому подобные функции могут в экономике найти самое широкое распространение. Но останавливаться на такой возможности в данной главе мы не будем.

Вся мощь теории функций комплексного аргумента, существенные преимущества моделей, использующих элементы ТФКА, проявляется при построении моделей зависимости одной комплексной переменной от другой. В этом смысле модели комплексного аргумента представляются лишь «введением» в новый аппарат теории производственных функций, а именно – в аппарат производственных функций комплексных переменных.

Глава пятая. Производственные функции комплексных переменных

5.1. Общие положения теории производственных функций комплексных переменных

Функции комплексного аргумента представляют собой некоторое «усечение» свойств функций комплексных переменных – в них описывалась зависимость вещественной переменной от комплексной, которая выступала как комплексный аргумент функции. Уже только такая постановка задачи применительно к одному из разделов экономики – теории производственных функций, - привело к получению новых научных результатов. Естественно, следует ожидать ещё более многообразных и впечатляющих результатов, если использовать в экономике функции комплексных переменных - зависимость одной комплексной переменной от другой. Поскольку комплексная переменная по своей сути, представляет собой некоторую двухфакторную модель, то тем самым рассматривается зависимость одной пары экономических показателей от другой пары. Естественно предположить применительно к экономическим задачам, что одна пара – комплексный аргумент, - может представлять собой производственные ресурсы, а другая пара – комплексный результат, - может представлять собой показатели производства. Такая зависимость, связывающая производственные ресурсы с производственным результатом, будет являться производственной функцией.

Формально производственные функции представляют собой некоторую математическую зависимость производственного результата от производственных ресурсов при целом ряде исходных допущений. Из множества производственных ресурсов для построения производственных функций используют только два ресурса – производственный капитал K в самых разных его формах, и труд L. Эти два ресурса являются в определённой степени взаимозаменяемыми, поэтому используют в основном именно их. В предыдущей главе мы использовали именно эти два ресурса как одну комплексную переменную, отмечая при этом, что особой разницы нет - какую переменную отнести к действительной, а какую к мнимой части комплексной переменной комплексного производственного ресурса. В моделях производственных функций комплексных переменных уже возникает необходимость такой порядок задать, поскольку, как будет показано далее, он имеет экономический смысл.

Поэтому будем придерживаться такого правила формирования комплексного производственного ресурса – к действительной части будем относить капитал, а к мнимой – труд. Тогда комплексный аргумент таких функций будет записываться так:

$$K_t + iL_t. \qquad (5.1.1)$$

Поскольку все примеры, которые будут рассмотрены в этой главе, касаются исключительно социально-экономической динамики, то у всех переменных имеется индекс упорядочивания t. Если возникает задача построить некоторые производственные функции не на временном множестве, а на каком-то другом, индекс легко заменим.

Результат производства может демонстрироваться самыми различными технико-экономическими показателями. В теории производственных функций используется в основном один показатель – объём произведённой и реализованной продукции Q_t. Очевидно, что в таком случае и высказываются все предположения относительно производственных функций: о том, что спрос ненасыщенный; о том, что цена неизменна и т.п.

Но в реальной экономической практике о производственных результатах никто не судит только по объёму продукции, важно понимать успешность экономической деятельности, а об этом свидетельствуют такие показатели экономической эффективности, в первую очередь такие, как валовая прибыль G_t, издержки производства C_t и базирующиеся на них показатели рентабельности производства R_t.

Поскольку валовая прибыль, издержки производства и валовой объём производства связаны друг с другом элементарным соотношением:

$$Q_t = G_t + C_t,$$

то, вычисляя любую пару из этой «троицы», легко рассчитать третий показатель.

С их помощью легко вычисляется и ещё одни показатель экономической эффективности – рентабельность:

$$R_t = \frac{G_t}{C_t} = \frac{Q_t - C_t}{C_t}.$$

А для того, чтобы сформировать комплексную переменную производственного результата, нам как раз и необходима пара переменных, отражающая разные стороны одного процесса и имеющие одинаковую размерность и масштаб. Поскольку различное сочетание производственных ресурсов приводит к различному сочетанию издержек производства и валовой прибыли, и, как следствие этого, к разным объёмам валового производства и рентабельностям, то частями комплексной переменной производственного результата должны выступать именно переменные валовой прибыли G_t и издержек производства C_t.

Комплексная переменная производственного результата, в которую включаются валовая прибыль G_t и издержки производства C_t, предлагается представлять в таком виде:

$$G_t + iC_t. \tag{5.1.2}$$

И здесь отнесение валовой прибыли в действительную часть, а издержек в мнимую часть комплексной переменной производственных ресурсов сделано не случайно. Этот порядок определяется тем, как мы сформировали комплексную переменную производственных ресурсов (5.1.1), и смысл такого порядка будет ясен при изучении соответствующих производственных функций.

На рис. 5.1 даны две структурные схемы, с помощью которых можно наглядно получить представление о том, в чём, собственно говоря, принципиальное различие между производственными функциями действительных переменных и производственными функциями комплексных переменных.

Производственные функции действительных переменных моделируют влияние производственных ресурсов на валовой объём, а производственные функции комплексных переменных – сначала моделируют влияние производственных ресурсов на валовую прибыль и на издержки производства, а уж затем, на основе этой информации – влияние на валовой объём. Соотношение валовой прибыли и издержек характеризует рентабельность.

Теперь становится очевидным, что производственные функции комплексных переменных более подробно описывают производственный процесс, нежели производственные функции действительных переменных, поэтому от комплекснозначных моделей следует ожидать большей точности и достоверности описания производственных процессов.

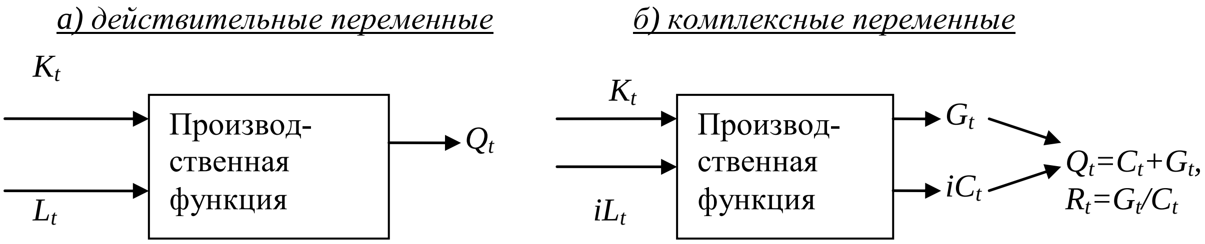

Рис. 5.1. Структурная схема производственных функций действительных переменных *а)* и комплексных переменных *б)*

Схема *б)* рис. 5.1 позволяет понять, что в общем виде производственная функция комплексных переменных может быть представлена так:

$$G_t + iC_t = F(K_t + iL_t)\,. \qquad (5.1.3)$$

Функций, которые связывают зависимостью (5.1.3) две комплексные переменные $G_t + iC_t$ и $K_t + iL_t$, много. Поскольку производственные процессы отличаются друг от друга: уровнем иерархии (предприятие, группа предприятий, региональное производство, национальное производство, мировое производство и т.п.), спецификой производства (сельскохозяйственное производство, машиностроение, лёгкая промышленность, нефтедобыча, производство электронергии и т.п.), национально-географическими особенностями (трудоизбыточное население или трудодефицитное; наличие источников сырья и транспортных узлов; тёплый, жаркий или холодный климат и т.п.), то некоторой единой стандартной производственной функции комплексных переменных, которая наилучшим образом описывает все эти многообразные производственные процессы, меняя лишь в зависимости от ситуации значения своих коэффициентов, не существует. В каждом случае экономист должен выбрать из имеющегося множества возможных функций наилучшую. Поэтому в данной главе и будут изучены производственный функции комплексных переменных (ПФКП) самых разных видов из числа элементарных функций, конформное отображение которых было рассмотрено во второй главе монографии.

Из (5.1.3) следует, что с помощью комплекснозначных функций моделируется сразу два экономических показателя – валовая прибыль и издержки производства, но как уже писалось, это модель трёх производственных результатов. Ведь сумма валовой прибыли и издержек производства представляет собой ни что иное, как валовой выпуск:

$$G_t + C_t = Q_t. \tag{5.1.4}$$

Функцию (5.1.3) можно представить и иначе, воспользовавшись представлением комплексного ресурса в экспоненциальной форме:

$$G_t + iC_t = R_t e^{i\theta_t}. \tag{5.1.5}$$

Откуда легко получить:

$$\begin{cases} G_t = R_t \cos\theta_t, \\ C_t = R_t \sin\theta_t, \\ Q_t = R_t(\cos\theta_t + \sin\theta_t). \end{cases} \tag{5.1.6}$$

Здесь полярный угол комплексной переменной находится так:

$$\theta_t = arctg\frac{C_t}{G_t} = arctg\frac{1}{R_t}.$$

То есть – он отражает рентабельность производства. В том случае, когда предприятие работает бесприбыльно, но не убыточно, то есть – с нулевой рентабельностью.

Чаще всего в современном инструментальном багаже экономико-математического моделирования ни одна из форм моделей (5.1.6) не используется. Тем более не используется и вся система в целом. Следует обратить внимание и на то, что нахождение оценок коэффициентов моделей (5.1.6), например, с помощью метода наименьших квадратов (МНК) чаще всего – чрезвычайно сложная задача. Для этого необходимо прибегать к численным методам решения систем нелинейных уравнений. Для современного учёного, вооружённого вычислительной техникой и программными продуктами, это не представляет каких-либо затруднений, но для экономиста, владеющего математикой в объёме университетского курса, эта задача является непреодолимой. Коэффициенты же комплекснозначных функций находятся весьма просто. О том, как использовать МНК для этих целей, было показано в третьей главе.

В производственных функциях комплексных переменных появляются новые экономические показатели, которые не встречаются в теории производственных функций, базирующейся на действительных переменных. Это модули комплексных переменных и их полярные углы. Если с полярными углами всё более-менее ясно, они характеризуют для ресурсов фондовооружённость труда (тангенс полярного угла, представляющий отношение труда к капиталу, очевидно равен фондовооружённости труда), а для производственного результата – рентабельность по себестоимости, то с характеристикой модулей этих комплексных переменных интерпретация затруднена. Действительно, модули этих переменных равны: $R_{GC} = \sqrt{G^2 + C^2}, R_{KL} = \sqrt{K^2 + L^2}$. Какой экономический смысл они имеют? Ф.А.Ущев предложил называть их масштабами производства и ресурсов соответственно. Пожалуй, что эта характеристика наиболее адекватно отражает свойства этих показателей, и в дальнейшем будем использовать именно такую экономическую интерпретацию модулей экономических комплексных переменных.

Ещё одно уникальное свойство, помимо вышеизложенных, присуще производственным функциям комплексных переменных. Из зависимости (5.1.3) легко следует и обратная ей:

$$K_t + iL_t = f(G_t + iC_t). \qquad (5.1.7)$$

То есть, если некоторый производственный процесс описать с помощью производственной функции комплексных переменных, можно построить обратную функцию (5.1.7), с помощью которой можно решать задачу, даже не возникавшую в современной теории производственных функций – как достичь желаемого уровня валовой прибыли, издержек производства или объёма производства? Какие трудовые и капитальные ресурсы необходимо привлечь для получения заданного уровня рентабельности производства? Функция (5.1.7) позволяет получить ответы на эти вопросы довольно просто, функции действительных переменных для ответа на эти вопросы должны быть существенно усложнены и сведены в некоторую систему уравнений.

5.2. Линейная производственная функция комплексных переменных

Самая простая – линейная, - функция комплексных переменных будет выглядеть так:

$$G_t + iC_t = \left(b_0 + ib_1\right)\left(K_t + iL_t\right). \tag{5.2.1}$$

Поскольку эта простейшая функция комплексной переменной имеет только один комплексный коэффициент, а именно - коэффициент пропорциональности (b_0+ib_1), то именно он и является предметом исследования этой функции. Из равенства (5.2.1) легко получить:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{K_t + iL_t}.$$

Теперь, умножая числитель и знаменатель правой части равенства на сопряжённый знаменателю сомножитель, получим:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{K_t + iL_t} \times \frac{K_t - iL_t}{K_t - iL_t} = \frac{G_t K_t + C_t L_t + i\left(C_t K_t - G_t L_t\right)}{L_t^2 + K_t^2}.$$

Откуда после группировки вещественной и мнимой частей легко вывести каждый из коэффициентов b_0 и b_1 этой формы производственной функции комплексных переменных:

$$b_0 = \frac{G_t K_t + C_t L_t}{L_t^{\ 2} + K_t^{\ 2}}, \tag{5.2.2}$$

$$b_1 = \frac{C_t K_t - G_t L_t}{L_t^{\ 2} + K_t^{\ 2}}. \tag{5.2.3}$$

В отличие от коэффициентов производственной функции комплексного аргумента дать экономическую интерпретацию каждого из коэффициентов функции комплексных переменных (5.2.1) непросто. Знаменатель у этих коэффициентов одинаков – он отражает масштаб ресурсов, но числители (5.2.2) и (5.2.3) существенно отличаются друг от друга и не имеют чётких экономических параллелей.

Коэффициент b_0 будет линейно расти с ростом как объёма производства (G+C), так и с ростом валовой прибыли и издержек производства при постоянстве затрат ресурсов. Если и ресурсы, и результаты растут прямо пропорционально друг другу, то этот коэффициент остаётся постоянным. Во всех остальных случаях его динамика носит сложный характер.

Что можно сказать относительно второго коэффициента b_1, так это то, что он будет увеличиваться с ростом себестоимости и в некоторой степени с увеличением количества занятых в производстве. Последняя зависимость носит нелинейный характер. Рост валовой прибыли однозначно будет отражаться уменьшением значений этого коэффициента.

Если за точку отсчёта принять первое наблюдение, а все остальные значения привести к относительным значениям, то коэффициент b_0 при первом наблюдении будет равен единице, а коэффициент b_1 – равен нулю. Впрочем, за точку отсчёта можно взять не только начальное, но и любое другое значение, например, последнее. Тогда именно для этого года наблюдения за производственным процессом коэффициент b_0 будет равен единице, а коэффициент b_1 будет равен нулю. Поскольку в реальной экономике ситуации моделирования линейной зависимости некоторого комплексного показателя от комплексного фактора при нулевом значении свободного члена встречаются крайне редко, к такому виду модель можно привести, осуществив предварительное центрирование исходных переменных относительно их средних арифметических.

Если раскрыть скобки равенства (5.2.1) и сгруппировать вещественную и мнимую часть полученного равенства, то получим:

$$G_t + iC_t = \left(b_0 + ib_1\right)\left(K_t + iL_t\right) \leftrightarrow G_t + iC_t = b_0K_t - b_1L_t + i\left(b_0L_t + b_1K_t\right)$$

Откуда для вещественной части равенства:

$$G_t = b_0K_t - b_1L_t, \tag{5.2.4}$$

а для мнимой части:

$$C_t = b_0L_t + b_1K_t. \tag{5.2.5}$$

Полученные выражения имеют простой экономический смысл и определяют в каких случаях моделирования производства может использоваться линейная производственная функция комплексных переменных (если считать, что коэффициенты модели являются положительными). (5.2.4) однозначно указывает на то, что с ростом капитального ресурса валовая прибыль увеличивается, а с ростом трудовых ресурсов – уменьшается. При этом издержки производства увеличиваются. Это свидетельствует о том, что моделируется процесс с постоянной отдачей капитального ресурса и убывающей отдачей трудовых ресурсов. Впрочем, если коэффициент b_1 будет отрицательным, то рост трудовых ресурсов ведёт к росту и прибыли, и издержек, а рост капитальных ресурсов ведёт в этом случае к моделированию ситуации, когда валовая прибыль растёт, а издержки уменьшаются. То есть, имеет место постоянная отдача трудового ресурса и, в зависимости от соотношения коэффициентов b_0 и b_1 – возрастающая, постоянная или убывающая отдача капитального ресурса.

Это означает, что линейная ПФКП обладает некоторыми аналитическими свойствами, с помощью которых можно изучать суть производственных процессов разных уровней иерархии. Конечно, делать это можно только в том случае, когда линейная ПФКП хорошо описывает моделируемое производство.

Поскольку все переменные приведены к безразмерным величинам делением на свои первые значения (G_t/G_1, C_t/C_1, K_t/K_1, L_t/L_1), возникает несколько важных моментов, на которые следует обратить внимание. Полученные значения позволяют определить некий аналог валовой выручки:

$$G_t + C_t = \left(b_0 K_t - b_1 L_t\right) + \left(b_0 L_t + b_1 K_t\right) = (b_0 + b_1) K_t + (b_0 - b_1) L_t . \qquad (5.2.6)$$

Мы называем полученную сумму не валовой выручкой, а её аналогом вот почему. С учётом того, что валовая прибыль G_t отнесена к начальному значению прибыли в первый год наблюдения G_1, и издержки производства C_t, отнесёны к первому году наблюдения C_1, то эта сумма не имеет того смысла, как если бы мы взяли реальные значения прибыли и прибавили к ним реальные значения издержек, а затем привели к этому же значению выручки, но в первый год наблюдения. Действительно:

$$\frac{G_t}{G_1} + \frac{C_t}{C_1} = \frac{G_t C_1 + C_t G_1}{G_1 C_1} \neq \frac{G_t + C_t}{G_1 + C_1} = \frac{Q_t}{Q_1} .$$

Поэтому (5.2.6) выступает именно аналогом выручки. Для того чтобы (5.2.6) имело искомый смысл, необходимо валовую прибыль и себестоимость привести к безразмерным величинам относительно валовой выручки:

$$\frac{G_t}{Q_1}, \frac{C_t}{Q_1} . \qquad (5.2.7)$$

В таком случае (5.2.6) имеет смысл валовой выручки в относительных значениях.

Точно также некоторым аналогом рентабельности выступает и отношение:

$$\frac{G_t}{C_t} = \frac{b_0 K_t - b_1 L_t}{b_0 L_t + b_1 K_t} . \qquad (5.2.8)$$

Опять-таки, вычисляется не сама рентабельность, а её некоторый аналог, поскольку с учётом приведения к безразмерным величинам:

$$\frac{G_t / G_0}{C_t / C_0} = \frac{R_t}{R_0}$$

Но если переменные производственного результата приведены к безразмерным величинам приведением к начальному значению валовой выручки, то (5.2.8) будет характеризовать рентабельность по себестоимости.

Формулы (5.2.2) и (5.2.3) дают возможность для каждого момента наблюдения найти соответствующие коэффициенты линейной производственной функции комплексных переменных (5.2.1). Для этого следует только подставить в них имеющиеся статистические данные. Покажем как эти коэффициенты могут быть посчитаны на примере реально действующего предприятия.

Руководство Инзенского Диатомового комбината (Ульяновская область) любезно предоставило нам необходимые статистические данные по своему предприятию. Их первичная обработка и систематизация была проведена И.Е.Никифоровой. Абсолютные значения производства на этом комбинате приведены в табл. 5.1.

Беглый анализ предоставленных данных показывает их большую дисперсию относительно тенденций, а иного ожидать от реального производства и не возможно – на результаты производственной деятельности оказывает влияние множество различных факторов, большинство из которых и выявить не всегда возможно.

Табл. 5.1.

Производственная деятельность Диатомового комбината по месяцам за 1999 год

1999 г.	Прибыль, тыс .руб.	Издержки, тыс.руб.	ФОТ, тыс.руб.	Трудозатраты, чел-час	Численность, чел.	ОПФ, тыс.руб.
февраль	59	2604	213,5	52100	354	4263
март	72	3178	231,3	51347	357	4263
апрель	26	1146	289,1	57095	364	4263
май	47	2059	246,1	62898	401	4263
июнь	21	897	266,6	62742	400	4263
июль	73	3202	294,1	57005	404	5684
август	47	2045	396,4	61662	437	5684
сентябрь	49	2152	310,2	64484	457	5684
октябрь	41	1804	402,4	63071	454	5684
ноябрь	60	2615	511,9	64599	465	5684
декабрь	107	4736	439,4	63905	460	5684

Обращает на себя внимание и тот факт, что изменение капитального ресурса происходит ступенчато – в июле были освоены новые производственные мощности, отдача от которых наступает, судя по таблице, постепенно и к декабрю проявилась в максимальной степени.

Все эти обстоятельства убеждают нас в том, что ни одна модель не сможет описать производственный процесс с ошибкой, меньше 10 – 20%. Но нас интересует, во-первых, сама возможность построения комплекснозначных производственных функций, а во-вторых, моделирование общих взаимосвязей между ресурсами и производственным результатом, пусть и с некоторой погрешностью.

Используя значения выручки, издержек производства, фонда оплаты труда и величины основных производственных фондов, построим производственную функцию типа (5.2.1). Для этого приведём вначале все значения к безразмерным относительным величинам. За основу возьмём данные за февраль 1999 года по каждому из экономических показателей, которые примем за единицу. Поскольку труд характеризуется тремя показателями – фондом оплаты труда, трудозатратами и численностью занятых, необходимо выбрать один из них, наиболее точно отражающий затраты ресурса. Для того, чтобы привести значения трудового ресурса к одинаковой размерности с капиталом и одинаковому масштабу будем использовать только показатель фонда оплаты труда – он характеризует затраты трудового ресурса в денежных единицах.

Табл. 5.2.

Безразмерные центрированные данные по Диатомовому комбинату

1999 г.	Прибыль	Издержки	ФОТ	ОПФ
февраль	0,072419	0,077014	-0,53332	-0,18182
март	0,292758	0,297444	-0,44995	-0,18182
апрель	-0,4869	-0,48289	-0,17922	-0,18182
май	-0,13097	-0,13228	-0,38063	-0,18182
июнь	-0,57165	-0,57852	-0,28461	-0,18182
июль	0,309707	0,306661	-0,1558	0,151515
август	-0,13097	-0,13766	0,323355	0,151515
сентябрь	-0,09707	-0,09656	-0,08039	0,151515
октябрь	-0,23267	-0,23021	0,351458	0,151515
ноябрь	0,089368	0,081239	0,864339	0,151515
декабрь	0,885978	0,895755	0,52476	0,151515

Поскольку необходимо центрировать исходные переменные для того, чтобы не использовать свободный коэффициент, а непосредственно использовать модель (5.2.1), в табл. 5.2 приведены безразмерные центрированные относительно средних арифметических переменные. Так как формулы (5.2.2) и (5.2.3) предоставляют возможность находить соответствующие коэффициенты для каждого наблюдения, воспользуемся ими и получим в результате два ряда коэффициентов, динамика которых представлена в табл. 5.3.

Видно, что коэффициенты функции не остаются постоянными, что и следовало ожидать при таких исходных данных. Но для того, чтобы ответить на вопрос: является ли эта модель приемлемой для целей исследования производственных процессов на комбинате, необходимо посмотреть – имеется ли тенденция в изменениях коэффициентов. Если тенденция изменения хотя бы одного из коэффициентов имеется, это свидетельствует о том, что модель смещена и плохо описывает производственную взаимосвязь. В таком случае необходимо либо менять модель, либо её существенно модифицировать.

Табл. 5.3.
Коэффициенты производственной функции (5.2.1)
по данным производства Диатомового комбината

1999 г.	Коэффициент b_0	Коэффициент b_1
февраль	-0,17084	0,077546
март	-0,79429	0,329688
апрель	2,686068	0,008219
май	0,416793	-0,145
июнь	2,354795	-0,50422
июль	-0,01806	2,005393
август	-0,50469	0,168554
сентябрь	-0,23606	-0,76258
октябрь	-0,79301	0,320131
ноябрь	0,108772	-0,08433
декабрь	2,025593	-1,10349

Изменяются коэффициенты модели хаотически, разброс их значений довольно высок, никаких тенденций изменения коэффициентов не выявляется. Это означает только одно – модель не может быть использована для описания рассматриваемого производственного процесса и никакие модификации этой модели ситуацию не исправят.

Поскольку для более корректной экономической интерпретации вычисляемых экономических переменных следует отнести валовую прибыль и издержки производства к безразмерным величинам путём деления их значений на валовую выручку, как об этом было сказано выше (5.2.7), сделаем это и сравним полученный результат с предыдущим.

Приведённые к валовой выручке безразмерные величины переменных, вновь центрированные относительно их средних арифметических, сведены в табл. 5.4.

Табл. 5.4.
Безразмерные данные по Диатомовому комбинату,
когда прибыль и издержки приведены к валовой выручке

1999 г.	Прибыль	Издержки	ФОТ	ОПФ
февраль	0,001604	0,075308	-0,53332	-0,18182
март	0,006486	0,290854	-0,44995	-0,18182
апрель	-0,01079	-0,47219	-0,17922	-0,18182
май	-0,0029	-0,12935	-0,38063	-0,18182
июнь	-0,01267	-0,5657	-0,28461	-0,18182
июль	0,006862	0,299867	-0,1558	0,151515
август	-0,0029	-0,13461	0,323355	0,151515
сентябрь	-0,00215	-0,09443	-0,08039	0,151515
октябрь	-0,00515	-0,2251	0,351458	0,151515
ноябрь	0,00198	0,079439	0,864339	0,151515
декабрь	0,019629	0,875909	0,52476	0,151515

С изменением исходных переменных изменились и значения коэффициентов модели (5.2.1). Для того чтобы более наглядно увидеть это изменение, в табл. 5.5 приведены два ряда значений комплексного коэффициента - как значения коэффициентов из табл. 5.3, так и значения коэффициентов, пересчитанные по данным табл. 5.4.

Табл. 5.5.
Коэффициенты производственной функции (5.2.1)
по данным производства Диатомового комбината

1999 г.	По данным табл. 5.2		По данным табл. 5.4	
	Коэффициент b_0	Коэффициент b_1	Коэффициент b_0	Коэффициент b_1
февраль	-0,17084	0,077546	-0,12742	-0,04043
март	-0,79429	0,329688	-0,56069	-0,21215
апрель	2,686068	0,008219	1,328494	1,287556
май	0,416793	-0,145	0,279659	0,125965
июнь	2,354795	-0,50422	1,431754	0,87016
июль	-0,01806	2,005393	-0,96716	0,984596
август	-0,50469	0,168554	-0,34478	-0,15258
сентябрь	-0,23606	-0,76258	0,246949	-0,49218
октябрь	-0,79301	0,320131	-0,54544	-0,22047
ноябрь	0,108772	-0,08433	0,089557	0,013408
декабрь	2,025593	-1,10349	1,550685	0,410326

Изменение масштаба переменных привело к изменению значений коэффициентов модели (5.2.1), но не к изменению их тенденций, поскольку и в первом и во втором случаях используется линейная модель, но с другим правилом масштабирования. Новые коэффициенты также хаотически изменяются, как и прежде, практически повторяя динамику изменения коэффициентов, вычисленных по данным табл. 5.2.

То, что для данного производства линейная ПФКП использоваться не должна, подтверждается и вычислением комплексного коэффициента парной корреляции (3.6.17), который для используемых данных Диатомового комбината равен:

$$r_{xy} = 0,301931 + i0,055403 .$$

Поскольку действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции мала, то можно говорить о том, что линейная комплекснозначная зависимость использоваться для моделирования производства на Диатомовом комбинате не может. Близость к нулю мнимой части коэффициента свидетельствует о том, что некоторая зависимость между двумя комплексными переменными всё же имеется, но о её характере можно судить только после проведения дополнительных исследований. Таким образом, модель производства Диатомового комбината должна быть нелинейной. Приведённые данные по комбинату будем использовать при анализе нелинейных комплекснозначных производственных функциях, который будет осуществлён в следующих параграфах данной главы.

Посмотрим теперь, может ли эта функция использоваться на примере экономики России? В табл. 5.6 приведены данные по стоимости основных фондов в России, величине экономически активного населения и конечному продукту, который делится на конечное потребление и валовое накопление. Конечное потребление выступает на макроуровне некоторым аналогом валовой прибыли, поэтому будем использовать этот показатель как действительную часть комплексного производственного результата.

Прежде, чем строить модель, вычислим комплексный коэффициент парной корреляции (3.6.17) между двумя комплексными переменными - комплексным ресурсом (основные фонды и активное население) и комплексным результатом (конечное потребление и валовое накопление):

$$r_{xy} = 0,991963 - i0,005319 .$$

Поскольку действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции близка к единице, а мнимая – близка к нулю, то следует вывод о том, что линейная комплекснозначная функция будет вполне приемлемой для моделирования рассматриваемой зависимости.

Найдём коэффициенты линейной модели (5.2.1) по данным этой таблицы так, как это делали прежде – то есть, изменяющиеся во времени комплексные коэффициенты модели (5.2.4) и (5.2.5). Результаты вычислений сведены в табл. 5.7.

Таблица 5.6.
Общие показатели развития экономики России

Год	Основные фонды, K_t		Численность экономически активного населения, L_t		Конечное потребление, G_t		Валовое накопление, C_t	
	Абсолютные значения, млн.руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, тыс. чел.	Относительные значения	Абсолютные значения, млн. руб.	Относительные значения	Абсолютные значения, млн. руб.	Относительные значения
1995	5182040	1,000000	70740	1,000000	1095820,9	1,000000	391588,4	1,000000
1996	13072378	2,522632	69660	0,984733	1544658,8	1,409591	528694,9	1,350129
1997	13286272	2,563908	68079	0,962383	1891846,7	1,72642	564244,2	1,440911
1998	14125670	2,72589	67339	0,951923	2100663,3	1,916977	443978,2	1,133788
1999	14246427	2,749193	72176	1,020300	3303947,9	3,015044	729214,5	1,862196
2000	16605251	3,204385	72332	1,022505	4476851,0	4,085386	1365734,0	3,487677
2001	20241428	3,906073	71411	1,009485	5886861,0	5,372101	1963110,0	5,013198
2002	24430544	4,714465	72421	1,023763	7443199,0	6,79235	2169314,0	5,539781
2003	30329106	5,852735	72835	1,029615	9024756,0	8,235612	2755048,0	7,035571
2004	32541444	6,279659	72909	1,030662	11401444,0	10,40448	3558952,0	9,088502
2005	38366273	7,403701	73811	1,043412	14318964,0	13,06688	4338731,0	11,07983
2006	43822840	8,456677	74156	1,048290	17629743,0	16,08816	5748727,0	14,68053
2007	54251541	10,46915	75060	1,061069	21785787,0	19,88079	8031682,0	20,51052
2008	64552706	12,45701	75892	1,072830	27237356,0	24,85566	10642560,0	27,17792

Из таблицы видно, что коэффициенты меняются относительно некоторых средних. Исключение составляют коэффициенты, вычисленные для 2001 года. Они существенно отличаются от всего ряда.

Табл. 5.7.
Коэффициенты производственной функции (5.2.1)
по данным табл. 5.6

Год	Комплексный коэффициент пропорциональности	
	Коэффициент b_0	Коэффициент b_1
1995	1,163592	-1,43889
1996	2,230591	-2,70000
1997	2,270221	-2,50794
1998	2,87264	-2,64283
1999	2,15053	-1,90593
2000	1,224434	-1,60172
2001	140,9579	34,74048
2002	1,484029	-1,94932
2003	1,386099	-1,54839
2004	2,007539	-2,17582
2005	1,940288	-2,23109
2006	2,285952	-2,37343
2007	2,476524	-2,21761

2008	2,683951	-2,27884
2009	1,163592	-1,43889

Вызвано это не какими-то особенностями этого года для России, а тем, что для вычисления комплексного коэффициента пропорциональности все исходными данные были центрированы относительно средних арифметических. Средние арифметические исходных данных табл. 5.6 приходятся как раз на 2001 год, и отклонения от средней арифметической именно для этого года близки к нулю, а это значит, что близки к нулю центрированные значения переменных именно для 2001 года. А поскольку в (5.2.4) и в (5.2.5) наличествует операция деления, то при знаменателе, близком к нулю, частное приобретает высокие значения, что и наблюдается в таблице. Именно такой эффект наблюдался в случае, рассмотренном в предыдущей главе, когда изучались свойства линейной модели комплексного аргумента.

Если перед исследователем стоит задача построить комплекснозначную модель не для каждого наблюдения, а для всего ряда, то необходимо найти коэффициенты модели с помощью МНК. В третьей главе монографии были выполнены соответствующие построения, воспользовавшись которыми, получим такую комплекснозначную модель зависимости конечного продукта России от трудовых ресурсов и основных фондов:

$$G_t + iC_t = (-1,4095 - i5,3207) + (2,2105 + i1,9415)(K_t + iL_t)\,. \qquad (5.2.9)$$

Эта модель хорошо описывает рассматриваемый процесс и может быть использована, например, для целей многовариантного прогнозирования развития экономики России. Для этого необходимо в дополнение к полученным значениям коэффициентов определить доверительные значения изменения полученных точечных значений. Правда, рассматриваемый процесс ни в коем случае нельзя отнести к стационарному и методы математической статистики в данном случае не следует использовать формально в полном объёме. Впрочем, в данной монографии не рассматриваются вопросы моделирования с помощью комплекснозначных моделей необратимых процессов социально-экономической динамики. Цель монографии – разработка основ применения методов и моделей теории функций комплексного переменного применительно к экономическим задачам.

5.3. Модель степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами

В экономике линейные зависимости, как известно, встречаются очень редко, да и то лишь в отдельные достаточно короткие промежутки времени. В первую очередь это относится к динамическим процессам. В подавляющем большинстве случаев превалируют нелинейные зависимости, которые, кстати, также действуют в относительно небольшой промежуток времени, поскольку одна нелинейная тенденция сменяет другую. Смена тенденций развития экономических объектов, которые мы наблюдаем применительно к любым из них, объясняется тем, что любой экономический объект эволюционирует, меняя свою структуру, состав элементов, взаимосвязи между ними и взаимодействие с другими экономическими объектами. Точно также и производственный процесс, развиваясь по сложной циклической траектории, в отдельные промежутки времени может быть описан разными нелинейными моделями. Поэтому чаще всего экономист должен оперировать с нелинейными комплекснозначными моделями.

Из огромного множества возможных комплекснозначных моделей степенные производственные функции комплексных переменных занимают особое место. Как и в теории производственных функций действительных переменных, где степенные функции превалируют, поскольку обладают выдающимися свойствами, так и в теории комплекснозначной экономики степенные модели занимают особое место. Они универсальны, просты в использовании и на редкость хорошо описывают отдельные реальные производственные ситуации. Основное исследование свойств этих функций осуществил И.С.Светуньков. Здесь уместно указать лишь на самые важные свойства этих моделей.

В общем виде степенные производственные функции комплексных переменных можно записать так:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t)^{b_0 + ib_1}. \qquad (5.3.1)$$

Рассмотрим вначале самый простой из возможных случаев – случай, когда мнимые части комплексных коэффициентов этой функции равны нулю, и функция (5.3.1) является степенной производственной функцией с действительными коэффициентами:

$$G + iC = a\left(K + iL\right)^{b}. \qquad (5.3.2)$$

Применительно к нашей задаче отображения комплексной переменной производственных ресурсов на комплексную плоскость производственных результатов, существуют ограничения, вызванные экономической сутью переменных. Эти ограничения, естественно, действуют и на линейные комплекснозначные производственные функции, но в рассмотренном выше примере выход за эти ограничения был вряд ли возможен, но применительно к нелинейным моделям – весьма вероятен.

Итак, первая группа ограничений вызвана тем, что комплексные переменные производственных ресурсов лежат в первом квадранте, поскольку $K>0$ и $L>0$, то есть аргумент φ комплексной переменной ресурсов меняется в пределах от 0 до $\pi/2$. Если он равен нулю, то это означает, что ни одной единицы трудовых ресурсов для производства не привлекается. Если же он становится равным $\pi/2$, то это означает, что для производства привлекаются только трудовые ресурсы, а капитальные ресурсы равны нулю. Очевидно, что в реальности эти случаи встречаться не могут и оси координат мы должны исключить из области определения задачи.

Комплексные переменные производственных результатов по своему экономическому смыслу также не могут быть определены на всей комплексной плоскости и хотя лежат на ней в более широких пределах, определяемых полярным углом, находящемся в пределах от 0 до $3/4\,\pi$, но за эти пределы выходит не могут. Таким образом производственные результаты определены в первом и частично во втором квадрантах комплексной плоскости.

Если полярный угол θ комплексной переменной производственных результатов равен нулю, это означает, что издержки производства равны нулю, а валовая прибыль максимальна. Вряд ли можно вспомнить подобные ситуации в реальной экономической практике, поэтому ограничение в этой части следует записать как строгое неравенство. Поскольку во втором квадранте комплексной плоскости производственных результатов валовая прибыль, откладываемая по оси действительных чисел, становится отрицательной, то это означает работу предприятия в убыток – отрицательная валовая прибыль численно равна валовому убытку предприятия. Отрицательная валовая прибыль (убыток) по своему экономическому смыслу не может быть выше издержек производства: $-G\leq C$. В том случае, когда ни одна единица произведённого товара не реализована, валовая прибыль G численно равна сумме понесённых на производство затрат C, а по знаку становится отрицательной. Именно в этом случае полярный угол производственных результатов становится равным $3/4\,\pi$. Случай, когда $-G=C$ является редким, но всё же возможным явлением хозяйственной практики.

Поэтому любая модель производственной функции комплексных переменных, в том числе и степенная, должна быть дополнена условиями, налагаемыми на полярные углы комплексных переменных:

$$0<\varphi<\frac{\pi}{2},\quad 0<\theta\leq\frac{3\pi}{4}. \tag{5.3.3}$$

Однако, в силу периодичности полярных углов, более точно с позиций теории функций комплексного переменного это условие должно выглядеть так:

$$2\pi k < \varphi < 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \qquad 2\pi k < \theta \le 2\pi k + \frac{3\pi}{4}.$$

Из всего множества чисел k в силу экономического смысла переменных, будем использовать только $k=0$. К тому же степенная производственная функция комплексных переменных должна быть однолистной, иначе модель перестаёт отражать реальную экономическую ситуацию. Это означает, что показатель степени b должен быть ограничен так, чтобы крайнему допустимому значению полярного угла производственных ресурсов φ соответствовало крайнее допустимое значение полярного угла производственных результатов θ. Так как для рассматриваемой степенной функции выполняется равенство $\theta=b\varphi$, то показатель степени должен удовлетворять условию:

$$0 < b\varphi \le \frac{3\pi}{4}. \qquad (5.3.4)$$

Если показатель степени будет отрицательным $b<0$, то любое увеличение производственных ресурсов неминуемо приводит к уменьшению производственных результатов и наоборот – уменьшение трудовых и капитальных ресурсов приводит к увеличению результатов производства. При этом полярный угол производственных результатов становится отрицательным, что означает отрицательность издержек производства – ситуация в экономике невозможная. Поэтому мы рассматриваем только функции с положительными показателями степени.

Для степенной функции с действительными коэффициентами, используемой в качестве модели производственных процессов, рост радиуса и полярного угла комплексной переменной производственных ресурсов (что означает рост трудовых ресурсов в большей степени, чем капитала) будет означать увеличение производственных результатов с опережающим ростом издержек производства над валовой прибылью. Если рассмотреть обратный экономический процесс – рост капитала в большей степени, чем трудовых ресурсов (что на комплексной плоскости производственных ресурсов означает уменьшение полярного угла с одновременным ростом радиуса переменной), то будем иметь вариант увеличения производственных результатов с опережающим ростом валовой прибыли над издержками производства.

Поскольку в большинстве реальных производственных процессов инвестиции в основной капитал ведут к усовершенствованию технологии производства и росту производительности труда, снижению процента брака и отходов производства, то это означает снижение издержек с одновременным увеличением валовой прибыли. А именно такой процесс и моделирует производственная степенная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами. Если вдруг на таком производстве необходимо добиться быстрого увеличения объёмов производства, то тогда при сохранении капитальных ресурсов привлекается дополнительная рабочая сила, производство начинает работать не в одну, а в две или три смены. Понятно, что при таком использовании ресурсов необходимо установить дополнительные надбавки за работу во вторую и третью смену, значит, затраты на единицу труда увеличиваются, что ведёт к росту общих издержек производства. При этом валовая прибыль начинает уменьшаться. И этот процесс моделируется с помощью рассматриваемой производственной функции.

Следовательно, производственная степенная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами по своим свойствам соответствует реальным производственным процессам. В ситуации стагнации производства эта модель также может быть использована, но это будет показано далее, а теперь рассмотрим свойства самой модели.

Производственную функцию (5.3.2) можно представить в тригонометрической форме:

$$G+iC=a\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)^b\left(\cos\left(b\arg\left(K+iL\right)\right)+i\sin\left(b\arg\left(K+iL\right)\right)\right). \qquad (5.3.5)$$

Это позволяет нам вывести две простые формулы для расчёта валовой прибыли G и издержек производства C:

$$G=a\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)^b\cos\left(b\arg\left(K+iL\right)\right). \qquad (5.3.6)$$

$$C=a\left(\sqrt{K^2+L^2}\right)^b\sin\left(b\arg\left(K+iL\right)\right). \qquad (5.3.7)$$

Эти формулы позволяют понять, как именно будут моделироваться прибыль и издержки при различных сочетаниях производственных ресурсов. Если производственные технологии остаются неизменными, а только увеличивается привлекаемые ресурсы, то это означает сохранение пропорций между ресурсами и постоянство полярного угла на комплексной плоскости производственных ресурсов ($arg(K+iL)=const$). При этом будет расти модуль комплексной переменной. Для такого случая, как следует из (5.3.6) и (5.3.7), валовая прибыль и валовые издержки растут вместе с ростом ресурсов с одинаковым темпом. Степень этого роста определяется действительными коэффициентами модели.

Одним из примечательных свойств степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами является то, что для нахождения значений коэффициентов функции (5.3.2) достаточно иметь лишь одно наблюдение за производственным процессом, поскольку (5.3.6) и (5.3.7) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b, найти значения которых можно, используя формулы:

$$b = \frac{\arg(G+iC)}{\arg(K+iL)}. \qquad (5.3.8)$$

$$a = \exp\left(\ln\left(\sqrt{G^2+C^2}\right) - \frac{\arg(G+iC)}{\arg(K+iL)} \ln\left(\sqrt{K^2+L^2}\right) \right). \qquad (5.3.9)$$

Как можно заметить из (5.3.8), коэффициент b характеризует отношение двух общеизвестных экономических показателей - рентабельность по себестоимости G/C и фондовооружённость труда K/L. Это обстоятельство даёт возможность рассматривать показатель степени модели в качестве одной из аналитических характеристик предлагаемой модели.

Обозначим крайнее положительное значение, которое может принимать коэффициент b для выполнения условия (5.3.4) как b_{NQ}:

$$b_{NQ} = \frac{3\pi}{4\arg(K+iL)}. \qquad (5.3.10)$$

При $b=b_{NQ}$ доход организации становится равным нулю ($Q=G+C=0$) за счёт того, что в этой точке валовая прибыль отрицательна $G<0$, то есть характеризует убыток, который по своей величине равен издержкам производства $|G|=C$. Это возможно в ситуации, когда ни одна из произведённых единиц изделия не продаётся.

Рассматривая показатель степени b как переменную, лежащую в пределах $0<b<b_{NG}$, можно исследовать влияние этой переменной на производственные результаты при фиксированных затратах производственных ресурсов, например, найти, при каких условиях достигается максимум валовой прибыли, максимум дохода или максимум издержек производства – то есть максимум действительных показателей при изменении действительных переменных. Вычисляя первую производную функции (5.3.2) по переменной b, можно найти эти и некоторые другие условия[30].

Валовая прибыль G становится максимальной, когда выполняется следующее условие:

$$b = b_G = \frac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\ln\sqrt{K^2+L^2}}{\arg(K+iL)} \right)}{\arg(K+iL)}. \qquad (5.3.11)$$

[30] С.Г.Светуньков, И.С.Светуньков. Производственные функции комплексных переменных. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008, – 136 с.

Валовая прибыль G равна издержкам C (то есть рентабельность по себестоимости равна 100%), когда показатель степени становится равным:

$$b = b_{prof} = \frac{\pi}{4\arg\left(K + iL\right)}. \qquad (5.3.12)$$

Валовая прибыль G равна нулю, то есть имеется безубыточное, но и не доходное производство, в ситуации, когда:

$$b = b_{NG} = \frac{\pi}{2\arg\left(K + iL\right)}. \qquad (5.3.13)$$

Доход от производства Q становится максимальным в том случае, если показатель степени равен:

$$b = b_Q = \frac{\frac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\arg\left(K + iL\right)}{\ln\sqrt{K^2 + L^2}}\right) - \pi l}{\arg\left(K + iL\right)}, \qquad (5.3.14)$$

где $l=1$, если $\sqrt{K^2 + L^2} < 1$ и $l=0$ во всех остальных случаях.

Издержки производства C становятся максимальными, когда:

$$b = b_C = \frac{\pi m - \operatorname{arctg}\left(\frac{\arg\left(K + iL\right)}{\ln\sqrt{K^2 + L^2}}\right)}{\arg\left(K + iL\right)}, \qquad (5.3.15)$$

где $m=0$, если $\sqrt{K^2 + L^2} < 1$ и $m=1$ во всех остальных случаях.

Теперь, зная эти характерные точки, можно выделить 13 зон и точек изменения показателя степени b, характеризующих разные варианты эффективности производства (рис.5.2). По оси коэффициента b отложены численные значения, которые были рассчитаны на условном примере при значениях ресурсов, равных единице. Рассмотрим характерные точки и состояние модели по мере возрастания показателя степени, начиная с нулевого значения, следуя логике рис.5.2.

$b \in [0; b_G)$ – зона высокорентабельного производства. При росте коэффициента b от нуля до b_G, рост издержек производства C, сопровождается ещё большим ростом прибыли G. Рентабельность возрастает, доход Q также растёт.

$b = b_G$ – точка максимальной валовой прибыли. В ней валовая прибыль *G* достигает наибольшего значения.

$b \in \left(b_G; b_{prof}\right)$ – производство эффективно, но прибыль *G* снижается, а издержки *C* растут. Доход *Q* продолжает увеличиваться. Рентабельность по себестоимости G/C снижается.

$b = 1$ – точка, интересная тем, что в ней *K* не влияет на *C*, а *L* не влияет на *G*, как видно из формулы (5.3.2), $G = aK$, $C = aL$. При этом, как можно заметить, доход организации будет находиться по формуле: $Q = a\left(K + L\right)$.

$b = b_{prof}$ - точка, в которой рентабельность по себестоимости равна ста процентам.

$b \in \left(b_{prof}; b_Q\right)$ – прибыль *G* снижается, но доход организации *Q* всё ещё продолжает расти за счёт боле высокого роста издержек производства. Рентабельность меньше 100% и продолжает снижается.

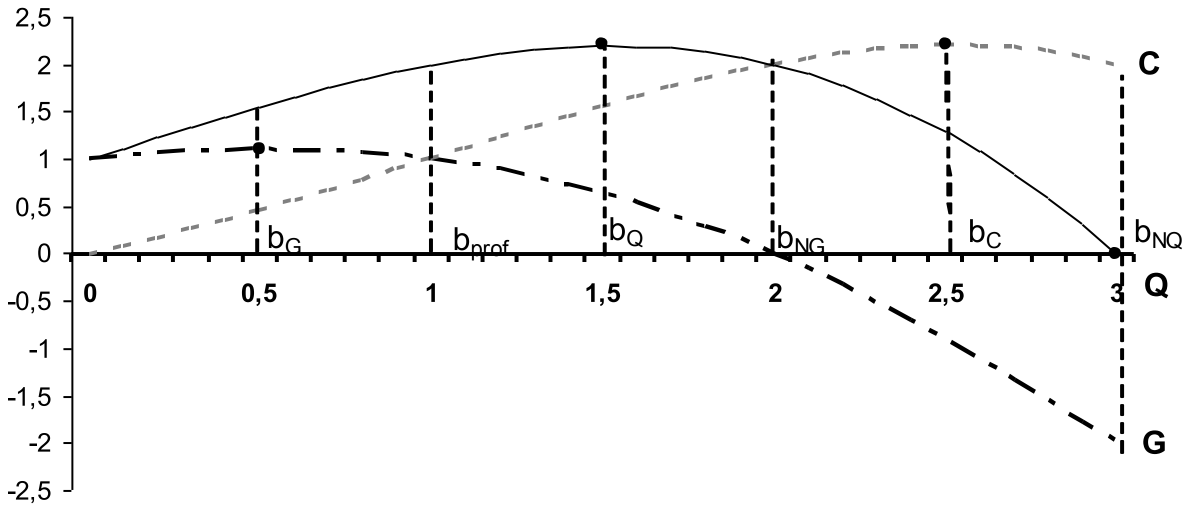

Рис.5.2. Значения коэффициента b

$b = b_Q$ – точка максимального дохода организации.

$b \in \left(b_Q; b_{NG}\right)$ – производство всё ещё эффективно, несмотря на то, что прибыль *G* продолжает уменьшаться, а издержки продолжают расти. Доход *Q* в этом отрезке начинает уменьшаться.

$b = b_{NG}$ – точка бесприбыльного производства (известная в экономической теории как «критическая точка»). Здесь $G = 0$, доход *Q* равен издержкам *C*.

$b \in (b_{NG}; b_C)$ – неэффективное убыточное производство. Прибыль отрицательна (убыток), но по модулю меньше издержек. В реальном производстве это может соответствовать ситуации, когда товар приходится продавать по цене, ниже себестоимости. Дальнейшее увеличение показателя степени означает, что издержки C растут, а доход Q уменьшается.

$b = b_C$ – точка наибольших издержек. Это точка-экстремум, в которой издержки принимают наибольшее значение, валовая прибыль является отрицательной и по модулю меньше издержек, то есть продаётся всё меньшая часть продукции, поэтому убыток по своей величине всё ещё меньше затрат на производство, но стремительно растёт.

$b \in (b_C; b_{NQ})$ – производство крайне неэффективно. Издержки, валовая прибыль и доход снижаются, убыток возрастает.

$b = b_{NQ}$ – точка отсутствия дохода – точка прекращения производства, так как валовая прибыль G по модулю равна издержкам C, а доход Q равен нулю. То есть, весь объём производства убыточен, не продаётся ни одной единицы продукции.

Поскольку экономика многообразна, то в реальной практике возможны самые разные варианты, отличающиеся от рассмотренного выше, в частности:

- возможен вариант, когда производственные ресурсы принимают такое значение:

$$\sqrt{K^2 + L^2} = 1.$$

В этом случае $b_G = 0$;

- если же производственные ресурсы такие, что

$$\sqrt{K^2 + L^2} < 1,$$

то b_G становится отрицательной – в данных условиях достичь максимума прибыли невозможно;

- когда для производственных ресурсов выполняется такое равенство как

$$\arg(K + iL) = \ln\sqrt{K^2 + L^2},$$

становятся равными друг другу значения точек:

$b_{NG} = b_Q$, $b_C = b_{NQ}$;

- когда же

$$\arg\left(K+iL\right)<\ln\sqrt{K^2+L^2},$$

меняются местами точки:

b_{NG} с b_Q и b_C с b_{NQ}.

Это означает, что максимальный доход достигается в убыток организации.

Эта дополнительная информация позволяет исследователю лучше понять характер производства, если ресурсы принимают одно из этих значений.

Наличие точки максимума прибыли b_G даёт возможность получить уникальную аналитическую характеристику предлагаемой степенной функции комплексных переменных, а именно – определить уровень эффективности производства, воспользовавшись расстоянием фактического значения b до точки b_G. И.С.Светуньков предлагает использовать показатель, отражающий этот уровень, который может быть найден по формуле:

$$S=1-\frac{b-b_G}{b_{NG}-b_G}. \qquad (5.3.16)$$

Как видно, коэффициент S положителен, когда $b<b_{NG}$, то есть, когда прибыль предприятия положительна. Коэффициент близок к нулю, если значение b близко к b_{NG}, то есть, когда прибыль близка к нулю. S равен нулю только в случае бесприбыльного производства, когда $b=b_{NG}$. S равен единице, когда значение показателя степени b совпадает со значением b_G. В зоне «высокорентабельного производства» (когда b лежит в границах $\left(0;b_G\right)$) коэффициент S становится больше единицы. Если $b>b_{NG}$, то предлагаемый коэффициент становится отрицательным, что отражает убыточность производства. Коэффициент S для удобства восприятия также можно представить в процентном выражении, просто умножив его значение на 100%.

Наши исследования на многочисленных условных и фактических примерах показали, что этот коэффициент коррелирует с динамикой рентабельности по себестоимости, причём чем выше рентабельность, тем ближе значение показателя к единице и наоборот. В табл. 5.8 в качестве примера приведены расчеты коэффициента S для экономики России по данным Госкомстата России с 1998 по 2003 год и отношение G/C как отражение средней по стране рентабельности[31].

[31] Расчёты выполнены И.С.Светуньковым.

Как видно из таблицы, коэффициент S действительно может использоваться как одна из характеристик оценки уровня эффективности производства, поскольку в определённой степени он отражает среднюю рентабельность производства (коэффициент парной корреляции между S и G/C на этом множестве значений равен 0,71).

Табл. 5.8.
Результаты расчёта уровня эффективности экономики России

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003
S	8,3%	20,7%	23,4%	20,4%	17,8%	18,8%
G/C	12,7%	25,5%	24,7%	18,5%	14,4%	13,5%

Поскольку предложенная модель имеет ярко выраженный экономический смысл и отражает реально происходящие производственные процессы, следует более тщательно изучить её аналитические свойства, для чего воспользуемся приёмами, используемыми экономистами для исследования свойств производственных функций действительных переменных.

5.4. Степенные производственные комплекснозначные функции с действительными коэффициентами Диатомового комбината и промышленности России

Замечательные свойства степенной производственной функции комплексных переменных, о которых «авансом» говорилось в предыдущих главах, требуют своего подтверждения на реальных экономических примерах. Поскольку данные по Диатомовому комбинату являются с этих позиций весьма представительными, следуя вышеизложенной в предыдущем параграфе логике, И.С.Светуньков рассчитал значения a, b, b_G, b_{NG}, b_Q и S для каждого наблюдения. Эти значения приведены в табл. 5.9. К сожалению требования соблюдения коммерческой тайны не позволяют привести здесь исходные данные по этому комбинату за рассматриваемый период с 2004 по 2007 год, поэтому приводятся лишь результаты вычислений.

Вспомнив интерпретацию значений приведённых характеристик модели и предложенного коэффициента S, можно сделать вывод о том, что эффективность работы предприятия довольно низкая. Показатель степени b

расположен в восьмой зоне из тринадцати, рассмотренных ранее, и близок к граничному значению b_{NG}, которое характеризует бесприбыльную деятельность. Об этом же свидетельствует и низкое значение коэффициента S. Поскольку нашей задачей является проверка аналитических свойств степенной производственной функции с действительными коэффициентами, в таблице справочно приведен показатель рентабельности G/C.

Табл. 5.9

Характеристики степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами для Диатомового комбината

Квартал	**a**	**b**	**b_G**	**b_Q**	**b_{NG}**	**S**	**G/C**
1кв. 2004	0,939	1,241	0,032	0,658	1,251	**0,80%**	**1,23%**
2кв. 2004	1,928	1,294	0,009	0,644	1,270	**-1,92%**	**-2,99%**
3кв. 2004	1,643	1,332	0,053	0,683	1,260	**-6,02%**	**-9,08%**
4кв. 2004	1,558	1,288	0,066	0,708	1,284	**-0,28%**	**-0,41%**
1кв. 2005	1,127	1,283	0,069	0,713	1,288	**0,40%**	**0,59%**
2кв. 2005	1,344	1,332	0,016	0,682	1,332	**-0,01%**	**-0,01%**
3кв. 2005	1,335	1,273	0,060	0,715	1,309	**2,86%**	**4,29%**
4кв. 2005	1,728	1,329	0,086	0,756	1,339	**0,78%**	**1,14%**
1кв. 2006	1,272	1,308	0,092	0,760	1,336	**2,30%**	**3,36%**
2кв. 2006	1,476	1,348	0,061	0,742	1,362	**1,06%**	**1,59%**
3кв. 2006	1,403	1,349	0,091	0,782	1,383	**2,60%**	**3,82%**
4кв. 2006	1,218	1,326	0,092	0,799	1,415	**6,75%**	**9,94%**
1кв. 2007	1,383	1,397	0,062	0,787	1,449	**3,72%**	**5,60%**
2кв. 2007	1,502	1,385	0,105	0,829	1,449	**4,77%**	**6,96%**

Легко заметить, что показатель S коррелирует с показателем рентабельности, подтверждая пригодность комплекснозначной модели для экономического анализа.

Из таблицы видно, что и коэффициент пропорциональности и показатель степени подвержены изменению во времени, но это изменение не является существенным. Очевидно, что любая модель социально-экономической динамики, как бы хорошо она не описывала ряд наблюдений, в некоторый момент времени перестанет делать это удовлетворительно, поскольку социально-экономические динамические процессы подвержены эволюционному развитию. Поэтому и возникает, например, в задаче прогнозирования необходимость адаптации модели – то есть, корректировки коэффициентов модели при появлении изменений в тенденциях. Комплекснозначная степенная производственная функция с действительными коэффициентами, для которой коэффициенты рассчитываются на каждом наблюдении, отражает это в полном объёме.

Помимо того, что изучаемая модель позволяет судить об эффективности производства, на её основе можно получить и рекомендации о том, как повысить эффективность производства. Ориентируясь на последнее наблюдение по Диатомовому комбинату и вычисленные для него значения коэффициентов степенной производственной функции комплексных переменных, которая имеет вид:

$$G + iC = 1{,}502\left(K + iL\right)^{1{,}385}, \qquad (5.4.1)$$

сформулируем рекомендации для руководства предприятия, которые следует из модели.

Прежде всего, определим, какие может получить комбинат прибыль и издержки, если производство усовершенствовать в максимально возможной степени. Конечно, это предложение является идеализированным, поскольку мы не учитываем все возможные факторы и условия. Поэтому рассматривается предельный случай. Итак, если усовершенствовать производство до этого недостижимого предельного случая, то в модели это отражается, когда S=100%, или

$$b = b_G = 0{,}105.$$

Возьмём те же самые значения ресурсов K и L за 2 квартал 2007 года и рассчитаем значения G и C при показателе степени $b = b_G = 0{,}105$. Получим в относительных величинах:

$$G^* = 1{,}512,\ C^* = 0{,}172. \qquad (5.4.2)$$

Заметим, что издержки производства при рассматриваемом случае существенно снизились, поскольку они отнесены к начальному их значению за 1 кв. 2004 года и весь рассматриваемый период увеличивались, начиная с единицы. А в (5.4.2) наблюдаем снижение себестоимости более чем в пять раз! Тип производства, при котором достижимы такие величины прибыли и затрат является идеальным, а полученные расчётные величины являются предельными. Эти недостижимые значения показывают направления для возможного развития предприятия, в частности, они свидетельствуют о том, что при существующей технологии производства и при более рациональном использовании имеющихся ресурсов, в том числе и трудовых, Диатомовый комбинат может получить значительно большую прибыль и понести меньшие издержки. Но что для этого надо сделать?

Для ответа на поставленный вопрос определим, как предприятие может добиться предельного сочетания прибыли и затрат на производство, равные *G*=1,512; C*=0,172,* если не осуществлять усовершенствование организационно-экономического механизма предприятия, какие ресурсы нужно для этого привлечь. Для этого в формулу (5.4.1), которая отражает существующее положение на предприятии, подставим эти предельные значения валовой прибыли и издержек, на основе чего вычислим необходимые размеры капитала и труда, с помощью которых, не меняя ничего другого на предприятии, можно достичь искомых значений прибыли и издержек. В абсолютных величинах они будут равны:

$$K = 5550 \text{ тыс. руб.}, \ L = 455 \text{ тыс. руб.} \qquad (5.4.3)$$

Для сравнения отметим, что на 2 квартал 2007 года на Диатомовом комбинате стоимость основных производственных фондов составила 2919 тыс. руб., а фонд оплаты труда – 5517 тыс. руб.

О чём говорит это сравнение? Для перевода комбината в область более эффективного производства следует увеличить основные производственные фонды комбината в 5550/2919=1,9 раза, а фонд оплаты труда следует сократить в 5517/455=12 раз. Сделать это можно, сокращая излишние трудовые ресурсы и повышая производительность труда.

А теперь можно дать экономическую интерпретацию полученным результатам.

Расчётные величины труда и капитала позволяют сделать вывод о том, что ресурсы на предприятии используются неэффективно: для увеличения эффективности производства стоит увеличить инвестиции в основные производственные фонды и сократить затраты труда. Приведённые пропорции не говорят о том, что именно в таких масштабах и следует осуществить изменение ресурсов, нет. Любая модель представляет собой результат абстрагирования, не учитываются многие реальные факторы, поэтому мы и назвали вычисленные значения валовой прибыли и издержек производства по идеальной модели «предельными». Полученные пропорции позволяют определить главное направление действий. Поскольку для достижения эффективного производства необходимо капитал увеличить в 1,9 раза, а трудовые ресурсы необходимо сократить в 12 раз, то очевидно, что главным направлением усовершенствования деятельности предприятия являются трудовые ресурсы. Именно они на комбинате используются неэффективно, поэтому рационализация труда персонала является важным фактором повышения эффективности производства. Инвестиции, как это видно из расчётов, также не следует сбрасывать со «счетов» экономического анализа, но главный объект внимания менеджмента комбината для повышения эффективности производства – трудовые ресурсы. Руководству комбината стоит заняться изучением пропорции между промышленно-производственным и прочим персоналом комбината, организацией труда и заработной платы поскольку именно здесь кроются резервы повышения эффективности производства.

Следует отметить, что критерий максимума валовой прибыли является основным критерием работы предприятия, но иногда возникают такие конкурентные ситуации на рынке, при которых предприятию во что бы то ни стало необходимо занять лидирующие позиции на рынке по объёму продаж. Это означает, что основным критерием работы предприятия в этом случае является критерий максимума объёма производства. Отдавая себе отчёт в том, что объёмы производства и объёмы продаж – понятия хотя и взаимосвязанные, но всё же разные, мы, тем не менее, в целях упрощения задачи, делаем упор на их близости друг к другу, а не на отличиях, и предположим, что критерию максимума объёма производства соответствует максимум дохода. Тогда можно осуществить аналогичные расчёты по Диатомовому комбинату, но с использованием вместо b_G значения b_Q, то есть, когда

$$b = b_Q = 0,829.$$

Получим следующие результаты.

Максимум дохода комбината будет составлять *Q=61747* тыс. руб., но при этом прибыль будет *G=27359* тыс. руб., а издержки составят *C=34387* тыс. руб. Это состояние достижимо при увеличении основных производственных фондов *K* до 4732 тыс. руб. и сокращении зарплаты *L* до 3590 тыс. руб. То есть, получается, что для достижения максимума дохода, надо также, как и для достижения максимума прибыли, увеличивать стоимость основных производственных фондов в *4732/2919=1,6* раза и сокращать затраты трудовых ресурсов в *5517/3590=1,54* раза. Это означает, что Диатомовый комбинат работает в состоянии, близком к максимуму объёмов производства при данной технологии и организации производства. Если вспомнить о том, что Диатомовый комбинат является единственным в России поставщиком диатомовых теплоизоляционных кирпичей для цветной металлургии страны, но его конкурентом выступают производители из Китая, понятно, что комбинат стараясь не допустить конкурента на рынок, в максимальной степени обеспечивает потребителей своей продукцией.

Интересно теперь сравнить результаты и рекомендации, полученные с помощью степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами с результатами и рекомендациями, которые следуют при применении в данном случае производственной функции Кобба-Дугласа. Оценив параметры степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами и производственной функции Кобба-Дугласа с помощью МНК по данным Диатомового комбината, были получены модели следующего вида:

$$G + iC = 1,398\left(K + iL\right)^{1,319}. \quad (5.4.4)$$

$$Q = 2,348K^{0,457}L^{0,543}. \quad (5.4.5)$$

Ошибка аппроксимации дохода по первой модели (5.4.4) составила 15,3%, а по второй модели (5.4.5) – 14,8%. То есть, эти две модели практически с одинаковой степенью точности аппроксимируют исходные данные рассматриваемого производства.

Рекомендации, которые можно получить с помощью производственной функции Кобба-Дугласа, заключаются в том, что для увеличения дохода Диатомовому комбинату необходимо увеличивать инвестиции в основные производственные фонды, и увеличивать трудовые ресурсы (численность персонала), причём увеличение численности персонала более желательно, поскольку коэффициент эластичности (5.4.5) по труду больше, чем по капиталу. Вычисленное с помощью МНК значение показателя степени при трудовых ресурсах L функции Кобба-Дугласа, равное *0,543* говорит о том, что, увеличивая число занятых в производстве на один процент, можно получить увеличение дохода на *0,543*%.

Так, если оставить неизменной величину ОПФ за последний год наблюдения в размере *2919* тыс. руб., и увеличивать число работающих на комбинате, то, например, удвоения валового выпуска можно добиться, как следует из функции Кобба-Дугласа (5.4.5), увеличивая трудовые ресурсы до *2187* человек (сохраняя текущую заработную плату). Если теперь подставить эти значения капитальных и трудовых ресурсов в нашу функцию (5.4.4), то будет промоделирован иной результат, а именно: валовая прибыль будет отрицательной и равной (*-60499*)тыс. руб., а издержки производства – равны *191045* тыс. руб.. Валовой выпуск составит *130546* тыс. руб. Из чего следует очевидный вывод – ни в коем случае не увеличивать численность занятых на комбинате, а наоборот, сократить их число, оптимизируя организацию их труда.

Поскольку две производственные функции (5.5.4) и (5.5.5) обладают почти одинаковой степенью точности аппроксимации прошлых значений моделируемого производства (15,3% и 14,8% соответственно), а предлагают диаметрально противоположные рекомендации касательно развития производства, возникает естественная альтернатива – выбора той модели, которая действительно описывает ситуацию, а не искажает её.

Для получения ответа на вопрос: рекомендации какой из двух моделей ближе к истинному положению дел на комбинате и какая модель адекватна описывает производственную ситуацию, - мы обратились к руководству самого Диатомового комбината. Генеральный директор комбината к.э.н. Е.А.Никифоров объяснил, что количество занятых на комбинате действительно является излишним. Вызвано это тем, что комбинат является градообразующим предприятием, поэтому для снижения уровня социальной напряжённости и уменьшения безработицы в городе руководство и приняло решение обеспечить работой максимально возможное число жителей Инзы, используя трудовые ресурсы не самым эффективным образом. По мнению директора комбината, трудовые ресурсы на предприятии избыточны. Относительно капитальных ресурсов комбината ситуация на нём такая. После кризиса 90-х годов XX века, когда комбинат практически остановился, его материально-техническая база пришла в упадок и частично была разрушена (в условиях безработицы жители Инзы начали растаскивать основные средства комбината на продажу в виде металлолома). Только с конца 90-х годов прошлого века начались работы по восстановлению комбината, в первую очередь – инвестиции в основной капитал. Поэтому стратегическим направлением развития Диатомового комбината считается ускоренное увеличение инвестиций в основной капитал при сохранении численности занятых (в силу социально-экономических причин), что как видно из приведённого примера, полностью соответствует выводам и рекомендациям степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (5.5.4) и противоречит рекомендациям производственной функции Кобба-Дугласа (5.5.5).

Из данного примера вовсе не следует делать вывод о том, что наша функция всегда лучше, чем функция Кобба-Дугласа. Но поскольку в данном примере она адекватно описала производственный процесс, а функция Кобба-Дугласа – не адекватно, следует однозначный вывод о том, что могут встретиться и другие производственные ситуации, когда комплекснозначная производственная функция будет лучше, чем производственная функция действительных переменных.

Проверим возможность применения степенных производственных функций комплексных переменных с действительными переменными на примере экономики макроуровня. Воспользуемся для этого статистическими данными по промышленности России за 1998-2004 года, представленные в табл. 5.10.

Для построения степенной производственной функции комплексных переменных нужны данные по валовой прибыли и издержкам производства, которые в статистических сборниках Госкомстата РФ в целом для страны не приводятся. Впрочем, необходимые расчётные значения прибыли и издержек можно получить, исходя из величин рентабельности производства, которые приведены в таблице. Вместо основных производственных фондов будем использовать величину инвестиций в основной капитал.

Табл. 5.10

Исходные статистические данные по промышленности России[32]

Год	Объем промышленной продукции, млрд. руб.	Среднегодовая численность промышленно-производственного персонала, тыс. человек	Инвестиции в основной капитал в отрасли, производящие товары, млн. руб.	Уровень рентабельности проданных товаров, продукции (работ, услуг)
1998	1707	13173	165092	0,127
1999	3150	13077	297278	0,255
2000	4763	13294	527544	0,247
2001	5881	13282	699366	0,185
2002	6868	12886	817504	0,144
2003	8498	12384	980188	0,135
2004	11209	11977	1179744	0,179

[32] http://www.gks.ru

Приведя полученные данные к относительным величинам (к 1998 году), с помощью МНК найдены расчётные значения коэффициентов модели:

$$G + iC = 0{,}001(K + iL)^{3{,}457} . \qquad (5.4.6)$$

Высокое значение показателя степени не должно пугать – ведь за рассматриваемый период полярный угол комплексного ресурса уменьшился почти в восемь раз! Полярный угол комплексного производственного результата остался почти неизменным. Именно поэтому показатель степени в модели (5.4.6) оказался столь велик. Как следует из рекомендаций модели, способствовать росту эффективности производства будет увеличение инвестиций в основной капитал.

Расчёт контрольных точек для этой модели не имеет смысла, поскольку вместо основных фондов в модели используются инвестиции.

5.5. Коэффициенты эластичности комплекснозначной степенной производственной функции с действительными коэффициентами

Одним из важнейших показателей, используемых в практике моделирования экономических процессов, является коэффициент эластичности. По определению коэффициент эластичности вычисляется так:

$$\varepsilon_{yx} = \frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x} . \qquad (5.5.1)$$

В экономической теории, например, характеризуя поведение спроса, очень часто используют показатель эластичности спроса по цене.

Смысл коэффициента эластичности очевиден – он показывает, на сколько процентов меняется результат при изменении фактора на один процент.

Переходя от дискретных величин к непрерывным, коэффициент эластичности может быть представлен так:

$$\varepsilon_{yx} = \frac{dy}{y} \Big/ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} . \qquad (5.5.2)$$

Эта форма записи позволяет вычислить коэффициенты эластичности для разных дифференцируемых функций, в том числе и производственных функций. Для степенных производственных функций действительных переменных коэффициент эластичности производственного результата по каждому из ресурсов равен показателям степени при этих ресурсах, что делает такие функции ещё более интересными для аналитических целей – по показателям степени при ресурсах можно судить о вкладе каждого ресурса в объём производства.

Поскольку мы изучаем производственные функции комплексных переменных, то ознакомившись с основными свойствами степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами, хотелось бы определить и то, какой вид имеют для такой функции коэффициенты эластичности по ресурсам. Для этого, как следует из (5.5.2), необходимо вычислить первые производные функции по её переменным – труду и капиталу.

Прежде всего, для вычисления производных, представим модель производственной функции (5.3.2) в экспоненциальной форме:

$$G + iC = a(Re^{i\theta})^b . \tag{5.5.3}$$

Здесь:

$$R = \sqrt{K^2 + L^2}\ ,\ \theta = arctg\frac{L}{K} .$$

Теперь легко сгруппировать модуль модели и её полярный угол:

$$G + iC = aR^b e^{ib\theta} . \tag{5.5.4}$$

С учётом этого модель степенной комплекснозначной производственной функции может быть представлена в тригонометрической форме:

$$G + iC = aR^b[\cos(b\theta) + i\sin(b\theta)] . \tag{5.5.5}$$

Это позволяет вычислить первую и вторую (если понадобится) частные производные комплекснозначной функции по ресурсам – капиталу и труду. Согласно условию Даламбера-Эйлера (Римана-Коши) для нахождения производной комплекснозначной функции достаточно взять производные по её действительной или мнимой части. Действительная часть модели (5.5.5) представима в виде:

$$\mathrm{Re}(G + iC) = aR^b \cos(b\theta) = U . \tag{5.5.6}$$

Поэтому производную функции (5.3.2) по ресурсам можно найти так:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)}=\frac{\partial U}{\partial K}-i\frac{\partial U}{\partial L}=\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}-i\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}. \qquad (5.5.7)$$

Вычислим первую составляющую производной (5.5.7), а именно - $\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}$ как производную сложной функции:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=\frac{\partial(aR^b)}{\partial K}\cos b\theta+\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial K}(aR^b). \qquad (5.5.8)$$

Первая часть (5.5.8) будет иметь вид:

$$\frac{\partial(aR^b)}{\partial K}\cos(b\theta)=abR^{b-1}\frac{K}{\sqrt{K^2+L^2}}\cos(b\theta). \qquad (5.5.9)$$

Или:

$$\frac{\partial(aR^b)}{\partial K}\cos(b\theta)=abR^{b-2}K\cos(b\theta). \qquad (5.5.10)$$

Вторая часть (5.5.8) представляет собой производную косинуса аргумента по K. Её также можно вычислить:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial K}(aR^b)=-aR^b\sin(b\theta)\frac{\partial(b\theta)}{\partial K}=-aR^b\sin(b\theta)\frac{\partial(arctgb\frac{L}{K})}{\partial K}.$$

Применяя формулу вычисления производной арктангенса, окончательно имеем:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial K}(aR^b)=-abR^b\sin(b\theta)\frac{-L}{K^2(1+\frac{L^2}{K^2})}=abR^b\sin(b\theta)\frac{L}{R^2}=abR^{b-2}L\sin(b\theta). \qquad (5.5.11)$$

Тогда частная производная степенной комплекснозначной производственной функции с действительными коэффициентами по капиталу (5.5.8) будет записана так:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=abR^{b-2}K\cos(b\theta)+abR^{b-2}L\sin(b\theta)=abR^{b-2}(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta)). \qquad (5.5.12)$$

Теперь точно также можно найти частную производную степенной производственной функции (5.3.2) по труду: $\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}$.

Поскольку эта производная является производной сложной функции, то её можно вычислить так:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}=\frac{\partial(aR^b)}{\partial L}\cos(b\theta)+\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial L}(aR^b)\,. \qquad (5.5.13)$$

Первое слагаемое (5.5.13) с учётом производной модуля может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\partial(aR^b)}{\partial L}\cos(b\theta)=abR^{b-1}\frac{L}{\sqrt{K^2+L^2}}\cos(b\theta)=abR^{b-2}L\cos(b\theta)\,. \qquad (5.5.14)$$

Второе слагаемое (5.5.13) включает в себя производную косинуса аргумента по труду. Эту производную также можно вывести:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial L}(aR^b)=-abR^b\sin\theta\frac{\partial(arctg\,\frac{K}{L})}{\partial L}\,.$$

Вычисляя производную арктангенса, получим окончательно для этого слагаемого:

$$\frac{\partial\cos(b\theta)}{\partial L}(aR^b)=-abR^b\sin(b\theta)\frac{K}{K^2(1+\frac{L^2}{K^2})}=-abR^{b-2}K\sin(b\theta)\,. \qquad (5.5.15)$$

Тогда производная по труду будет иметь вид:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial L}=abR^{b-2}L\cos(b\theta)-abR^{b-2}K\sin(b\theta)=abR^{b-2}(L\cos(b\theta)-K\sin(b\theta))\,. \quad (5.5.16)$$

Теперь можно получить производную функции по комплексному ресурсу (5.5.7):

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)}=abR^{b-2}(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta))-iabR^{b-2}(L\cos(b\theta)-K\sin(b\theta))\,.$$

Это выражение легко упростить:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)} = abR^{b-2}[(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta)-iL\cos(b\theta)+iK\sin(b\theta)] = \\ = abR^{b-2}[(K-iL)(\cos(b\theta)+i\sin(b\theta)]. \qquad (5.5.17)$$

Поскольку

$$\cos(b\theta)+i\sin(b\theta)=e^{ib\theta},$$

а

$$R^{-2}(K-iL)=\frac{K-iL}{K^2+L^2}=\frac{1}{K+iL},$$

то (5.5.17) можно записать в более удобной форме:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)} = abR^b e^{ib\theta}(K+iL)^{-1} = b(K+iL)^{-1}[aR^b e^{ib\theta}]. \qquad (5.5.18)$$

Зная эту величину первой производной степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами по комплексному аргументу, можно вычислить коэффициент эластичности этой функции. Он будет иметь вид:

$$\varepsilon = \frac{\partial(G+iC)}{\partial(K+iL)}\frac{K+iL}{G+iC} = b(K+iL)^{-1}[aR^b e^{ib\theta}]\frac{K+iL}{G+iC} = b\frac{aR^b e^{ib\theta}}{G+iC}\frac{K+iL}{K+iL} = b. \qquad (5.5.19)$$

Итак, коэффициент эластичности степенной комплекснозначной функции с действительными переменными по комплексному ресурсу равен показателю степени. Это означает, что исследуемая модель обладает такой характеристикой – при увеличении производственных ресурсов на один процент производственный результат увеличится на b процентов.

На практике это знание может использоваться так. В предыдущем параграфе были найдены параметры степенной производственной функции для Диатомового комбината. Модель (5.4.4) имеет вид:

$$G+iC=1{,}398\left(K+iL\right)^{1{,}319}.$$

Это говорит о том, что при увеличении каждого из производственных ресурсов на один процент, производственный результат увеличится на 1,319 процентов.

Точно также может использоваться для анализа и модель промышленности России, для которой в предыдущем параграфе были найдены значения коэффициентов этой производственной функции (5.4.6):

$$G+iC=0{,}001(K+iL)^{3{,}457}.$$

Поскольку показатель степени является и коэффициентом эластичности, то очевиден вывод – увеличение трудовых и капитальных ресурсов в промышленности России в этот период ведёт к увеличению производственного результата на 3,457 процентов.

Замечательные свойства комплекснозначной экономики проявляются в том, что мы можем, используя степенную комплекснозначную производственную функцию, определить и вклад каждой из составляющих комплексного ресурса. Поскольку в реальной экономике возможно увеличение на один процент, например, трудовых ресурсов при неизменности капитальных ресурсов, то важно получить ответ на вопрос о том, на сколько процентов при этом изменятся валовая прибыль и издержки производства? Для ответа на поставленный вопрос необходимо вычислить коэффициенты эластичности комплексного результата по каждому из ресурсов – труду и капиталу.

Для этого вначале вычислим, используя те же обозначения, что и ранее, первую частную производную комплекснозначной функции по капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}+i\frac{\partial(aR^b\sin(b\theta))}{\partial K}. \qquad (5.5.20)$$

Для первого слагаемого ранее в (5.5.12) было получено:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=abR^{b-2}(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta)).$$

Опуская трудоёмкие вычисления подобно тем, которые указаны выше, для второго слагаемого (5.5.20) получим:

$$\frac{\partial(aR^b\cos(b\theta))}{\partial K}=abR^{b-2}(K\sin(b\theta)-L\cos(b\theta)). \qquad (5.5.21)$$

Подставляя полученные результаты в (5.5.20), определяем такой вид первой частной производной функции по капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=abR^{b-2}[(K\cos(b\theta)+L\sin(b\theta))+i(K\sin(b\theta)-L\cos(b\theta))]. \qquad (5.5.22)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках:

$$K\cos(b\theta)+iK\sin(b\theta)-i(L\sin(b\theta)+L\cos(b\theta))=(K-iL)(\cos(b\theta)+i\sin(b\theta))=(K-iL)e^{ib\theta}.$$

Множитель перед квадратными скобками (5.5.22) можно представить так:

$$abR^{b-2} = ab\frac{R^b}{K^2 + L^2}$$

С учётом этих упрощений можно получить удобную для дальнейших вычислений формулу первой частной производной комплексного результата по капиталу:

$$\frac{\partial(G + iC)}{\partial K} = ab\frac{R^b}{K^2 + L^2}(K - iL)e^{ib\theta} = b(aR^b e^{ib\theta})\frac{K - iL}{K^2 + L^2}\,. \tag{5.5.23}$$

Откуда коэффициент эластичности степенной производственной функции комплексных переменных по капиталу:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial(G + iC)}{\partial K}\frac{K}{G + iC} = b(aR^b e^{ib\theta})\frac{K - iL}{K^2 + L^2}\frac{K}{aR^b e^{ib\theta}} = b(\frac{K^2}{K^2 + L^2} - i\frac{LK}{K^2 + L^2})\,. \tag{5.5.24}$$

Получили комплексный коэффициент эластичности, который для удобства может быть представлен так:

$$\varepsilon_K = \varepsilon_{rk} + i\varepsilon_{ik}\,. \tag{5.5.25}$$

Его действительная часть характеризует величину, на которую изменится валовая прибыль, если капитал увеличится на единицу:

$$\varepsilon_{rk} = b\frac{K^2}{K^2 + L^2}\,. \tag{5.5.26}$$

В знаменателе действительной части комплексного коэффициента эластичности находится величина, ранее названная масштабом производственных ресурсов. Сама дробь всегда меньше единицы, поэтому действительная часть коэффициента эластичности по капиталу, отражающая рост валовой прибыли, определяется значением показателя степени b.

В том случае, когда рост капитала на один процент ведёт к росту валовой прибыли также на один процент, выполняется очевидное равенство:

$$1 + \frac{L^2}{K^2} = b\,. \tag{5.5.27}$$

Такой процесс отражает постоянную отдачу капитального ресурса.

Естественно, что для производства с убывающей отдачей ресурса, когда коэффициент эластичности меньше единицы, показатель степени должен быть меньше этой величины:

$$1+\frac{L^2}{K^2}<b\,. \tag{5.5.28}$$

Если же показатель степени превышает это значение:

$$1+\frac{L^2}{K^2}>b\,, \tag{5.5.29}$$

то модель отражает процесс с возрастающей отдачей капитального ресурса.

В (5.3.4) были определены пределы изменения показателя степени рассматриваемой функции:

$$0<b\varphi\leq\frac{3\pi}{4}\,.$$

В силу положительности этого коэффициента положительна и действительная часть комплексного коэффициента эластичности. Это означает, что увеличение капитального ресурса всегда в данной модели означает увеличение валовой прибыли – в большей или меньшей степени в зависимости от величины показателя степени (5.5.27) – (5.5.29).

Мнимая составляющая комплексного коэффициента эластичности функции по капиталу имеет вид:

$$\varepsilon_{ik}=-b\frac{LK}{K^2+L^2}\,. \tag{5.5.30}$$

Дробь этого выражения всегда положительна, как и показатель степени b, поэтому мнимая составляющая комплексного коэффициента эластичности по капиталу всегда отрицательна. Это означает, что рассматриваемая модель описывает производственные процессы, при которых любое увеличение капитала ведёт к снижению издержек производства, то есть – к снижению себестоимости единицы продукции. А большинство реальных производственных процессов как раз и ведёт себя именно таким образом. Процент снижения издержек производства определяется, как видно из (5.5.30) показателем степени b и значениями труда и капитала.

Поскольку сумма валовой прибыли и издержек представляет собой объём реализованной продукции, то в том случае, когда и валовая прибыль, и издержки производства приведены к валовому выпуску, сумма действительной и мнимой частей комплексного коэффициента эластичности по капиталу будет характеризовать эластичность выпуска по капиталу:

$$\varepsilon_{QK}=\varepsilon_{rk}+\varepsilon_{ik}=b\frac{K^2-LK}{K^2+L^2}\,. \tag{5.5.31}$$

Откуда со всей очевидностью следует, что коэффициент эластичности выпуска по капиталу может быть и отрицательной величиной, если числитель (5.5.31) отрицателен – для трудоёмких процессов. Но с ростом капитального ресурса при постоянстве трудового ресурса коэффициент эластичности выпуска по капиталу становится положительным. Это обстоятельство ещё раз подчёркивает необходимость тщательного подбора принципов масштабирования исходных переменных. Формула (5.5.31) имеет смысл в том случае, когда труд измеряется в денежных единицах и все переменные приведены, например, к валовому выпуску, исчисленному в денежных единицах.

Аналогично можно вычислить первую производную степенной производственной функции по труду, а на её основе определить формулу для вычисления коэффициента эластичности функции по этому ресурсу. Опуская предварительные вычисления, аналогичные приведенным выше, представим итоговую формулу:

$$\varepsilon_L = \frac{\partial(G+iC)}{\partial L}\frac{L}{G+iC} = b\left(\frac{L^2}{K^2+L^2} + i\frac{LK}{K^2+L^2}\right). \qquad (5.5.32)$$

И этому комплексному коэффициенту эластичности можно дать экономическую интерпретацию. Поскольку он является комплексным, то удобнее рассмотреть его действительную и мнимую части:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{rl} + i\varepsilon_{il}. \qquad (5.5.33)$$

Действительная часть комплексного коэффициента эластичности производства по труду равна:

$$\varepsilon_{rl} = b\frac{L^2}{K^2+L^2}. \qquad (5.5.34)$$

Поскольку показатель степени положителен, то это означает положительность коэффициента эластичности действительной части производственного результата по труду. Действительной частью производственного результата в рассматриваемом случае выступает валовая прибыль. То есть, с ростом трудовых ресурсов растёт и валовая прибыль. Опять-таки, отдача трудовых ресурсов будет постоянной, если выполняется равенство:

$$1+\frac{K^2}{L^2} = b. \qquad (5.5.35)$$

Сравним это условие с условием постоянной отдачи капитального ресурса (5.5.27). Из этого сравнения следует простой вывод – модель производственной функции моделирует постоянную отдачу валовой прибыли всех ресурсов только в том случае, когда показатель степени равен двум, то есть, когда величина капитального ресурса равна величине трудового ресурса.

Естественно, что для производства с убывающей отдачей валовой прибыли по трудовому ресурсу, соответствует условие, когда коэффициент эластичности меньше единицы. Тогда показатель степени должен быть меньше величины:

$$1+\frac{K^2}{L^2}<b\,. \tag{5.5.36}$$

Очевидно, что это условие одновременно соответствует условию (2.5.29):

$$1+\frac{L^2}{K^2}>b\,,$$

которое характеризовало возрастающую отдачу прибыли по капитальному ресурсу.

Если же показатель степени превышает значение:

$$1+\frac{K^2}{L^2}>b\,, \tag{5.5.37}$$

то модель отражает процесс с возрастающей отдачей трудового ресурса в части роста валовой прибыли. При этом очевидно неравенство (5.5.28):

$$1+\frac{L^2}{K^2}<b\,,$$

которое соответствует процессу убывающей отдачи капитального ресурса.

Итак, анализ комплексных коэффициентов эластичности степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами показал, что эта функция моделирует процесс возрастающей отдачи капитального ресурса по валовой прибыли при одновременной убывающей отдаче трудового ресурса в валовую прибыль, или же - процесс убывающей отдачи капитала в валовую прибыль предприятия при возрастающей отдаче трудового ресурса. Исключением является ситуация постоянной отдачи ресурсов, когда показатель степени равен двум.

Мнимая составляющая комплексного коэффициента эластичности по труду (5.5.32) имеет вид:

$$\varepsilon_{il}=b\frac{LK}{K^2+L^2}\,. \tag{5.5.38}$$

Поскольку все составляющие этой части коэффициента эластичности положительны, то рост труда неминуемо ведёт к увеличению мнимой части коэффициента эластичности, то есть – к росту издержек производства. Это также в точности соответствует реальной производственной ситуации – рост затрат на оплату труда увеличивает общую сумму производственных издержек.

Теперь необходимо рассмотреть вклад трудового ресурса в производство в целом, то есть – в изменение объёма выпуска продукции. Для этого сложим две части коэффициента (5.5.32), оценивая вклад трудового ресурса в совместный рост валовой прибыли и издержек производства, предполагая, что переменные отмасштабированы должным образом:

$$\varepsilon_{QL} = \varepsilon_{rl} + \varepsilon_{il} = b\frac{L(L+K)}{K^2+L^2}. \qquad (5.5.39)$$

Рост трудовых ресурсов на один процент увеличивает объём производства на указанную величину.

Завершая исследование степенной производственной функции комплексной переменной с действительными коэффициентами, следует указать ещё на одно важное свойство комплексных коэффициентов эластичности комплексного производственного результата по ресурсам. Если сложить коэффициент эластичности по капиталу (5.5.24) с коэффициентом эластичности по труду (5.5.32), то их сумма даёт величину общего коэффициента эластичности (5.5.19):

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_L = b\left(\frac{K^2}{K^2+L^2} - i\frac{LK}{K^2+L^2}\right) + b\left(\frac{L^2}{K^2+L^2} + i\frac{LK}{K^2+L^2}\right) = b.$$

Это очевидное равенство даёт нам общее представление об эластичности степенной комплекснозначной модели с действительными переменными.

Вывод, который можно сделать из материалов этого параграфа, заключается в том, что степенная комплекснозначная производственная функция с действительными коэффициентами не только более адекватно описывается производственный процесс – валовую прибыль и издержки производства одновременно, - но и обладает значительно более обширными аналитическими способностями. Если у аналогичной модели степенной производственной функции с действительными коэффициентами имеются только два коэффициента эластичности, являющимися показателями степени при ресурсах, то комплекснозначная модель даёт возможность рассчитать общий коэффициент эластичности (5.5.19), комплексный коэффициент эластичности по капиталу (5.5.25), который состоит из двух действительных коэффициентов эластичности, коэффициент эластичности выпуска Q по капиталу (5.5.31), комплексный коэффициент эластичности по труду (5.5.32) с двумя действительными составляющими и коэффициент эластичности выпуска по труду

(5.5.39). Всего семь различных коэффициентов эластичности, отражающих самые разнообразные стороны влияния двух ресурсов на производственный результат.

5.6. Степенная производственная функция комплексных переменных с комплексными коэффициентами

Степенная производственная функция комплексного переменного с действительными коэффициентами, как было показано в предыдущих параграфах, обладает замечательными свойствами соответствия реальным производственным процессам. Её семь коэффициентов эластичности существенно расширяют аналитический инструментарий экономиста. Но всё многообразие производств, наблюдаемое в экономике, не может быть описано только одной этой функцией. Реальная действительность значительно богаче и многообразнее, и это многообразие только частично описывается степенной моделью комплексной переменной с действительными коэффициентами. Как следует из выводов предыдущего параграфа, эта модель описывает процессы и с возрастающей отдачей ресурсов, и с убывающей отдачей ресурсов, и с постоянной их отдачей. Но ведь встречаются ситуации кризисного производства или цикличного производства и др. Поэтому, несмотря на то, что модель (5.3.2) во многом является универсальной, но она не всегда может давать лучшие результаты моделирования производства.

Модель с действительными коэффициентами (5.3.2) является одной из самых простых в классе степенных производственных функций комплексных переменных. Наиболее общей в этом классе возможных степенных производственных функций комплексных переменных является функция с комплексными переменными (5.3.1):

$$G+iC=\left(a_0+ia_1\right)\left(K+iL\right)^{\left(b_0+ib_1\right)}. \qquad (5.6.1)$$

Из этой, наиболее общей функции, варьируя составом четырёх коэффициентов, можно выделить самые разнообразные подвиды, одним из которых является степенная производственная комплекснозначная функция с действительными коэффициентами (если мнимые части комплексных коэффициентов равны нулю), а другим – линейная функция комплексных переменных (когда показатель степени равен действительному числу – единице).

Моделируемые производственные процессы многообразны, поэтому можно предполагать, что в различных случаях наилучшим может быть один из подвидов степенных функций. В этой связи возникает вопрос: как в каждом конкретном случае выбрать из указанного многообразия производственных функций одну, наилучшую? Для этого мы рекомендуем следующую процедуру. С помощью МНК находятся параметры общей степенной функции с комплексным коэффициентом пропорциональности и комплексным показателем степени (5.6.1). Исходя из того, чему равны найденные с помощью МНК коэффициенты a_0, a_1, b_0 и b_1, исследователь может выбирать, какую производственную функцию ему использовать при моделировании. Например, если $b_1 \to 0$ и $a_1 \to 0$, то, исходя из принципа простоты, в моделировании стоит использовать степенную производственную функцию комплексного переменного с вещественными коэффициентами вида:

$$G + iC = a_0 \left(K + iL\right)^{b_0}.$$

Если значения коэффициентов степени близки к нулю, стоит использовать простую линейную функцию комплексных переменных:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)\left(K + iL\right).$$

По приведённым выше статистическим данным можно построить, например, степенную производственную функцию с комплексными коэффициентами для Диатомового комбината. Расчёты придают ей следующий вид:

$$G + iC = \left(0{,}534 + i0{,}363\right)\left(K + iL\right)^{0{,}459 - i0.355}.$$

Как видно, все составляющие комплексных коэффициентов у этой функции (и действительные, и мнимые части) имеют значительные величины, поэтому для целей аппроксимации и экономического анализа другие, более упрощённые модели использовать не стоит. Следует отметить, что эта модель неплохо аппроксимирует реальные данные (средняя ошибка аппроксимации 20%) с учётом того, что инвестиции K в основной капитал Диатомового комбината за рассматриваемый промежуток времени меняются ступенчато, а их последствия пролонгированы во времени, что не может не снижать точности описания промышленной динамики любыми моделями.

Несколько иначе обстоит дело со степенной производственной функцией с комплексными коэффициентами для промышленного производства России. МНК позволил получить по имеющимся статистическим данным модель такого вида:

$$G + iC = \left(1{,}732 - i0{,}213\right)\left(K + iL\right)^{0{,}896 + i0{,}351}$$

Здесь мнимая составляющая коэффициента пропорциональности мала и близка к нулю по сравнению с величиной её вещественной части. Действительно, мнимая часть комплексного коэффициента пропорциональности, равная (-0,213) по модулю в восемь раз меньше, чем действительная часть этого коэффициента (1,732). Эта модель хорошо аппроксимирует реальные данные - средняя ошибка аппроксимации производственного результата составила (4,6%). Но для упрощённых расчётов, в силу малости значений a_1, можно использовать модель следующего вида:

$$G + iC = a\left(K + iL\right)^{b_0 + ib_1}$$

Таким образом, расчеты по статистическим данным, проведённые в соответствии с предложенными подходами, даёт возможность выбора степенных производственных функций с разными коэффициентами – комплексными или действительными для того, чтобы в каждом случае использовать модель адекватной сложности.

Поскольку степенные комплекснозначные функции с комплексными коэффициентами могут оказаться наилучшими для моделирования каких-нибудь производственных процессов, то следует более тщательно изучить её свойства, для чего выделим из равенства (5.6.1) действительную и мнимую части:

$$G = f\left(K, L\right)$$
$$C = g\left(K, L\right)$$

В формуле (5.6.1) комплексную переменную $\left(K + iL\right)^{(b_0 + ib_1)}$ можно представить в виде: $e^{(b_0 + ib_1)\ln(K + iL)}$. Теперь формула (5.6.1) примет вид:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)e^{b_0 \ln(K + iL) + ib_1 \ln(K + iL)}. \qquad (5.6.2)$$

Сумму произведений в степени можно преобразовать с учётом свойств логарифмов комплексных чисел, используя их главные значения:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)e^{b_0 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right) + ib_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right) + ib_1 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right) - b_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)}. \qquad (5.6.3)$$

Теперь, группируя действительную и мнимую части степени комплексной переменной, можно получить удобную для дальнейшего исследования формулу:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)e^{b_0 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right) - b_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)} e^{i\left(b_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right) + b_1 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right)\right)}, \qquad (5.6.4)$$

в правой части которой перемножаются комплексный коэффициент $(a_0 + ia_1)$ и комплексная переменная, обозначаемая для простоты записи как $Re^{i\varphi}$. То есть:

$$G + iC = (a_0 + ia_1)Re^{i\varphi}, \tag{5.6.5}$$

где:

$$R = e^{b_0 \ln\left(\sqrt{K^2+L^2}\right) - b_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right)}, \tag{5.6.6}$$

$$\varphi = b_0 \operatorname{arctg}\left(\frac{L}{K}\right) + b_1 \ln\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right). \tag{5.6.8}$$

Теперь, если представить модель (5.6.5) в тригонометрической форме и раскрыть скобки, после группировки действительной и мнимой частей, получим:

$$G + iC = R\left((a_0 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi) + i(a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi)\right). \tag{5.6.9}$$

Что означает выполнение двух равенств:

$$G = R(a_0 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi), \tag{5.6.10}$$

$$C = R(a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi). \tag{5.6.11}$$

Таким образом, для вычисления прибыли *G* и издержек производства *C* исследователю достаточно воспользоваться формулами (5.6.10) и (5.6.11).

По экономическому смыслу рассматриваемой задачи, издержки производства не могут быть отрицательными, а прибыль – может (работа в убыток).

Это означает, что (5.6.11) накладывает ограничения на пределы изменения коэффициентов комплексного коэффициента пропорциональности:

$$a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi > 0 \rightarrow tg\varphi > -\frac{a_1}{a_0}, \tag{5.6.12}$$

где φ вычисляется из (5.6.8).

Нахождение коэффициентов функции (5.6.1) – простая задача, о способах решения которой с помощью МНК говорилось в третьей главе монографии.

Приведём без доказательства (в силу значительной громоздкости вывода) следующее утверждение: коэффициент эластичности степенной комплекснозначной производственной функции с комплексными коэффициентами равен показателю степени этой функции:

$$\varepsilon = b_0 + ib_1. \tag{5.6.13}$$

Из (5.5.1) следует:

$$\Delta y = \varepsilon_{\acute{o}\tilde{o}} y \frac{\Delta x}{x}. \tag{5.6.14}$$

Или:

$$\Delta(G+iC) = (b_0 + ib_1)(G+iC)\frac{\Delta(K+iL)}{K+iL}. \tag{5.6.15}$$

Откуда можно найти, какой процесс изменения валовой прибыли и издержек производства при изменении производственных ресурсов на один процент моделирует степенная производственная функция с комплексными коэффициентами:

$$\begin{cases} \Delta G = (b_0 G - b_1 C)\dfrac{\Delta KK + \Delta LL}{K^2 + L^2} + (b_0 C + b_1 G)\dfrac{\Delta KL - \Delta LK}{K^2 + L^2}, \\ \Delta C = (b_0 C + b_1 G)\dfrac{\Delta KK + \Delta LL}{K^2 + L^2} + (b_0 G - b_1 C)\dfrac{(\Delta LK - \Delta KL)}{K^2 + L^2}. \end{cases} \tag{5.6.16}$$

Как видно из полученных равенств, и валовая прибыль, и издержки производства при различных сочетаниях значений коэффициентов комплексного показателя степени, ресурсов и результатов могут, как уменьшаться с ростом ресурсов, так и увеличиваться. В отличие от степенной функции с действительными коэффициентами, коэффициент эластичности функции с комплексным показателем степени мало что говорит о направлении изменения комплексного результата при увеличении производственных ресурсов на один процент. Всё определяется как сочетанием значений действительной и мнимой части комплексного показателя степени, так и величинами ресурсов и результатов.

Но поскольку это различное сочетание позволяет моделировать многообразные производственные процессы, то всё это говорит о том, что у степенной комплекснозначной функции с комплексными коэффициентами довольно высокие идентификационые свойства. Она описывает разнообразные производственные процессы – от эффективных, до убыточных; от процессов с возрастающей отдачей ресурсов, до процессов с убывающей отдачей ресурсов.

Если на практике требуется провести расчёты объёмов производства, а не прибыли и издержек организации, можно, помня, что при правильном масштабировании $Q = C + G$, вывести формулу нахождения объёма выпуска организации для данной производственной функции. Складывая для этой цели (5.6.7) и (5.6.8), получим:

$$Q = G + C = R\left(a_0 \cos\varphi - a_1 \sin\varphi\right) + R\left(a_0 \sin\varphi + a_1 \cos\varphi\right),$$

или, что то же самое:

$$Q = R\left(\left(a_0 - a_1\right)\sin\varphi + \left(a_0 + a_1\right)\cos\varphi\right). \qquad (5.6.17)$$

Эта функция будет иметь иные коэффициенты эластичности, чем те, которые вычислялись в предыдущем параграфе для степенной комплекснозначной модели с действительными коэффициентами. Поскольку они не имеют такой же ясный смысл, как те, что рассматривались в предыдущем параграфе, то их вычисление здесь не является уместным. Желающие это могут сделать самостоятельно.

Всё, сказанное выше, показывает, что степенная комплекснозначная производственная функция с комплексными коэффициентами может выступать мощным инструментам анализа и моделирования производственных процессов.

5.7. Логарифмическая производственная функция комплексных переменных

В теории производственных функций из всего множества нелинейных моделей экономисты не случайно отдают предпочтение именно степенным моделям – они удобны в использовании и имеют простую экономическую интерпретацию. То же самое можно сказать и о производственных функциях комплексных переменных: степенные функции и удобны в использовании, и имеют простую интерпретацию своих параметров. Тем не менее, в реальной экономике возможны самые разные ситуации, когда и эти модели будут плохо аппроксимировать реальное производство. В таком случае необходимо будет использовать производственные функции иной формы. Одна из таких альтернативных моделей – это модель логарифмической производственной функции комплексных переменных. Рассмотрим в этом параграфе её свойства и особенности практического применения.

В общем виде производственная логарифмическая функция комплексных переменных может быть записана так:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t)\,. \tag{5.7.1}$$

Свободный член этого равенства имеет простой смысл – он корректирует начальные условия модели к реальным значениям переменных. На этом его вклад в моделирование производственной ситуации и заканчивается. Поэтому рассмотрим без ущерба для общности модель без свободного члена:

$$G_t + iC_t = (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t)\,. \tag{5.7.2}$$

Свойства этой модели раскрываются полно, если привести логарифм комплексной переменной к арифметической форме и перемножить полученное значение на комплексный коэффициент пропорциональности:

$$G_t + iC_t = (b_0 + ib_1)(\ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + iarctg\frac{L_t}{K_t})\,.$$

В результате будет получена такая форма записи:

$$G_t + iC_t = (b_0 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - b_1 arctg\frac{L_t}{K_t}) + i(b_1 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + b_0 arctg\frac{L_t}{K_t})\,, \tag{5.7.3}$$

откуда легко получаются два равенства, характеризующие вещественные и мнимые части модели:

$$\begin{aligned} G_t &= b_0 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - b_1 arctg\frac{L_t}{K_t}, \\ C_t &= b_1 \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + b_0 arctg\frac{L_t}{K_t}. \end{aligned} \tag{5.7.4}$$

При положительных значениях коэффициентов с ростом трудовых затрат растут издержки производства, а валовая прибыль в зависимости от значений коэффициентов и масштаба переменных может также расти, но значительно меньше, чем издержки. Но возможен и другой вариант поведения этой функции в данных условиях, когда коэффициент $b_0 << b_1$ – тогда с ростом трудовых ресурсов валовая прибыль снижается.

При росте капитальных ресурсов и положительности коэффициентов модели растут и валовая прибыль, и издержки производства.

Но возможна ситуация, когда коэффициенты модели принимают и отрицательные значения. Например, при отрицательности коэффициента b_1 валовая прибыль будет расти, если наблюдается рост трудовых ресурсов, а влияние капитала неоднозначно – может вести к росту валовой прибыли, а может вести и к падению её значений. При этом также неоднозначно начинают вести себя издержки производства – с ростом затрат трудовых ресурсов они могут и увеличиваться, и уменьшаться. А вот рост капитальных ресурсов однозначно ведёт к снижению издержек производства.

Из чего следует вывод о том, что логарифмическая функция комплексных переменных может быть пригодна для описания нескольких различных производственных ситуаций.

Поскольку модель (5.7.2) имеет всего два коэффициента, то применительно к комплекснозначным функциям это означает возможность оценки их значений на одном статистическом наблюдении. Действительно, из (5.7.2) со всей очевидностью следует, что:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t + iC_t}{\ln(K_t + iL_t)} = \frac{G_t + iC_t}{\ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + iarctg\,\frac{L_t}{K_t}}. \tag{5.7.5}$$

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства на величину, сопряжённую знаменателю, получим:

$$b_0 + ib_1 = \frac{G_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + C_t arctg\,\frac{L_t}{K_t} + i(C_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - G_t arctg\,\frac{L_t}{K_t})}{\ln^2\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + arctg^2\,\frac{L_t}{K_t}}. \tag{5.7.6}$$

Поскольку левые и правые части комплексного равенства означает одновременное равенство друг другу вещественных и мнимых составляющих, получим формулы для вычисления каждого из коэффициентов на наблюдении *t*:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{G_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + C_t arctg\,\frac{L_t}{K_t}}{\ln^2\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + arctg^2\,\frac{L_t}{K_t}}, \\ b_1 &= \frac{C_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2} - G_t arctg\,\frac{L_t}{K_t}}{\ln^2\sqrt{K_t^2 + L_t^2} + arctg^2\,\frac{L_t}{K_t}}. \end{aligned} \tag{5.7.7}$$

Используя ранее приведённые статистические данные по Диатомовому комбинату г.Инзы, рассчитаем эти изменяющиеся во времени коэффициенты для логарифмической производственной функции комплексных переменных этого комбината. Предварительно для нивелирования влияния масштаба проведём центрирование относительно средних арифметических производственных результатов и логарифмов комплексного ресурса, что следует из (5.7.2). Результаты расчётов приведены в табл. 5.11.

Анализ динамики коэффициентов показывает, что оба эти коэффициенты имеют незначительную тенденцию к росту своих значения во времени. Динамика коэффициента b_0 может быть описана линейным трендом, уравнение которого легко находится с помощью МНК:

$$b_{0t} = 0,1051t - 0,8496 .$$

Другой коэффициент b_1 имеет менее выраженную тенденцию роста. Тем не менее она также может быть представлена в виде тренда линейной формы. МНК позволяет найти оценки и этого тренда:

$$b_{1t} = 0,0044t + 0,6521 .$$

Коэффициент пропорциональности последнего тренда очень близок к нулю, что отражает то, что динамика изменения мнимой составляющей b_1 комплексного коэффициента регрессии незначительна, поэтому можно считать этот коэффициент примерно постоянным.

Табл. 5.11

Коэффициенты логарифмической производственной функции комплексных переменных Диатомового комбината г.Инзы

t	b_0	b_1
1	-0,09084	-0,22095
2	-0,3334	-1,05475
3	-0,99276	3,642535
4	0,125047	0,568678
5	0,14192	3,308633
6	-3,03984	0,386848
7	-0,19265	-0,67284
8	1,018661	-0,58261
9	-0,32793	-1,0547
10	0,084627	0,177843
11	1,197226	2,964839

Следовательно, сама логарифмическая комплекснозначная модель (7.5.2) непосредственно для моделирования производства данного комбината не пригодна, на что указывает систематическое изменение одного из коэффициентов модели, но вполне для целей прогнозирования или многовариантного моделирования может быть использована с использование полученных трендов. С учётом линейного изменения во времени одного из коэффициентов логарифмическая комплекснозначная модель производства Диатомового комбината будет иметь вид:

$$G_t + iC_t = (0{,}1051t - 0{,}8496 + i0{,}6521)\ln(K_t + iL_t)$$

Теперь, задавая различные варианты экономического развития ресурсов комбината можно получать и различные варианты комплексного производственного результата.

Аналогичным образом были вычислены коэффициенты этой модели применительно к статистическим данным промышленного производства России. Для того, чтобы избежать необходимости вычисления свободного члена валовая прибыль и затраты на производство были центрированы относительно их средних арифметических. Точно также были центрированы главные значения логарифмов. Динамика изменения коэффициентов приведена в табл. 5.12, из которой наглядно видно, что их вариация существенна, некоторой явно выраженной тенденции коэффициентов не прослеживается, что свидетельствует о невозможности использования логарифмической модели применительно к этому случаю.

Если степенная комплекснозначная функция с комплексными коэффициентами может быть применима практически к каждому производственному процессу с той или иной степенью точности, то логарифмическая функция, как это видно из приведённого примера, более «капризна» и не столь универсальна.

Табл. 5.12

Коэффициенты логарифмической производственной функции комплексных переменных промышленности России

t	b_0	b_1
1998	2,150242	3,502649
1999	1,284403	3,327341
2000	-0,34767	9,019879
2001	0,783986	-0,1516
2002	-1,11559	1,390457
2003	0,08035	3,233731
2004	4,527272	5,703955

Удачным следует признать применение логарифмической производственной функции комплексных переменных на примере одного из предприятий Санкт-Петербурга – «СПб ЗПС». Сам пример был подобран, а вычисления были выполнены Д.Духаниной. Поскольку предприятие работает в условиях нестабильной конъюнктуры, а его производственный цикл довольно значительный, то результаты производственной деятельности по месяцам, а именно эти данные приведены в табл. 5.13, являются нестабильными. Предприятие является малым производством, что отражается и в незначительной вариации ресурсов.

Д.Духанина привела эти данные к безразмерной величине и центрировала их относительно средних арифметических, после чего вычислила динамику каждого коэффициента комплекснозначной логарифмической производственной функции.

Из этой таблицы заметно, что комплексный коэффициент пропорциональности меняется от наблюдения к наблюдению, но это изменение в отличие от рассмотренного выше случая с Диатомовым комбинатом не носит характер некоторой явно выраженной тенденции. Эти изменения в целом не значительны и характеризуют отклонения относительно некоторых средних значений. Исключение составляют последние три наблюдения, для которых вычисленные коэффициенты существенно отличаются от всего ряда.

Поэтому на имеющемся множестве производственных результатов комплекснозначная логарифмическая модель производственной функции будет удовлетворительно описывать производственный процесс. Отклонения по последним трём наблюдениям характеризуют либо влияние случайных факторов, либо о наличии некоторых изменений в тенденциях развития. Поскольку нашей задачей не является тщательное изучение ситуации на этом малом предприятии, удовольствуемся лишь формальной частью – изучением возможности моделирования производства с помощью исследуемой модели.

Табл. 5.13

Помесячные данные о производственной деятельности СПб ЗПС за 2005-2007 гг. и коэффициенты модели

Время, t	Доход Q	Прибыль G	Затраты C	ОПФ K	Коэффициенты модели (7.5.2) b_0	b_1
1	2231714	-30930	2262644	3775895	0,0541	0,0301
2	2015300	-147251	2162551	3746729	0,0711	0,0329
3	1769635	-29932	1799567	3756818	0,0417	0,0190
4	8539410	-919909	9459319	3756818	0,2092	0,0683
5	3670696	-441546	4112242	3727652	0,0920	0,0170
6	2884686	-101970	2986656	3698485	0,0381	-0,0090
7	3004009	-105777	3109786	3669318	0,0378	-0,0099
8	4024720	29734	3994986	3640152	0,0165	-0,0048
9	2098340	146384	1951956	3610985	-0,0010	0,0000
10	5340695	580477	4760218	3581818	-0,0429	0,0025
11	1709550	351809	1357741	3552652	-0,0324	-0,0136
12	2923416	131948	2791468	3523485	0,0006	-0,0003
13	3247150	-60978	3308128	3494318	0,0404	-0,0237
14	4750283	56260	4694023	3465152	0,0197	-0,0130
15	1838114	223327	1614787	3508333	-0,0164	0,0090
16	8742325	783340	7958985	3479167	-0,1553	0,1147
17	7783112	887750	6895362	3450000	-0,2038	0,1420
18	1748450	437723	1310727	3420833	-0,1285	0,1000
19	4445690	94670	4351020	3391667	0,0234	-0,0194

20	2935020	366858	2568162	3362500	-0,1771	0,1582
21	1865884	455873	1410011	3333333	0,3221	-0,3457
22	534629	-671575	1206204	3304167	-0,4863	0,5474
23	4858625	1121220	3737405	3275000	0,4300	-0,5057

Для того чтобы построить модель на имеющихся статистических данных, можно использовать значения табл. 5.13. Д.Духанина с помощью МНК оценила коэффициенты комплекснозначной логарифмической модели производственной функции. Эта модель имеет вид:

$$G_t + iC_t = (0,0909 - i0,1715) + (0,0436 - i0,0389)(K_t + iL_t)\,. \qquad (5.7.8)$$

Для того чтобы сделать вывод о пригодности рассматриваемой модели к моделированию производства, сравним свойства этой модели со свойствами других моделей действительных переменных. Д.Духанина нашла с помощью МНК на этих же данных коэффициенты производственной функции Кобба-Дугласа, которая имеет вид:

$$Q_t = 1,2603 K_t^{0,3326} L_t^{0,6674}\,. \qquad (5.7.9)$$

Теперь можно провести сравнительный анализ пригодности моделей для описания производственного процесса.

Логарифмическая производственная функция позволяет вычислить как валовую прибыль, так и издержки производства. Ошибка аппроксимации валовой прибыли составила G = 58,07%. Из табл. 5. 13 видно, что прибыль подвержена высокой дисперсии, поэтому такая ошибка аппроксимации не должная вводить в заблуждение. Значительно точнее модель описывает динамику издержек производства. Средняя ошибка аппроксимации этого показателя по исходному ряду составила C = 8,2%.

Поскольку сумма валовой прибыли и издержек производства даёт величину выпуска, то с помощью логарифмической производственной функции комплексных переменных можно аппроксимировать и этот показатель. Средняя ошибка аппроксимации выпуска составила Q – 33,14%.

Если использовать для целей моделирования функцию Кобба-Дугласа, то средняя ошибка аппроксимации по выпуску Q для функции Кобба-Дугласа равна 62,49%, что почти в два раза больше ошибки аппроксимации комплекснозначной модели.

Опять-таки, мы не будем здесь останавливаться на вопросе выбора лучшей модели для описания данного производственного процесса. Нам это не интересно. Важно, что из приведённого примера следует вывод о том, что для некоторых производственных процессов логарифмическая комплекснозначная функция может быть с успехом применена.

Мы не будем вычислять коэффициенты эластичности логарифмической комплекснозначной производственной функции, поскольку они не имеют такой простой вид и такую яркую экономическую интерпретацию, как в случае со степенной производственной функцией с действительными коэффициентами. А раз так, то коэффициент эластичности не даст ничего нового для понимания свойств этой модели.

5.8. Показательная производственная функция комплексных переменных

Завершая рассмотрение элементарных комплекснозначных функций, которые могут использоваться как модели производственных функций, обратим внимание на свойства и особенности применения показательной производственной функции. Эта функция может иметь самые различные основания, но свойства функции при этом не меняются. Меняется лишь степень сложности использования каждой модели. Очевидно, что меньше всего хлопот доставит показательная функция, основанием которой выступает число *e* – ведь практически всегда мы использовали экспоненциальную форму записи комплексных перемененных для того, чтобы понять свойства модели. Поэтому без особого ущерба для общности постановки задачи будем рассматривать как пример показательной функции модель экспоненциальной комплекснозначной функции. Эта модель в общем виде будет записана так:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(K_t+iL_t)}. \qquad (5.8.1)$$

Самый простой вариант этой модели – с действительными коэффициентами, представляет собой довольно простую функцию, не вызывающую особого интереса:

$$G_t + iC_t = a_0 e^{b_0(K_t+iL_t)}. \qquad (5.8.2)$$

Действительно, группируя переменные, составляющие модуль и полярный угол правой части равенства, получим:

$$G_t + iC_t = a_0 e^{b_0 K_t} e^{ib_0 L_t}. \qquad (5.8.3)$$

Обращаясь теперь к тригонометрической форме записи, получим для вещественной и мнимой частей равенства:

$$\begin{aligned} G_t &= a_0 e^{b_0 K_t} \cos(b_0 L_t) \\ C_t &= a_0 e^{b_0 K_t} \sin(b_0 L_t) \end{aligned}. \tag{5.8.4}$$

То есть, с ростом капитала растёт масштаб производства, а значит, будут расти и валовая прибыль, и издержки производства, причём этот рост будет сохранять пропорции между ними. Иначе говоря, рост объёмов производства сохраняет неизменной рентабельность производства. На реальном производстве это возможно в ситуации, когда фондовооружённость труда мала, и её рост существенно влияет на производительность труда. При этом существует некоторый контроль за ценообразованием.

С ростом трудового ресурса увеличивается полярный угол, а масштаб производства меняться не будет, что означает рост издержек производства и уменьшение валовой прибыли, но поскольку используются периодические функции, синус и косинус, то возможны и противоположные направления движения. Всё определяется величиной коэффициента b_0. Нельзя забывать и о том, что периодические функции могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это говорит о том, что для моделирования производственной ситуации необходимо либо центрировать исходные переменные, тогда они будут принимать и отрицательные, и положительные значения, либо налагать ограничения на коэффициент b_0, исходя из экономического смысла задачи.

Вот, пожалуй, и всё, что можно сказать об этой функции. Если теперь вместо действительных коэффициентов рассмотреть мнимые, то произойдут некоторые в определённой части «симметричные» изменения свойств функции. Так если показатель степени будет мнимым, то тригонометрическая форма записи этой модели будет такой:

$$\begin{aligned} G_t &= a_0 e^{-b_0 L_t} \cos(b_0 K_t) \\ C_t &= a_0 e^{-b_0 L_t} \sin(b_0 K_t) \end{aligned}. \tag{5.8.5}$$

Рост трудовых ресурсов неминуемо ведёт к уменьшению масштаба производства и уменьшению значений как валовой прибыли, так и издержек производства. Рост капитала приводит к снижению валовой прибыли и росту издержек производства при одном значении показателя b_0 и к обратным процессам – при другом. В целом такая модель – это модель кризисного состояния производства, когда для достижения производственного результата необходимо сокращать количество занятых на производстве, и отказываться от непрофильного производства, избавляясь от капиталов в этой части производства.

Понятно, что использование комплексных коэффициентов позволяет синтезировать эти разные свойства в единую сложную производственную зависимость. Для того чтобы понять влияние в модели с комплексными коэффициентами (5.8.1) производственных ресурсов на производственный результат, которые моделирует эта производственная функция, следует в правой части равенства выделить модуль и полярный угол. Для этого необходимо раскрыть скобки в показателе степени, а комплексный коэффициент пропорциональности привести к экспоненциальной форме.

Получим:

$$G_t + iC_t = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, e^{b_0 K_t - b_1 L_t} e^{i(b_0 L_t + b_1 K_t + arctg\frac{a_1}{a_0})}. \tag{5.8.6}$$

Теперь легко получить два равенства действительных переменных, которые моделируют вещественную и мнимую часть модели, то есть - описывают влияние производственных ресурсов на валовую прибыль и на издержки производства:

$$\begin{aligned} G_t &= \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, e^{b_0 K_t - b_1 L_t} \cos((b_0 L_t + b_1 K_t + arctg\frac{a_1}{a_0}) \\ C_t &= \sqrt{a_0^2 + a_1^2}\, e^{b_0 K_t - b_1 L_t} \sin(b_0 L_t + b_1 K_t + arctg\frac{a_1}{a_0}) \end{aligned}. \tag{5.8.7}$$

При положительности всех коэффициентов модели она обладает такими свойствами. С ростом капитала растут и валовая прибыль, и издержки производства. Но сам этот рост неодинаковый. Так для валовой прибыли её экспоненциальный рост, вызванный увеличением K_t в показателе степени, в определённой мере нивелируется тем, что косинус полярного угла с ростом капитала уменьшается, и их произведение даёт сложную нелинейную динамику.

Издержки с ростом капитала растут более интенсивно, поскольку экспоненциальному росту с ростом капитала соответствует и рост синуса. Их перемножение даёт соответствующий мультипликативный эффект.

Впрочем, эта общая характеристика корректируется аргументом коэффициента пропорциональности $arctg\frac{a_1}{a_0}$. Он характеризует сдвиг по фазе косинусоиды и синусоиды. Этот сдвиг может быть таким, что приведёт и к обратным зависимостям.

Точно такой же сложный характер в данной модели имеет зависимость производственных результатов от трудовых ресурсов. В первом приближении с ростом трудовых ресурсов моделируется снижение валовой прибыли, причём довольно активное – снижению экспоненты в первом равенстве (5.8.7) соответствует и уменьшение косинуса. Их перемножение усиливает тенденцию.

Поведение издержек не столь однозначно – с ростом трудового ресурса уменьшается экспоненциальная составляющая второго равенства (5.8.7), но растёт его гармоническая составляющая – синусоидальная.

И опять-таки, этот сложный характер зависимости в весьма существенной степени корректируется аргументом коэффициента пропорциональности

– его разные значения способствуют сдвигу по фазе гармонических сомножителей, и сами эти сомножители могут повести себя противоположно первоначальному представлению.

Поэтому показательная комплекснозначная модель с комплексными коэффициентами способна описать разнообразные производственные типы.

По данным промышленного производства России, которые уже неоднократно использовались в этой главе как основания для проверки свойств производственных функций комплексных переменных, А.М.Чуважов построил показательную модель производственной функции, коэффициенты которой были оценены с помощью МНК. Модель имеет вид:

$$G_t + iC_t = (1,656 + i0,534)e^{(0,265+i0,015)(K_t+iL_t)} \qquad (5.8.8)$$

Она описывает исходные данные довольно точно – ошибки аппроксимации прибыли равны 7,06%, а издержек производства – 2,64%. Следовательно, показательная комплекснозначная модель производственной функции имеет право на её включение в арсенал моделей производственных функций, поскольку наверняка встретятся случаи, когда эта модель окажется наилучшей из всех возможных.

5.9. Обобщение главы

Если сравнивать модели комплексного аргумента (четвёртая глава монографии) и модели комплексных переменных, то легко можно убедиться в том, что последние значительно интереснее для исследователя экономики и более универсальны. В этой главе функции комплексной переменной использовались как модели производственных функций и в ряде случаев они демонстрируют своё очевидное преимущество перед моделями действительных переменных. Каждая из функций комплексного переменного, обладая своими оригинальными свойствами, может использоваться как модель производственной функции для самых разных ситуаций. Выбор наилучшей модели из них – дело исследователя, который моделирует конкретный производственный процесс.

Принципиально важно то, что модели комплексных переменных, являясь компактными по форме, позволяют моделировать сразу несколько производственных показателей – объём производства, валовую прибыль и издержки производства. Это – очевидное преимущество предлагаемых моделей.

Наиболее интересными свойствами из рассмотренных в данной главе моделей производственных функций обладает степенная комплекснозначная производственная функция с действительными коэффициентами, которая отлично отражает реальные производственные процессы. К тому же, для этой функции легко вычисляются такие важные характеристики, как коэффициенты эластичности – валовой прибыли, издержек производства, объёмов производства по каждому из ресурсов, да и по комплексному ресурсу в том числе. То есть эта функция имеет значительный аналитический потенциал.

Завершая данную главу необходимо отметить ещё одно важное свойство производственных функций комплексной переменной. Модели комплексных переменных, используемые как модели производства, позволяют решать некоторые задачи, постановка которых в области моделей действительных переменных затруднительна. Стандартной является такая постановка задачи – определение объёма выпуска при разных сочетаниях ресурсов. Модели комплексного переменного расширяют эту задачу, поскольку появляется возможность не только вычислять величину выпуска, но и находить при разном сочетании ресурсов значения валовой прибыли и затрат на производство.

В исследовании производственных процессов и планировании производства также иногда стоят более сложные задачи: например, понять, насколько эффективно производство, выяснить каким образом можно получить тот или иной объём производства, как сократить затраты на производстве и каким образом можно получить наибольшую прибыль.

В моделях действительных переменных для решения этой задачи необходимо варьировать ресурсами и вычисляя результаты, находить наилучшее сочетание ресурсов по заданному критерию.

Производственные функции комплексных переменных позволяют решить эти задачи просто с помощью обратной функции. По определению, построение обратной функции – это выведение такой зависимости $x = F^{-1}(y)$, при которой выполняется: $y = F(x)$.

Построение обратной функции действительной переменной возможно в случае однофакторной зависимости. А все производственные функции, даже такая простая, как функция Кобба-Дугласа, являются многофакторными и обратную функцию вычислить не возможно.

Применительно к моделям комплексной переменной или комплексного аргумента это довольно простая и выполнимая задача, ведь рассматривается зависимость одной комплексной переменной от другой, то есть - однофакторная зависимость. А, значит, к таким зависимостям можно применить и обратную функцию.

Для производственной функции комплексной переменной

$$G + iC = F(K + iL), \tag{5.9.1}$$

надо вывести функцию

$$K + iL = F^{-1}(G + iC). \tag{5.9.2}$$

Подставляя в полученную обратную функцию требуемые значения валовой прибыли и издержек, легко определить – какие капитальные и трудовые ресурсы для этого необходимы.

Выведем виды обратных функция для рассмотренных выше моделей:

1) степенной,
2) логарифмической,
3) показательной.

Степенная комплекснозначная производственная функция (5.3.1) имеет вид:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_t + iL_t)^{b_0+ib_1}.$$

Обратная к ней функция находится так:

$$K + iL = \left(\frac{G + iC}{a_0 + ia_1}\right)^{\frac{1}{b_0+ib_1}}. \qquad (5.9.3)$$

Логарифмическая комплекснозначная производственная функция (5.7.1) имеет вид:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_t + iL_t).$$

Обратная функция (5.9.2) к этой будет иметь несколько более сложную форму. В логарифмах она будет записана так:

$$\ln(K_t + iL_t) = \frac{G_t + iC_t - (a_0 + ia_1)}{b_0 + ib}, \qquad (5.9.4)$$

хотя при необходимости может быть представлена и в таком виде:

$$K_t + iL_t = e^{\frac{G_t + iC_t - (a_0 + ia_1)}{b_0 + ib}}, \qquad (5.9.5)$$

Последняя форма записи позволяет сразу вычислять потребные значения капитала и труда.

Показательная комплекснозначная функция (5.8.1), рассмотренная в последнем параграфе главы, была представлена в такой форме:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)e^{(b_0+ib_1)(K_t+iL_t)}.$$

И с её помощью можно представить обратную функцию:

$$K_t + iL_t = \frac{\ln \dfrac{G_t + iC_t}{a_0 + ia_1}}{b_0 + ib_1}. \qquad (5.9.6)$$

Вычисление ни по одной из этих функций не представляет особых затруднений. Вначале с помощью любого метода эконометрии находятся коэффициенты исходной производственной функции комплексных переменных, после чего они подставляются в соответствующую обратную функцию (5.9.4), (5.9.5) или (5.9.6). Теперь, задавая желаемые величины прибыли, издержек или объёма производства, можно оценить требуемые для этого значения капитальных и трудовых ресурсов.

Можно решать и задачу поддержания одного и того же уровня рентабельности производства, а также другие задачи.

Следует указать и на одно предположение, которого мы априорно придерживались, не озвучивая его. Предложенные производственные функции моделировали издержки производства и прибыль – экономическая интерпретация получаемых результатов как раз и соответствует этим показателям. Но валовая прибыль предприятия или отрасли определяется в рыночной экономике не столько собственными усилиями предприятия и величиной привлекаемых ресурсов – капитала и труда, - сколько конъюнктурой рынка. А она в рассматриваемых моделях не учитывалась, как не учитывается и в моделях действительных переменных. При таком подходе предполагается, что всё, что будет произведено на предприятии, найдёт своего покупателя и будет продано с той рентабельностью, которая моделируется.

Для более тщательных научных исследований необходимо учитывать это обстоятельство.

Однако, не смотря на это, мы убедились на конкретных примерах реально хозяйствующих субъектов, что комплекснозначные производственный функции могут служить эффективным инструментом моделирования и анализа производственных процессов, а потому могут быть включены в арсенал теории производственных функций.

Глава шестая. Многофакторные комплекснозначные модели экономики

6.1. Общие положения классификационных комплекснозначных моделей

Рассмотренные в предыдущей главе модели производственных функций комплексных переменных, без всякого сомнения, существенно расширяют инструментальную базу теории производственных функций, а в ряде случаев дают более адекватные результаты моделирования, нежели существующие модели действительных переменных. Однако не следует абсолютизировать полученные результаты применения некоторых элементов теории функций комплексного переменного в экономике – комплекснозначная экономика не является альтернативой существующим моделям действительных переменных, она только расширяет арсенал экономико-математических методов и моделей, обогащая экономиста новым инструментом. Производственные функции комплексного аргумента и комплексных переменных обладают наряду с очевидными преимуществами и некоторыми недостатками, ограничивающими область их практического применения. Некоторые из них были показаны в соответствующих главах. Но есть ещё одно обстоятельство, которое можно рассматривать как недостаток тех комплекснозначных производственных функций, которые были рассмотрены выше.

Действительно, производственные функции комплексных переменных (а функции комплексного аргумента можно рассматривать как их упрощённый аналог) в общем виде могут быть записаны так:

$$G_t + iC_t = F(K_t + iL_t)\,. \qquad (6.1.1)$$

Важным преимуществом такой модели по сравнению с моделями действительных переменных является то, что моделируется зависимость сразу двух экономических переменных от двух других перемныых. Экономика как раз и отличается от предметов исследования естественных и точных наук тем, что здесь множество переменных определяется действием множества других переменных. В этом смысле модель (6.1.1) в экономике – шаг вперёд по сравнению с моделями действительных переменных. Но если мы попытаемся расширить, например, число производственных ресурсов в функции (6.1.1), то столкнёмся с очень непростой задачей – как это сделать? Ведь комплексная переменная по определению состоит из пары действительных переменных. А если нам необходимо учесть влияние на производство ещё одного ресурса, например, площади земли для сельскохозяйственного производства? Включить её как простую действительную переменную – значит не учесть её влияние на издержки производства, а если отнести её к мнимой части, то исключается тем самым влияние нового ресурса на валовую прибыль. Добавить дополнительную переменную в модель (6.1.1), не прибегая к специальным ухищрениям, довольно сложно. Это – первый существенный недостаток, ограничивающий сферу применения моделей типа (6.1.1).

Второй недостаток вызван необходимостью очень аккуратной работы с размерностью и масштабом каждой из переменной. И если относительно производственного результата можно быть более или менее спокойным, поскольку эти переменные измеряются в одних и тех же единицах и имеют одинаковый масштаб, то вот по отношению к производственным ресурсам оснований для беспокойства более чем достаточно – дело в неоднородности предлагаемых комплекснозначных функций.

Действительно, если взять степенную производственную функцию действительных переменных:

$$Q_t = aK_t^{\alpha} L_t^{\beta}, \tag{6.1.2}$$

и изменить, например, масштаб капитальных ресурсов с помощью умножения ресурса на множитель λ, то получим:

$$Q_t = a(\lambda K_t)^{\alpha} L_t^{\beta} = a\lambda^{\alpha} K_t^{\alpha} L_t^{\beta}. \tag{6.1.3}$$

То есть, в результате изменения масштаба переменной изменится только коэффициент пропорциональности – корректировать другие переменные и коэффициенты нет необходимости. Другое дело – комплекснозначные функции. Комплексная переменная ресурсов, представляемая как $(K_t + iL_t)$ при масштабировании какого-либо одного из двух ресурсов существенно меняет саму модель, на что обратил внимание проф. П.А.Ватник. Например, изменение масштаба переменной капитального ресурса на такой же множитель λ, приводит к существенному изменению самой комплексной переменной, в чём легко убедиться:

$$\lambda K_t + iL_t = \sqrt{(\lambda K_t)^2 + L_t^2}\, e^{i\,arctg \frac{L_t}{\lambda K_t}}.$$

Это значит, что комплексная переменная производственной функции не является однородной, а это значит, что любая комплекснозначная функция с изменением масштаба одной из переменных изменяет все свои коэффициенты и точность описания исходных переменных.

Рассмотрим для примера степенную производственную функцию с действительными коэффициентами:

$$G_t + iC_t = a(K_t + iL_t)^b. \tag{6.1.4}$$

Валовая прибыль в этой функции описывается так:

$$G_t = a(\sqrt{K_t^{\ 2} + L_t^2})^b \cos(b arctg \frac{L_t}{K_t}) . \qquad (6.1.5)$$

Если изменить масштаб капитального ресурса на λ, то для валовой прибыли получим:

$$G_t = a(\sqrt{\lambda^2 K_t^{\ 2} + L_t^2})^b \cos(b arctg \frac{L_t}{\lambda K_t}) . \qquad (6.1.6)$$

Это значит, что корректировка переменной K_t вызывает неминуемое изменение и коэффициента пропорциональности a, и показателя степени b и точность описания валовой прибыли, значения которой в практических случаях «загрязнено» случайными ошибками. А поскольку в предыдущей главе указывалось на аналитические свойства именно этой модели и на интерпретацию показателя степени b, то становится понятным выдвигавшиеся в той главе требования очень бережного и тщательного отношения к размерности и масштабу переменных производственных функций комплексных переменных.

Итак, две важные проблемы (помимо множества прочих, менее значительных), требуют развития комплекснозначных производственных функций:

1) необходимость включения новых экономических переменных, что невозможно в модели типа (6.1.1),
2) влияние изменения масштаба исходных переменных на результаты моделирования.

Прежде, чем показать, как сформировать экономические модели комплексных переменных, свободных от вышеуказанных недостатков, следует обратить внимание на саму суть экономических показателей, которая как нельзя лучше демонстрируется на примере производства.

Все показатели, используемые для моделирования любых экономических процессов, представляют собой результат некоторого агрегирования (и абстрагирования, что само собой разумеется!).

Действительно, валовая прибыль G_t фактически складывается из многих составляющих, совокупность которых можно разделить на две группы – часть прибыли уходит в государственный бюджет в виде налога на прибыль, а другая часть остаётся в распоряжении предприятия.

Издержки производства C_t также складываются из множества слагаемых, но и они могут быть представимы в виде двух составляющих - постоянные затраты (амортизация, оплата труда ИТР и служащих и т.п.) и переменные затраты (на сырьё и материалы, полуфабрикаты и энергию на производственные нужды и т.п.).

Капитал K_t в любой его форме также представим в виде двух слагаемых – основного и не основного (например, основные и неосновные фонды).

Точно также и трудовые ресурсы L_t складываются из двух больших групп – промышленно-производственный персонал и прочий персонал.

Конечно, и эти классификации можно продолжить, но не в этом дело, а в том, что практически каждый экономический показатель, и не только производственный, может быть представлен как сумма двух слагаемых, которые выступают как результат некоторой классификации. И опять-таки, чаще всего по тем или иным основаниям эти два класса представляют собой активную и пассивную части, каждая из которых по-разному влияет на производство или отражает его.

Действительно, трудовые ресурсы в целом, которые используются в теории производственных функций, и были использованы в предыдущих главах, очень грубо отражают влияние этого ресурса на производственный результат. Ведь увеличение промышленно-производственного персонала влияет на производственный результат совсем иначе, чем увеличение прочего персонала. Их сумма нивелирует это влияние и неминуемо ведёт к ухудшению свойств модели – аналитических и прогнозных.

Точно также и величина активной части основных производственных фондов (станки, механизмы, технологические линии и т.п.) иначе влияет на производственный вариант, чем их пассивная часть (здания, сооружения, подъездные пути…).

Поскольку классификация практически каждой экономической переменной предусматривает разделение на активную и пассивную группы, то напрашивается сам собой вывод – представить их в виде комплексной переменной, к действительной части которой следует отнести активную часть, а к мнимой – пассивную. Этого правила и будем придерживаться в дальнейшем.

Тогда капитальный ресурс можно записать так:

$$K_0 + iK_1 \,, \tag{6.1.7}$$

где K_0 – основные производственные фонды, K_1 – основные непроизводственные фонды.

Трудовой ресурс будем представлять так:

$$L_0 + iL_1 . \tag{6.1.8}$$

Здесь L_0 – промышленный производственный персонал, а L_1 - непроизводственный персонал.

Выпуск можно представлять как и ранее в виде комплексной переменной, включающей в себя валовую прибыль и издержки производства, а можно представлять и как некоторую классифицированную переменную, например, валовой выпуск (реализованная и нереализованная продукция):

$$Q_0 + iQ_1 . \tag{6.1.9}$$

При такой постановке моделирования производства легко решается первая проблема – проблема добавления новой переменной. Если возникает необходимость добавить в модель очередной производственный ресурс *S*, то его можно представить в таком же виде как комплексную переменную, состоящую из активной и пассивной частей:

$$S_0 + iS_1. \tag{6.1.10}$$

Например, для моделирования сельскохозяйственного производства земельная площадь может быть представлена как площадь для растениеводства и животноводства и п.т.

С учётом всего этого, общая производственная модель будет иметь такой вид:

$$Q_0 + iQ_1 = F\left[(K_0 + iK_1), (L_0 + iL_1), (S_0 + iS_1)\right]. \tag{6.1.11}$$

Развивая этот подход на любые экономические модели, не обязательно производственные, в общем виде модели такого типа представим так:

$$y_0 + iy_1 = F(x_{0j} + ix_{1j}). \tag{6.1.12}$$

Здесь *j* – номер экономической переменной, включённой в модель.

Модель (6.1.12) является многофакторной. Следует отметить, что в математике рассматривается *теория функций комплексной переменной* – одной комплексной переменной, а не многих! Для более адекватного описания социально-экономических процессов мы вынуждены вводить в научный оборот функции нескольких комплексных переменных, а поскольку в общедоступных работах в этом направлении работ по функциям комплексных переменных не встречается, ссылаться на постулаты математики не придётся - необходимо в определённой части развивать математическое представление задачи. Нельзя сказать, что вопросы многофакторных комплекснозначных моделей математиками не рассматривались. Насколько известно подобные работы велись математиками, занимающимися космическими проблемами, но этот опыт для поставленной задачи, увы, не может быть применён.

Поскольку модель (6.1.12) открывает новый класс комплекснозначных моделей, и логика их формирования вытекает из классификации экономических переменных, будем называть модели этого типа – *классификационные модели*.

Классификационные модели свободны и от недостатка неоднородности модели (6.1.1) о котором говорилось ранее. Классификационные переменные по определению имеют одну и ту же размерность, поскольку представляют собой две части одного целого. Поэтому при необходимости масштабирования какой-либо комплексной переменной на коэффициент масштабирования λ умножается и действительная, и мнимая составляющая этой переменной, что означает следующее:

$$\lambda K_{0t} + i\lambda K_{1t} = \lambda\sqrt{K_{ot}{}^2 + K_{1t}^2}e^{iarctg\frac{K_{1t}}{K_{0t}}} = \lambda(K_{0t} + iK_{1t}).$$

Откуда видно, что эта переменная является однородной первой степени. Однородность или неоднородность модели в таком случае определяется не особенностями комплексных переменных, а особенностями используемых моделей.

В этой главе будут рассматриваться классификационные модели экономики применительно к задачам моделирования производственных процессов.

6.2. Линейная классификационная производственная функция

Вновь рассмотрим производственную функцию, которая описывает поведение комплексного производственного результата, включающего в себя валовую прибыль G_t и издержки производства C_t в зависимости от затрат ресурса капитала и труда. Но в данном случае и капитал, и труд будем представлять как комплексные классификационные переменные (6.1.7) и (6.1.8): $K_0 + iK_1$, $L_0 + iL_1$. Самым простым случаем производственной классификационной функции будет являться линейная функция:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(K_{0t} + iK_{1t}) + (c_0 + ic_1)(L_{0t} + iL_{1t}). \tag{6.2.1}$$

Здесь K_0 – основные производственные фонды, K_1 – основные непроизводственные фонды, L_0 – промышленно производственный персонал, а L_1 - непроизводственный персонал.

Если в этой функции мнимые части комплексных коэффициентов пропорциональности будут равны нулю, то эта функция превращается в систему элементарных многофакторных (двухфакторных) уравнений:

$$\begin{cases} G_t = a_0 + b_0 K_{0t} + c_0 L_{0t,} \\ C_t = a_1 + b_0 K_{1t} + c_0 L_{1t}. \end{cases}. \tag{6.2.2}$$

Не особенно усложнится модель, если нулю будут равны действительные части комплексных коэффициентов пропорциональности:

$$\begin{cases} G_t = a_0 - b_1 K_{1t} - c_1 L_{1t} \\ C_t = a_1 + b_1 K_{0t} + c_1 L_{0t} \end{cases}. \tag{6.2.3}$$

Поэтому смысл использовать в экономико-математическом моделировании имеет только модель (6.2.1), которая, после выделения действительной и мнимой частей, представляет собой такую систему двух действительных равенств:

$$\begin{cases} G_t = a_0 + b_0 K_{0t} - b_1 K_{1t} + c_0 L_{0t} - c_1 L_{1t}, \\ C_t = a_1 + b_0 K_{1t} + b_1 K_{0t} + c_0 L_{1t} + c_1 L_{0t}. \end{cases}. \tag{6.2.4}$$

Теперь можно дать интерпретацию тем процессам, которые могут быть описаны с помощью комплекснозначной модели типа (6.2.1). Из первого равенства системы (6.2.4) следует, что увеличение основных непроизводственных фондов K_1 и количества непроизводственного персонала L_1 ведёт к уменьшению валовой прибыли, а из второго равенства следует, что рост этих ресурсов ведёт к росту издержек производства. В подавляющем большинстве случаев реальных производств так и происходит – рост непрофильных активов ухудшает производственные показатели, так же как и рост административного аппарата.

Рост основных производственных фондов K_0 и промышленно производственного персонала L_0 ведёт к линейному росту валовой прибыли и издержек производства. Характер этого роста определяется коэффициентами пропорциональности при переменных.

Поскольку модель (6.2.1) может быть представлена в форме действительных переменных (6.2.4), то возникает вопрос: а имеет ли смысл использовать комплекснозначную функцию? Не легче ли использовать две действительные функции (6.2.4)? Ответ на этот вопрос возникает из элементарного сравнения (6.2.1) и (6.2.4). Модель (6.2.1) компактнее в записи и коэффициенты модели (6.2.1) легко найти с помощью МНК. Для этого придётся решить систему шести уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_t G_t = na_0 + b_0 \sum_t K_{0t} - b_1 \sum_t K_{1t} + c_0 \sum_t L_{0t} - c_1 \sum_t L_{1t}, \\ \sum_t C_t = na_1 + b_1 \sum_t K_{0t} + b_0 \sum_t K_{1t} + c_0 \sum_t L_{1t} + c_1 \sum_t L_{0t}, \\ \sum_t K_{0t} G_t - \sum_t K_{1t} C_t = a_0 \sum_t K_{0t} - a_1 \sum_t K_{1t} + b_0 \sum_t (K_{0t}^2 - K_{1t}^2) - 2b_1 \sum_t K_{0t} K_{1t} + c_0 (\sum_t K_{0t} L_{0t} - \sum_t K_{1t} L_{1t}) - c_1 (\sum_t K_{0t} L_{1t} + \sum_t L_{0t} K_{1t}), \\ \sum_t K_{0t} C_t + \sum_t K_{1t} G_t = a_0 \sum_t K_{1t} + a_1 \sum_t K_{0t} + b_1 \sum_t (K_{0t}^2 - K_{1t}^2) + 2b_0 \sum_t K_{0t} K_{1t} + c_0 (\sum_t K_{0t} L_{1t} - \sum_t K_{1t} L_{0t}) + c_1 (\sum_t K_{0t} L_{0t} + \sum_t L_{1t} K_{1t}), \\ \sum_t L_{0t} G_t - \sum_t L_{1t} C_t = a_0 \sum_t L_{0t} - a_1 \sum_t L_{1t} + b_0 (\sum_t K_{0t} L_{0t} - \sum_t K_{1t} L_{1t}) - b_1 (\sum_t K_{1t} L_{0t} + \sum_t K_{0t} L_{1t}) + c_0 (\sum_t L_{0t}^2 - \sum_t L_{1t}^2) - 2c_1 \sum_t L_{0t} L_{1t}, \\ \sum_t L_{0t} C_t + \sum_t L_{1t} G_t = a_1 \sum_t L_{0t} + a_0 \sum_t L_{1t} + b_0 (\sum_t K_{1t} L_{0t} - \sum_t K_{0t} L_{1t}) + b_1 (\sum_t K_{0t} L_{0t} + \sum_t K_{1t} L_{1t}) + c_1 (\sum_t L_{0t}^2 + \sum_t L_{1t}^2) + 2c_0 \sum_t L_{0t} L_{1t}. \end{cases}$$

Где T – количество наблюдений, $t=1,2,3,\dots,T$.

В случае модели (6.2.4) ситуация значительно сложнее. МНК применительно к первому равенству приводит к необходимости решения системы таких пяти уравнений:

$$\begin{cases} \sum_t G_t = a_0 T + b_0 \sum_t K_{0t} - b_1 \sum_t K_{1t} + c_0 \sum_t L_{0t} - c_1 \sum_t L_{1t}, \\ \sum_t G_t K_{0t} = a_0 \sum_t K_{0t} + b_0 \sum_t K_{0t}^2 - b_1 \sum_t K_{0t} K_{1t} + c_0 \sum_t K_{0t} L_{0t} - c_1 \sum_t K_{0t} L_{1t}, \\ \sum_t G_t K_{1t} = a_0 \sum_t K_{1t} + b_0 \sum_t K_{0t} K_{1t} - b_1 \sum_t K_{1t}^2 + c_0 \sum_t K_{1t} L_{0t} - c_1 \sum_t K_{1t} L_{1t}, \\ \sum_t G_t L_{0t} = a_0 \sum_t L_{0t} + b_0 \sum_t K_{0t} L_{0t} - b_1 \sum_t K_{1t} L_{0t} + c_0 \sum_t L_{0t}^2 - c_1 \sum_t L_{1t} L_{0t}, \\ \sum_t G_t L_{1t} = a_0 \sum_t L_{1t} + b_0 \sum_t K_{0t} L_{1t} - b_1 \sum_t K_{1t} L_{1t} + c_0 \sum_t L_{0t} L_{1t} - c_1 \sum_t L_{1t}^2. \end{cases} \tag{6.2.5}$$

При этом надо быть уверенным в том, что полученные в результате вычислений коэффициенты будут соответствовать тем, которые будут получены при решении другой системы из пяти уравнений МНК, определяемых вторым равенством системы (6.2.4):

$$\begin{cases} \sum_t C_t = a_1 T + b_0 \sum_t K_{1t} + b_1 \sum_t K_{0t} + c_0 \sum_t L_{1t} + c_1 \sum_t L_{0t}, \\ \sum_t C_t K_{1t} = a_1 \sum_t K_{1t} + b_0 \sum_t K_{1t}^2 + b_1 \sum_t K_{0t} K_{1t} + c_0 \sum_t K_{1t} L_{1t} + c_1 \sum_t K_{1t} L_{0t}, \\ \sum_t C_t K_{0t} = a_1 \sum_t K_{0t} + b_0 \sum_t K_{0t} K_{1t} + b_1 \sum_t K_{0t}^2 + c_0 \sum_t K_{0t} L_{1t} + c_1 \sum_t K_{0t} L_{0t}, \\ \sum_t C_t L_{1t} = a_1 \sum_t L_{1t} + b_0 \sum_t K_{1t} L_{1t} + b_1 \sum_t K_{0t} L_{1t} + c_0 \sum_t L_{1t}^2 + c_1 \sum_t L_{1t} L_{0t}, \\ \sum_t C_t L_{0t} = a_1 \sum_t L_{0t} + b_0 \sum_t K_{1t} L_{0t} + b_1 \sum_t K_{0t} L_{0t} + c_0 \sum_t L_{0t} L_{1t} + c_1 \sum_t L_{0t}^2. \end{cases} \tag{6.2.6}$$

А такой уверенности быть не может, и более того, коэффициенты, найденные решением системы (6.2.5) будут отличаться от коэффициентов, найденных решением системы уравнений (6.2.6) хотя бы только потому, что все исходные данные представляют собой результат реализации случайного (в лучшем случае) процесса, а значит, они содержат в себе случайные ошибки, которые и приведут к различным значениям коэффициентов.

К тому же из системы (6.2.5) видно, что её решение никак не зависит от изменений издержек производства, а из системы (6.2.6) видно, что её решение никак не зависит от характера изменения валовой прибыли. Иначе говоря - вероятность того, что, решая систему (6.2.5) и систему (6.2.6) будут получены значения коэффициентов, равные друг другу, практически равна нулю. Это значит, что таким образом получить систему (6.2.4) невозможно!

Даже если решить вначале систему (6.2.5) и найти коэффициенты a_0, b_0, b_1, c_0 и c_1, то, подставляя в систему (6.2.6) найденные значения коэффициентов b_0, b_1, c_0 и c_1, получим, что каждое равенство этой системы, от первого до пятого будет давать различные значения коэффициента a_1. Для того чтобы найти баланс, необходимы особые процедуры согласования решений.

Решая систему (6.2.5) получим значения коэффициентов модели:

$$G_t = a_0 + b_0 K_{0t} + b_1 K_{1t} + c_0 L_{0t} + c_1 L_{1t}. \qquad (6.2.7)$$

Решая систему (6.2.6) будут найдены коэффициенты другой модели:

$$C_t = a_1 + d_0 K_{1t} + d_1 K_{0t} + f_0 L_{1t} + f_1 L_{0t}. \qquad (6.2.8)$$

Конечно, их можно синтезировать в модель типа (6.2.1):

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1) + [b_0 K_{0t} + b_1 K_{1t} + i(d_0 K_{1t} + d_1 K_{0t})] + [c_0 L_{0t} + c_1 L_{1t} + i(f_0 L_{1t} + f_1 L_{0t})], \qquad (6.2.9)$$

но это, как легко заметить, будет совсем другая модель! Можно, конечно, свести активные части ресурсов к действительной части, а пассивные – к мнимой, но и при этом коэффициенты синтезированной модели будут отличаться от коэффициентов модели комплекснозначной. К тому же, громоздкость этой процедуры делает её совершенно бессмысленной!

Поскольку и применительно к этой модели можно прибегнуть к процедуре предварительного центрирования исходных переменных относительно их средних арифметических, то расчёт коэффициентов комплекснозначной модели существенно облегчается. Сама модель примет вид:

$$G_t + iC_t = (b_0 + ib_1)(K_{0t} + iK_{1t}) + (c_0 + ic_1)(L_{0t} + iL_{1t}). \qquad (6.2.10)$$

А система нормальных уравнений МНК для центрированных переменных будет содержать четыре уравнения:

$$\begin{cases} \sum_t K_{0t}G_t - \sum_t K_{1t}C_t = b_0\sum_t (K_{0t}^2 - K_{1t}^2) - 2b_1\sum_t K_{0t}K_{1t} + c_0(\sum_t K_{0t}L_{0t} - \sum_t K_{1t}L_{1t}) - c_1(\sum_t K_{0t}L_{1t} + \sum_t L_{0t}K_{1t}), \\ \sum_t K_{0t}C_t + \sum_t K_{1t}G_t = b_1\sum_t (K_{0t}^2 - K_{1t}^2) + 2b_0\sum_t K_{0t}K_{1t} + c_0(\sum_t K_{0t}L_{1t} - \sum_t K_{1t}L_{0t}) + c_1(\sum_t K_{0t}L_{0t} + \sum_t L_{1t}K_{1t}), \\ \sum_t L_{0t}G_t - \sum_t L_{1t}C_t = b_0(\sum_t K_{0t}L_{0t} - \sum_t K_{1t}L_{1t}) - b_1(\sum_t K_{1t}L_{0t} + \sum_t K_{0t}L_{1t}) + c_0(\sum_t L_{0t}^2 - \sum_t L_{1t}^2) - 2c_1\sum_t L_{0t}L_{1t}, \\ \sum_t L_{0t}C_t + \sum_t L_{1t}G_t = b_0(\sum_t K_{1t}L_{0t} - \sum_t K_{0t}L_{1t}) + b_1(\sum_t K_{0t}L_{0t} + \sum_t K_{1t}L_{1t}) + c_1(\sum_t L_{0t}^2 + \sum_t L_{1t}^2) + 2c_0\sum_t L_{0t}L_{1t}. \end{cases} \qquad (6.2.11)$$

Если экономист работает с программным продуктом, предусматривающим математические действия с комплексными переменными, то задача ещё больше облегчается.

Записав для компактности модель (6.2.10) через комплексные переменные:

$$\dot{z}_t = \dot{b}\dot{K}_t + \dot{c}\dot{L}_t\,, \qquad (6.2.12)$$

легко получить систему оценок МНК коэффициентов этой модели:

$$\begin{cases} \sum \dot{z}_t\dot{K}_t = \dot{b}\sum \dot{K}_t^2 + \dot{c}\sum \dot{L}_t\dot{K}_t, \\ \sum \dot{z}_t\dot{L}_t = \dot{b}\sum \dot{L}_t\dot{K}_t + \dot{c}\sum \dot{L}_t^2 \end{cases}, \qquad (6.2.13)$$

решение которой позволяет получить искомые комплексные коэффициенты многофакторной модели.

Вывод, который из этого следует, однозначен – модель (6.2.1) расширяет инструментальную базу экономико-математического моделирования, поскольку построить её аналог в области действительных чисел требует привлечения сложных вычислительных процедур, не гарантирующих при этом адекватное моделирование.

Линейная комплекснозначная многофакторная модель обладает всеми теми же недостатками, которыми обладает и модель линейной производственной функции действительных переменных, а потому, понимая, что модель (6.2.1) имеет право на существование и практическое использование, оставим её для использования в моделировании простых производственных ситуаций.

6.3. Классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа

Линейная производственная классификационная функция отличается от аналогичных функций действительных переменных по своему смыслу и удобнее в использовании. Но наиболее ярко свойства комплекснозначных функций проявляется для нелинейных функций. Их аналоги в области действительных переменных необычайно сложны, на что неоднократно указывалось в предыдущих главах. Именно поэтому логично рассмотреть нелинейные комплекснозначные классификационные функции. Сам собой напрашивается в качестве наиболее простого варианта тип такой функции, который построен на подобие производственной функции Кобба-Дугласа.

Классификационной производственной функцией типа Кобба-Дугласа будем называть модель такого вида:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{\alpha}(L_0 + iL_1)^{1-\alpha}\,. \qquad (6.3.1)$$

Здесь, как и в функции Кобба-Дугласа показатель степени лежит в пределах:

$$0 \le \alpha \le 1. \qquad (6.3.2)$$

Как известно, функция является линейно однородной, если выполняется условие:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_i) = \lambda f(x_1, x_2, \ldots x_i). \qquad (6.3.3)$$

Проверим выполнение этого условия для модели (6.3.1):

$$\begin{gathered}\left(a_0 + ia_1\right)(\lambda K_0 + i\lambda K_v)^{\alpha}(\lambda L_0 + i\lambda L_v)^{1-\alpha} = \lambda^{\alpha}\lambda^{1-\alpha}\left(a_0 + ia_1\right)\times(K_0 + iK_v)^{\alpha}(L_0 + iL_v)^{1-\alpha} = \\ \lambda\left(a_0 + ia_1\right)(K_0 + iK_v)^{\alpha}(L_0 + iL_v)^{1-\alpha}\end{gathered}, \qquad (6.3.4)$$

То есть эта функция линейно однородна.

Представим правую часть модели (6.3.1) в экспоненциальной форме. Получим:

$$(a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{\alpha}(L_0 + iL_1)^{1-\alpha} = R_a e^{i\theta_a} R_K^{\alpha} e^{i\alpha\theta_K} R_L^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta_L}. \qquad (6.3.5)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$R_a = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}, \;\; \theta_a = arctg\frac{a_1}{a_0}, \qquad (6.3.6)$$

$$R_K = \sqrt{K_0^2 + K_1^2}, \;\; \theta_K = arctg\frac{K_1}{K_0}, \qquad (6.3.7)$$

$$R_L = \sqrt{L_0^2 + L_1^2}, \;\; \theta_L = arctg\frac{L_1}{L_0}, \qquad (6.3.8)$$

Тогда модель (6.3.1) представима как система двух действительных равенств - для валовой прибыли:

$$G_t = R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha}\cos(\theta_a + \alpha\theta_K + (1-\alpha)\theta_L), \qquad (6.3.9)$$

для издержек производства:

$$C_t = R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha}\sin(\theta_a + \alpha\theta_K + (1-\alpha)\theta_L), \qquad (6.3.10)$$

Теперь ясны общие характеристики модели. Если прочие ресурсы остаются неизменными, то:

1) если растут инвестиции в основной капитал K_0, это приводит к росту модуля капитальных ресурсов (6.3.7) и уменьшению полярного угла этих ре-

сурсов. Косинус уменьшающегося угла возрастает, и при росте модуля капитального ресурса это означает рост валовой прибыли (6.3.9). Для издержек производства в это ситуации противодействуют две тенденции - сомножитель - модуль капитальных ресурсов (6.3.10), - растёт, но синус уменьшающегося угла уменьшается. Поэтому, из (6.3.10) следует, что в зависимости от значений показателя степени α и комплексного коэффициента пропорциональности возможен как рост издержек производства (если α близок к нулю), так и уменьшение издержек (если α близок к единице). Возможны участки, когда издержки остаются постоянными.

2) если растут инвестиции не в основной капитал, то модуль капитальных ресурсов возрастает, также как растёт и полярный угол. Это означает, что валовая прибыль рассчитывается как произведение двух противоположных тенденций – возрастающего модуля капитальных ресурсов и уменьшающегося косинуса суммы углов. Опять-таки, в зависимости от исходных данных и от значений показателя степени это может в одних случаях вести к росту результирующего показателя, а в других случаях – к уменьшению его значений, а в третьих – к неизменности этого показателя. Динамика издержек производства в этой ситуации определяется умножением возрастающего значения модуля и возрастающего значения синуса суммы полярных углов. То есть, издержки производства однозначно возрастают.

Аналогичные выводы следуют и относительно поведения другой комплексной переменной – трудовых ресурсов. С увеличением числа промышленно-производственного персонала растёт валовая прибыль, а издержки могут увеличиваться, оставаться постоянными или уменьшаться. А с увеличением же непроизводственного персонала издержки однозначно растут, а динамика прибыли определяется коэффициентами модели – может расти, оставаться неизменной или уменьшаться.

Таким образом, видно, что модель (6.3.1) охватывает практически все возможные варианты производственных зависимостей за исключением разве что ситуации стагнации производства.

Тщательное изучение свойств функции (6.3.1) провела Е.В.Сиротина. Приведём здесь некоторые результаты этого исследования.

Для нахождения неизвестных параметров a_0, a_1 и α модели (6.3.1) воспользуемся подходом по оценке с помощью МНК параметров нелинейных моделей комплексных переменных с комплексными коэффициентами, которая была изложена в третьей главе монографии.

Для модели типа Кобба-Дугласа, как и для производственной функции Кобба-Дугласа, удаётся сделать это несколько проще, чем для степенных функций с неограниченным значением показателей степени. Для этого уравнение (6.3.1) необходимо привести к линейному виду путём логарифмирования левой и правой частей по натуральному основанию:

$$\ln(G_t + iC_t) = \ln(a_0 + ia_1) + \alpha \ln(K_0 + iK_1) + (1-\alpha)\ln(L_0 + iL_1)\,. \tag{6.3.11}$$

Это выражение можно в результате нехитрых преобразований привести к виду:

$$\ln\frac{G_t+iC_t}{L_0+iL_1}=\ln(a_0+ia_1)+\alpha\ln\frac{K_{0t}+iK_{1t}}{L_{0t}+iL_{1t}}. \qquad (6.3.12)$$

Как видно, модель свелась к заурядному логарифмическому уравнению двух комплексных переменных. Для упрощения дальнейших выводов введём следующие обозначения этих переменных. Результирующая переменная под логарифмом, которую Е.В.Сиротина предложила называть «комплексная производительность труда», может быть преобразована к такому удобному для исследований виду:

$$g_t=\frac{G_t+iC_t}{L_0+iL_1}=\frac{G_tL_{0t}+C_tL_{1t}}{L_0^2+L_1^2}+i\frac{C_tL_{0t}-G_tL_{1t}}{L_0^2+L_1^2}. \qquad (6.3.13)$$

Комплексная переменная ресурсов, находящаяся под логарифмом, будет обозначена так:

$$k_t=\frac{K_{0t}+iK_{1t}}{L_{0t}+iL_{1t}}=\frac{K_{0t}L_{0t}+K_{1t}L_{1t}}{L_{0t}^2+L_{1t}^2}+i\frac{K_{1t}L_{0t}-K_{0t}L_{1t}}{L_{0t}^2+L_{1t}^2}. \qquad (6.3.14)$$

Поскольку она представляет собой отношение капитальных ресурсов к трудовым, то эту переменную можно назвать «комплексная фондовооружённость труда».

Эти два новых экономических показателя могут дать экономисту дополнительную характеристику протекающих производственных процессов, но останавливаться на этом не будем.

В исследовании, как это было заявлено в первой главе, используются главные значения логарифмов, поэтому равенство (6.3.12) может быть представлено следующим образом:

$$\ln R_g+i\theta_g=A_0+iA_1+\alpha(\ln R_k+i\theta_k). \qquad (6.3.14)$$

Здесь:

$$R_g=\sqrt{\left(\frac{G_tL_{0t}+C_tL_{1t}}{L_0^2+L_1^2}\right)^2+\left(\frac{C_tL_{0t}-G_tL_{1t}}{L_0^2+L_1^2}\right)^2},\ \theta_g=iarctg\frac{C_tL_{0t}-G_tL_{1t}}{G_tL_{0t}+C_tL_{1t}}, \qquad (6.3.15)$$

$$R_k=\sqrt{\left(\frac{K_{0t}L_{0t}+K_{1t}L_{1t}}{L_{0t}^2+L_{1t}^2}\right)^2+\left(\frac{K_{1t}L_{0t}-K_{0t}L_{1t}}{L_{0t}^2+L_{1t}^2}\right)^2},\ \theta_k=iarctg\frac{K_{1t}L_{0t}-K_{0t}L_{1t}}{K_{0t}L_{0t}+K_{1t}L_{1t}}, \qquad (6.3.16)$$

$$A_0 = \ln\sqrt{a_0^2 + a_1^2}, A_1 = arctg\frac{a_1}{a_2}. \qquad (6.3.17)$$

Теперь коэффициенты этой модели можно найти с помощью МНК. Применительно к данной модели задача становится тривиальной, поскольку решить необходимо систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_t \ln R_g = TA_0 + \alpha\sum_t \ln R_k, \\ \sum_t \theta_g = TA_1 + \alpha\sum_t \theta_k, \\ \sum_t \ln R_g \ln R_k + \sum_t \theta_g\theta_k = A_0\sum_t \ln R_k + A_1\sum_t \theta_k + \alpha(\sum_t \ln^2 R_k + \sum_t \theta_k^2). \end{cases} \qquad (6.3.18)$$

Е.В.Сиротина построила производственную классифицирующую функцию типа Кобба-Дугласа для статистических данных за временной период с 1999 по 2006 год по организации ОАО «Леноблгаз». Поскольку эти данные представляют коммерческую тайну организации, мы не можем привести их здесь. Но по статистическим данным после приведения переменных к одинаковому масштабу и вычисления всех промежуточных переменных, была получена система уравнений МНК (6.3.18), которая применительно к этому предприятию имеет вид:

$$\begin{cases} 14,21 = 8A_0 + 19,07\alpha \\ 7,37 = 8A_1 + 1,59\alpha \\ 32,65 = 14,21A_0 - 1,59A_1 + 46,68\alpha \end{cases}.$$

Откуда легко найти искомые значения коэффициентов модели: $A_0=0,084$, $A_1=1,062$, $\alpha=0,71$, С помощью известных значений коэффициентов A_0 и A_1 можно найти исходные значения коэффициентов a_0 и a_1:

$$a_0 + ia_1 = e^{0,084+i1,062} = 0,53 + i0,95.$$

Тогда модель классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа для ОАО «Леноблгаз» за рассматриваемый период имеет вид:

$$G_t + iC_t = (0,53 + i0,95)(K_0 + iK_1)^{0,71}(L_0 + iL_1)^{0,29}. \qquad (6.3.19)$$

Как видно, никаких затруднений при построении такой функции двух комплексных переменных не возникло. Более того, классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа оказалась простой в практическом применении.

6.4. Эластичность и другие характеристики классификационной производственной комплекснозначной функции

Классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа является по своим свойствам в существенной степени адекватной экономической реальности, поскольку она описывает большую часть реально существующих производственных взаимосвязей между ресурсами и производственным результатом. Очевидно, что она описывает и такие взаимосвязи, которые в области моделей действительных переменных являются недостижимыми.

Но для того чтобы осознанно использовать этот новый математический инструмент для моделирования экономики, необходимо более тщательно изучить его свойства. Сделаем это, воспользовавшись тем стандартным набором инструментов, который используют специалисты для изучения свойств «неоклассических» производственных функций и функции Кобба-Дугласа как одной из разновидности «неоклассической» производственной функции. Если использовать степенную модель производственной функции действительных переменных с показателями степени, лежащими в пределах от нуля до единицы, то для такой модели будут выполняться следующие условия:

1) при отсутствии одного из ресурсов производство в целом невозможно, что математически записывается так:

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0, \tag{6.4.1}$$

2) при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет, то есть:

$$F(K,\infty) = F(\infty, L) = \infty\,. \tag{6.4.2}$$

3) с ростом ресурсов выпуск растет, что означает положительность первых производных:

$$\frac{dQ}{dK} > 0,\ \ \frac{dQ}{dL} > 0\,, \tag{6.4.3}$$

4) с увеличением ресурсов скорость роста выпуска замедляется, что означает отрицательность второй производной:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0,\ \ \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0\,. \tag{6.4.4}$$

Эти свойства вытекают из математической формы степенной «неоклассической» производственной функции, что рассматривается экономистами как важные аргументы в пользу практической адекватности модели.

Поскольку в данном параграфе изучаются свойства одной из самых простых классификационных производственных функций - функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа (6.3.1), то следует посмотреть именно на наличие аналогичных свойств у этой функции. Сделаем это.

Классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа имеет вид:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{\alpha}(L_0 + iL_1)^{1-\alpha}.$$

Здесь показатель степени лежит в пределах $0 \le \alpha \le 1$, что и позволяет рассматривать функцию как некий аналог известной функции Кобба-Дугласа.

Очевидно, что в случае, когда хотя бы один из комплексных ресурсов будет равен нулю, то и выпуск, моделируемый этой функцией, также равен нулю. То есть условие (6.4.1) выполняется.

Теоретически возможен случай, когда одна составляющая комплексного ресурса равна нулю, а другая составляющая нулю не равна. В таком случае условие (6.4.1) не выполняется, например, $L_0=0,\ L_1>0$. Но в реальной экономической практике такие случаи не бывают. Невозможно представить себе ситуацию, когда на предприятии промышленно-производственный персонал отсутствует, а непроизводственный – работает, или наоборот – промышленно-производственный персонал есть, а менеджеров, бухгалтерии и, страшно сказать - генерального директора! - нет. То же самое можно сказать и про основной капитал предприятия – если в заводской цех (K_0) не проложена дорога (K_0), то рабочие до цеха просто не дойдут. Можно, конечно, вспомнить ситуацию Великой Отечественной Войны, когда эвакуированные в Сибирь с центрально-европейской части СССР предприятия начинали работать в чистом поле (K_0=0), но для моделирования таких ситуаций следует использовать иные математические модели.

Поэтому реальной экономике соответствует случай, когда и действительная и мнимая составляющая комплексного ресурса либо одновременно равны нулю, либо не равны нулю. Другие варианты относятся к идеализации, когда моделям объекта приписываются свойства, этому объекту не присущие. Мы при построении моделей используем абстрагирование, но не идеализацию.

Легко убедиться и в наличии второго свойства, то есть в том, что при неограниченном увеличении одного из комплексных ресурсов - капитала или труда выпуск неограниченно растет. Рост модуля комплексного ресурса в модели отражается ростом модуля производственного результата.

То есть, выполнение первого и второго свойств, присущих «неоклассическим» производственным функциям, для рассматриваемой модели также присущи, что делает аналогию между ними более обоснованной.

Теперь следует найти знаки первой и второй производной функции (6.3.1) для того, чтобы проверить выполнимость условий (6.4.3) и (6.4.4). Е.В.Сиротина сделала соответствующие выкладки, которыми мы и воспользуемся. Прежде всего, для более простого вычисления производных, как и прежде, представим модель производственной функции (6.3.1) в экспоненциальной форме:

$$G+iC = R_a e^{i\theta_a}(R_K e^{i\theta_K})^{\alpha}(R_L e^{i\theta_L})^{1-\alpha}. \qquad (6.4.5)$$

Здесь:

$$R_a=\sqrt{a_0^2+a_1^2}\,,\ \theta_a = arctg\frac{a_1}{a_0}\,,\ R_K=\sqrt{K_0^2+K_1^2}\,,\ \theta_K = arctg\frac{K_1}{K_0}\,,\ R_L=\sqrt{L_0^2+L_1^2}\,,\ \theta_L = arctg\frac{L_1}{L_0}$$

В этой форме записи (6.4.5) легко группируются модуль модели и её полярный угол:

$$G+iC = (R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha})e^{i(\theta_a + i\alpha\theta_K + i(1-\alpha)\theta_L)}. \qquad (6.4.6)$$

Поэтому модель классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа может быть представлена в тригонометрической форме:

$$G+iC = R_a R_K^{\alpha} R_L^{1-\alpha}[\cos(\theta_a+\alpha\theta_K+(1-\alpha)\theta_L)+i\sin(\theta_a+\alpha\theta_K+(1-\alpha)\theta_L)]. \qquad (6.4.7)$$

Это позволяет вычислить первую и вторые частные производные функции по ресурсам.

Согласно условию Даламбера-Эйлера (Римана-Коши) для нахождения производной комплекснозначной функции достаточно взять производные по её действительной или мнимой части. Действительная часть модели (6.4.7) представима в виде:

$$G+iC = R\cos\theta = U. \qquad (6.4.8)$$

Поэтому производную функции (6.3.1), например, по комплексному капитальному ресурсу можно найти так:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K} = \frac{\partial U}{\partial K_0} - i\frac{\partial U}{\partial K_1} = \frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0} - i\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_1}. \qquad (6.4.9)$$

Вычислим первую составляющую производной (6.4.9), а именно - $\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0}$ как производную сложной функции:

$$\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0}=\frac{\partial R}{\partial K_0}\cos\theta+\frac{\partial\cos\theta}{\partial K_0}R\,. \qquad (6.4.10)$$

Первое слагаемое:

$$\frac{\partial R}{\partial K_0}\cos\theta=\frac{\partial R_a R_K^{\alpha}R_L^{1-\alpha}}{\partial K_0}\cos\theta=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-1}\frac{K_0}{\sqrt{K_0^2+K_1^2}}\cos\theta\,. \qquad (6.4.11)$$

А поскольку

$\sqrt{K_0^2+K_1^2}=R_K$, то получим окончательно:

$$\frac{\partial R}{\partial K_0}\cos\theta=\frac{\partial R_a R_K^{\alpha}R_L^{1-\alpha}}{\partial K_0}\cos\theta=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}K_0\cos\theta\,. \qquad (6.4.12)$$

Второе слагаемое (6.4.11) представляет собой производную косинуса аргумента по K_0. Его также можно определить:

$$\frac{\partial\cos\theta}{\partial K_0}R=\frac{\partial\cos(\theta_a+\alpha\theta_K+(1-\alpha)\theta_L)}{\partial K_0}R=-R\sin\theta\frac{\partial(\alpha\theta_K)}{\partial K_0}=-R\sin\theta\alpha\frac{\partial(arctg\,\frac{K_0}{K_1})}{\partial K_0}\,.$$

Откуда окончательно имеем:

$$\frac{\partial\cos\theta}{\partial K_0}R=-\alpha R\sin\theta\frac{-K_1}{K_0^2(1+\frac{K_1^2}{K_0^2})}=\alpha R_a R_K^{\alpha}R_L^{1-\alpha}\sin\theta\frac{K_1}{K_0^2+K_1^2}= \\ =\alpha R_a R_K^{\alpha-2}R_L^{1-\alpha}K_1\sin\theta\,. \qquad (6.4.13)$$

Подставляя (6.4.12) и (6.4.13) в (6.4.10), получим частную производную классификационной производственной функции по основному капиталу:

$$\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0}=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}K_0\cos\theta+\alpha R_a R_K^{\alpha-2}R_L^{1-\alpha}K_1\sin\theta= \\ =\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}(K_0\cos\theta+K_1\sin\theta)\,. \qquad (6.4.14)$$

Теперь точно также можно найти частную производную классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа по вспомогательному капиталу: $\dfrac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_1}$. Поскольку эта производная является производной сложной функции, то её можно вычислить так:

$$\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_1}=\frac{\partial R}{\partial K_1}\cos\theta+\frac{\partial\cos\theta}{\partial K_1}R. \qquad (6.4.15)$$

Первое слагаемое (6.4.15) как производная модуля запишется следующим образом:

$$\frac{\partial R}{\partial K_1}\cos\theta=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-1}\frac{K_1}{\sqrt{K_0^2+K_1^2}}\cos\theta=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}K_1\cos\theta. \qquad (6.4.16)$$

Второе слагаемое (6.4.15) представляет собой производную косинуса аргумента по вспомогательному капиталу K_1. Эту производную также можно вывести:

$$\frac{\partial\cos\theta}{\partial K_1}R=\frac{\partial\cos(\theta_a+\alpha\theta_K+(1-\alpha)\theta_L)}{\partial K_1}R=-R\sin\theta\alpha\frac{\partial(arctg\,\frac{K_0}{K_1})}{\partial K_1}.$$

Вычисляя производную арктангенса, окончательно имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\cos\theta}{\partial K_1}R&=-\alpha R\sin\theta\frac{1}{K_0(1+\frac{K_1^2}{K_0^2})}=-\alpha R_a R_K^{\alpha}R_L^{1-\alpha}\sin\theta\frac{K_0}{K_0^2+K_1^2}=\\&=-\alpha R_a R_K^{\alpha-2}R_L^{1-\alpha}K_0\sin\theta\end{aligned}. \qquad (6.4.17)$$

Подставляя (6.4.16) и (6.4.17) в (6.4.15), получим частную производную классификационной производственной функции по вспомогательному капиталу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_1}&=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}K_1\cos\theta-\alpha R_a R_K^{\alpha-2}R_L^{1-\alpha}K_0\sin\theta=\\&=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}(K_1\cos\theta-K_0\sin\theta)\end{aligned}. \qquad (6.4.18)$$

Поскольку в нашем распоряжении есть все слагаемые для того, чтобы получить производную классификационной функции по комплексному капиталу, можно вывести её:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=\frac{\partial U}{\partial K_0}-i\frac{\partial U}{\partial K_1}=\frac{\partial R\cos\theta}{\partial K_0}-i\frac{\partial R\cos\theta}{\partial K_1}=$$
$$=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}(K_0\cos\theta+K_1\sin\theta)-i\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}(K_1\cos\theta-K_0\sin\theta)= \quad (6.4.19)$$
$$=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}[(K_0-iK_1)\cos\theta+(K_1+iK_0)\sin\theta].$$

Из второго слагаемого последнего множителя полученного выражения можно вынести за скобку мнимую единицу. Получим:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}[(K_0-iK_1)\cos\theta+i(K_0-iK_1)\sin\theta]=$$
$$=\alpha R_a R_L^{1-\alpha}R_K^{\alpha-2}(K_0-iK_1)(\cos\theta+i\sin\theta). \quad (6.4.20)$$

Поскольку $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$, то (6.4.2) можно записать в более удобной форме:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}[\alpha R_K^{-2}(K_0-iK_1)]. \quad (6.4.21)$$

Упростим выражение в квадратных скобках:

$$\alpha R_K^{-2}(K_0-iK_1)=\alpha\frac{K_0-iK_1}{K_0^2+K_1^2}=\frac{\alpha}{K_0+iK_1}=\alpha(K_0+iK_1)^{-1}. \quad (6.4.22)$$

Подставляя это значение в (6.4.21), получим окончательную формулу для первой производной классификационной производственной функции по комплексному капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K}=\alpha(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha-1}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}. \quad (6.4.23)$$

Опуская столь же трудоёмкие, но абсолютно идентичные предыдущим вычисления, приведём итоговую формулу первой производной классификационной производственной функции комплексных переменных по комплексному труду:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial L}=(1-\alpha)(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha}(L_0+iL_1)^{-\alpha}. \quad (6.4.24)$$

И (6.4.23), и (6.4.24) представляют собой комплексное число, состоящее из действительной и мнимой частей. А комплексное число, как известно не может быть ни положительным, ни отрицательным. Это требование (положительности, например) можно предъявить либо к модулю комплексной переменной, либо к её полярному углу, к его действительной или мнимой части. Поэтому рассмотрим суть первых производных функции, а затем сделаем соответствующий вывод.

Поскольку по определению $0 \le \alpha \le 1$, а все производственные ресурсы лежат в первом квадранте комплексной плоскости, моделируемый результат будет лежать в первом квадранте комплексной плоскости производственного результата в случае неотрицательности каждого из коэффициентов комплексного коэффициента пропорциональности:

$$a_0 \ge 0, a_1 \ge 0. \tag{6.4.25}$$

Следует напомнить, что положительность первых производных «неоклассической» производственной функции свидетельствует о том, что положительный прирост ресурсов приводит к положительному приросту производственного результата.

В рассматриваемом случае если в классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа нарушится хотя бы одно из условий (6.4.25), то это означает, что моделируемый результат находится не в первом квадранте, а в других. Это означает, что привлечение какого-либо ресурса ухудшает производственный результат и наоборот – сокращение трудового или капитального ресурса благоприятно сказывается на результатах производства. Такие случаи в экономике встречаются, поэтому можно отметить, что модель классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа моделирует более разнообразные варианты, нежели модель действительных переменных. Но если исследователь собирается следовать строгому правилу – увеличение ресурсов должно вести к увеличению производственных результатов, то классификационная модель типа Кобба-Дугласа помимо ограничения на показатель степени $0 \le \alpha \le 1$ должна дополняться условием (3.4.25). Впрочем, и для функции Кобба-Дугласа само собой выдвигается условие положительности коэффициента пропорциональности.

Исчислим теперь вторую производную по комплексным ресурсам. Опуская вычисления, осуществлённые подобно приведённым выше, сразу же выпишем итоговые формулы второй производной классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по её комплексным ресурсам.

Вторая производная этой функции по комплексному капиталу будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 (G+iC)}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha-2}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}. \tag{6.4.26}$$

Поскольку показатель степени этой функции положителен $0 \le \alpha \le 1$, также как положительны коэффициенты комплексного коэффициента пропорциональности (6.4.25), то второй сомножитель (6.4.26) будет отрицательным, а при положительности всех остальных сомножителей это означает, что моделируемый результат будет находиться в третьем квадранте комплексной плоскости, то есть – и действительная и мнимая части второй производной комплекснозначной функции отрицательные.

Вторая производная рассматриваемой функции по комплексным трудовым ресурсам будет равна:

$$\frac{\partial^2(G+iC)}{\partial L^2} = -\alpha(1-\alpha)(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha}(L_0+iL_1)^{-\alpha-1}. \qquad (6.4.27)$$

В силу тех же причин все сомножители (6.4.27) положительны, а поскольку перед их произведением стоит знак «минус», то это означает, что и действительная, и мнимая части второй производной по комплексному труду будут отрицательными.

Таким образом, при задании для классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа условий:

$$0 \le \alpha \le 1,\ a_0 \ge 0, a_1 \ge 0, \qquad (6.4.28)$$

она приобретает свойства, аналогичные свойствам «неоклассических» производственных функций действительных переменных.

Само собой напрашивается желание вычислить коэффициенты эластичности классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по каждому из ресурсов. Это тем более просто сделать, что вычисление первых производных этой функции по комплексному капиталу и комплексному труду частично было выполнено выше.

Поскольку формула коэффициента эластичности при её вычислении в области действительных чисел имеет вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y},$$

её можно использовать и для моделей комплексных переменных, как это сделано в параграфе 5.6, если известны первые производные комплекснозначной функции.

Тогда коэффициент эластичности классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по комплексному капиталу будет иметь вид:

$$\varepsilon_K = \frac{\partial(G+iC)}{\partial K}\frac{K}{G+iC} = \alpha(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha-1}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}\frac{K}{G+iC}. \qquad (6.4.29)$$

или, осуществляя очевидные сокращения:

$$\varepsilon_K = \alpha . \tag{6.4.30}$$

Точно также находится и коэффициент эластичности по комплексному труду:

$$\varepsilon_L = \frac{\partial(G+iC)}{\partial L}\frac{L}{G+iC} = (1-\alpha)(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha-1}(L_0+iL_1)^{-\alpha}\frac{L}{G+iC} . \tag{6.4.31}$$

Откуда окончательно:

$$\varepsilon_L = (1-\alpha) . \tag{6.4.32}$$

Вывод, который следует из приведённых результатов, однозначен – в классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа показатели её степени играют ту же роль, что и показатели степени в производственной функции Кобба-Дугласа: они являются показателями эластичности производственного результата по соответствующему комплексному ресурсу.

Поскольку предлагаемая классификационная производственная функция комплексных переменных типа Кобба-Дугласа представляет каждый ресурс как комплексную переменную, то можно говорить о том, что сама функция имеет помимо эластичности по комплексному ресурсу в целом ещё и эластичность по каждой из составляющей ресурсов – действительной и мнимой.

Выведем формулу коэффициента эластичности классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по основному капиталу. Для этого вначале вычислим, используя те же обозначения, что и ранее, первую частную производную этой комплекснозначной функции по этому ресурсу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K_0} = \frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0} + i\frac{\partial(R\sin\theta)}{\partial K_0} . \tag{6.4.33}$$

Для первого слагаемого ранее в (6.4.14) было получено:

$$\frac{\partial(R\cos\theta)}{\partial K_0} = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}(K_0\cos\theta + K_1\sin\theta) .$$

Для второго слагаемого (6.4.33) получим:

$$\frac{\partial(R\sin\theta)}{\partial K_0} = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}(K_0\sin\theta - K_1\cos\theta) . \tag{6.4.34}$$

Подставляя полученные результаты в (6.4.33), определяем первую частную производную производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по основному капиталу:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K_0} = \alpha R_a R_L^{1-\alpha} R_K^{\alpha-2}[(K_0\cos\theta + K_1\sin\theta) + i(K_0\sin\theta - K_1\cos\theta)]. \qquad (6.4.35)$$

Упрощая, получим:

$$\frac{\partial(G+iC)}{\partial K_0} = \alpha(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{\alpha}(L_0+iL_1)^{1-\alpha}\frac{K_0-iK_1}{K_0^2+K_1^2}. \qquad (6.4.36)$$

Откуда коэффициент эластичности классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по основному капиталу:

$$\varepsilon_{K_0} = \frac{\partial(G+iC)}{\partial K_0}\frac{K_0}{G+iC} = \alpha\frac{K_0^2 - iK_0K_1}{K_0^2+K_1^2} = \alpha\left(\frac{K_0^2}{K_0^2+K_1^2} - i\frac{K_0K_1}{K_0^2+K_1^2}\right). \qquad (6.4.37)$$

Это – комплексный коэффициент. Дадим его экономическую интерпретацию.

Если основной капитал увеличивается на единицу, то это приведёт к тому, что действительная часть комплексного производственного результата, то есть – валовая прибыль, увеличивается меньше чем на α – поскольку действительная часть комплексного коэффициента меньше единицы. При увеличении основного капитала до бесконечности прирост основного капитала на единицу приводит к увеличению валовой прибыли на α.

Мнимая составляющая комплексного коэффициента эластичности производственного результата от основного капитала имеет отрицательный знак. Это говорит о том, что мнимая составляющая производственного результата, то есть – валовые издержки, уменьшаются на величину, меньшую α. Причём в том случае, когда основной капитал стремится к бесконечности, издержки перестают изменяться.

Аналогично можно вычислить первую производную классификационной производственной функции комплексных переменных типа Кобба-Дугласа по вспомогательному капиталу, а на её основе определить формулу для вычисления коэффициента эластичности функции по этому ресурсу. Опуская промежуточные вычисления, приведём итоговую формулу коэффициента эластичности:

$$\varepsilon_{K_1} = \frac{\partial(G+iC)}{\partial K_1}\frac{K_1}{G+iC} = \alpha\frac{K_1^2 + iK_0K_1}{K_0^2+K_1^2} = \alpha\left(\frac{K_1^2}{K_0^2+K_1^2} + i\frac{K_0K_1}{K_0^2+K_1^2}\right). \qquad (6.4.38)$$

И ему можно дать экономическую интерпретацию.

Увеличение вспомогательного капитала приводит к росту и валовой прибыли, как действительной составляющей, и валовых издержек, как мнимой составляющей производственного результата. Но с ростом вспомогательного капитала к бесконечности рост действительной составляющей комплексного коэффициента эластичности стремится к α, а мнимой составляющей – к нулю. Это значит, что при больших значениях вспомогательного капитала его рост приводит к росту валовой прибыли на α, а на издержки производства этот показатель практически не влияет.

Сумма комплексного коэффициента эластичности по основному капиталу (6.4.37) и комплексного коэффициента эластичности по вспомогательному капиталу (6.4.38) будет давать величину общего коэффициента эластичности по комплексному капиталу, которая равна:

$$\varepsilon_{K_0} + \varepsilon_{K_1} = \alpha\left(\frac{K_0^2}{K_0^2+K_1^2} - i\frac{K_0K_1}{K_0^2+K_1^2} + \frac{K_1^2}{K_0^2+K_1^2} + i\frac{K_0K_1}{K_0^2+K_1^2}\right) = \alpha \,.$$

Аналогично выводятся формулы для коэффициентов эластичности по действительной части комплексного трудового ресурса:

$$\varepsilon_{Lo} = \frac{(1-\alpha)\cdot L_o^{\,2}}{L_o^{\,2}+L_1^{\,2}} - i\frac{(1-\alpha)\cdot L_o \cdot L_1}{L_o^{\,2}+L_1^{\,2}} \qquad (6.4.39)$$

и мнимой части:

$$\varepsilon_{L1} = \frac{(1-\alpha)\cdot L_1^{\,2}}{L_o^{\,2}+L_1^{\,2}} + i\frac{(1-\alpha)\cdot L_o \cdot L_1}{L_o^{\,2}+L_1^{\,2}} \,. \qquad (6.4.40)$$

Тогда эти коэффициенты показывают, на сколько увеличение промышленно-производственного персонала и непроизводственного персонала влияют на валовую прибыль и издержки. Вклад каждой составляющей определяется как показателями степени, так и конкретными значениями привлечённых трудовых ресурсов.

Сумма этих частных коэффициентов эластичности даст нам общую эластичность функции по комплексному труду:

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{Lo} + \varepsilon_{L1} = \frac{(1-\alpha)\cdot L_o^{\,2} + (1-\alpha)\cdot L_1^{\,2}}{L_o^{\,2}+L_1^{\,2}} = 1-\alpha \,.$$

Анализ частных коэффициентов эластичности показывает, что они меняются с изменением объёмов привлекаемых ресурсов, то есть – отдача ресурсов меняется с изменением масштаба ресурсов, но при этом их сумма остаётся величиной постоянной:

$$\varepsilon_{K_0} + \varepsilon_{K_1} = \alpha, \quad \varepsilon_{Lo} + \varepsilon_{L1} = 1 - \alpha .$$

Оставим это интересное свойство без его экономической интерпретации, поскольку тщательное изучение экономического смысла параметров модели не входит в задачу данной монографии.

6.5. Классификационная степенная производственная функция

Искусственное ограничение, вводимое на пределы изменения показателя степени α в классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа, ограничивает и область применения этой модели. Очевидно, что это ограничение (6.3.2) существенно упрощает задачу нахождения коэффициентов модели, но такое упрощение почти всегда ухудшает и аппроксимационные свойства модели. Поэтому более адекватно описывать реальные производственные и иные экономические процессы будут модели, в которой не вводятся некоторые априорные ограничения на её коэффициенты, если это не следует из сути моделируемой экономической ситуации. Снятие ограничений на область ограничений показателей степени степенной классификационной функции расширяет её возможности.

Так, Е.В.Сиротина оценила коэффициенты одной из разновидностей степенной классификационной производственной функции на примере ОАО «Леноблгаз» – функции с действительными показателями степени, и получила модель такого вида:

$$G_t + iC_t = (2,34 + i3,65)(K_0 + iK_1)^{0,44}(L_0 + iL_1)^{0,50} .$$

Эта модель описывает производственный процесс компании точнее, чем система степенных моделей действительных переменных, описывающих по отдельности валовую прибыль и издержки производства.

Но не будем более подробно останавливаться на модели этого типа, поскольку её свойства аналогичны тем, которые были определены для классификационной функции типа Кобба-Дугласа, рассмотренной в предыдущем параграфе, констатируем это обстоятельство и обратим внимание на модель иного типа - классификационную степенную производственную функцию с комплексными показателями степени:

$$G_t + iC_t = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{(b_0 + ib_1)}(L_0 + iL_1)^{(c_0 + ic_1)} . \qquad (6.5.1)$$

Проверим однородность этой функции по правилу (6.3.3):

$$\begin{aligned}&\left(a_0+ia_1\right)(\lambda K_0+i\lambda K_v)^{(b_0+ib_1)}(\lambda L_0+i\lambda L_v)^{(c_0+ic_1)}=\\&\lambda^{(b_0+ib_1)}\lambda^{(c_0+ic_1)}\left(a_0+ia_1\right)(K_0+iK_v)^{(b_0+ib_1)}(L_0+iL_v)^{(c_0+ic_1)}=\ .\\&\lambda^{(b_0+ib_1)+(c_0+ic_1)}\left(a_0+ia_1\right)(K_0+iK_v)^{(b_0+ib_1)}(L_0+iL_v)^{(c_0+ic_1)}\end{aligned}\tag{6.5.2}$$

То есть эта функция неоднородна комплексной степени

$$(b_0+ib_1)+(c_0+ic_1).\tag{6.5.3}$$

Задавая различные значения показателей степени этой функции, можно получить их самые различные виды. В частности, классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа получается если сумма (6.5.3) будет равна единице и она становится однородной первой степени.

Логичным представляется рассмотрение производственной функции, которая является линейно псевдооднородной, а именно - однородной степени i. Это может быть в случае, когда (6.5.3) даст в сумме мнимую единицу:

$$(b_0+ib_1)+(c_0+ic_1)=i$$

Обозначим показатель степени для такой функции через β. Тогда псевдооднородная классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа имеет вид:

$$G_t+iC_t=(a_0+ia_1)(K_0+iK_1)^{i\beta}(L_0+iL_1)^{i(1-\beta)}.\tag{6.5.4}$$

При ограничениях:

$$0\le\beta\le1.\tag{6.5.5}$$

Для того чтобы понять суть поведения псевдооднородной классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа, представим её в экспоненциальном виде:

$$G_t+iC_t=R_a e^{i\theta_a}R_K^{i\beta}e^{i\theta_K i\beta}R_L^{i(1-\beta)}e^{i\theta_L i(1-\beta)}.\tag{6.5.6}$$

Здесь используются ранее введённые обозначения:

$$R_a=\sqrt{a_0^2+a_1^2},\ \ \theta_a=arctg\frac{a_1}{a_0},\tag{6.5.7}$$

$$R_K=\sqrt{K_0^2+K_1^2},\ \ \theta_K=arctg\frac{K_1}{K_0},\tag{6.5.8}$$

$$R_L=\sqrt{L_0^2+L_1^2},\ \ \theta_L=arctg\frac{L_1}{L_0},\tag{6.5.9}$$

Преобразуем правую часть модели (6.5.6) так, чтобы удалось вычленить модуль правой части комплексной переменной и её полярный угол:

$$G_t + iC_t = R_a e^{-\beta\theta_K} e^{\theta_L(\beta-1)} e^{\ln R_K^{i\beta}} e^{\ln R_L^{i(1-\beta)}} e^{i\theta_a}. \qquad (6.5.10)$$

Поскольку

$$e^{\ln R_K^{i\beta}} = e^{i\beta\ln\sqrt{K_0^2+K_1^2}}, \text{ а } e^{\ln R_L^{i(1-\beta)}} = e^{i(1-\beta)\ln\sqrt{L_0^2+L_1^2}},$$

то валовая прибыль по псевдооднородной классификационной производственной функции типа Кобба-Дугласа рассчитывается так:

$$G_t = R_a e^{(\beta-1)arctg\frac{L_1}{L_0} - \beta arctg\frac{K_1}{K_0}} \cos(\theta_a + \beta\ln\sqrt{K_0^2+K_1^2} + (1-\beta)\ln\sqrt{L_0^2+L_1^2}). \qquad (6.5.11)$$

Соответственно и издержки производства по этой модели вычисляются по формуле:

$$C_t = R_a e^{(\beta-1)arctg\frac{L_1}{L_0} - \beta arctg\frac{K_1}{K_0}} \sin(\theta_a + \beta\ln\sqrt{K_0^2+K_1^2} + (1-\beta)\ln\sqrt{L_0^2+L_1^2}). \qquad (6.5.12)$$

Разберём теперь, какой именно характер производства моделируется этой псевдооднородной классификационной производственной функцией типа Кобба-Дугласа.

Предположив неизменность комплексных трудовых ресурсов, получим такой характер влияния комплексного капитального ресурса на производственный результат:

1) если растут инвестиции в основной капитал K_0, то это приводит к уменьшению полярного угла этих ресурсов и росту модуля капитальных ресурсов. Валовая прибыль в (6.5.11) представляется перемножением двух изменяющихся сомножителей – возрастающей при таком характере изменения ресурсов экспонентой $e^{(\beta-1)arctg\frac{L_1}{L_0} - \beta arctg\frac{K_1}{K_0}}$ и уменьшающимся с ростом K_0 косинусом - $\cos(\theta_a + \beta\ln\sqrt{K_0^2+K_1^2} + (1-\beta)\ln\sqrt{L_0^2+L_1^2})$. В зависимости от соотношения между основным и не основным капиталом, а также от значений комплексного коэффициента пропорциональности и показателя степени β, при этом может моделироваться рост прибыли, стабильность её значений или снижение объёмов. Поэтому однозначной зависимости здесь не выявляется. Но для издержек производства в этой ситуации мультиплицируются две тенденции – экспонента растёт, также как растёт синус угла. Поэтому, из (6.5.11) однозначно следует, что издержки при этом растут.

2) если растут инвестиции в не основной капитал, то полярный угол возрастает, а это значит, что экспонента, где этот угол используется со знаком «минус», уменьшается. Аргумент косинусоидальной составляющей возрастает с ростом модуля капитальных ресуров, что означает уменьшение самого этого сомножителя. Таким образом, мультиплицируются две уменьшительные тенденции. Это значит, что инвестиции в не основной капитал однозначно приводят к уменьшению валовой прибыли на производстве. Что касается издержек производства, то если экспоненциальная составляющая, как было показано, уменьшается, то синус возрастающего угла растёт. Поэтому перемножение этих двух сомножителей может при различных значениях коэффициентов и ресурсов вести к разным тенденциям.

Точно такие же выводы можно сделать и о характере влияния на производственный результат другой комплексной переменной – трудовых ресурсов. С увеличением числа промышленно-производственного персонала растут издержки, а изменение валовой прибыли могут быть самыми различными, а увеличение непроизводственного персонала приводит к уменьшению валовой прибыли и разнообразному поведению издержек.

Поскольку взаимосвязи, моделируемые псевдооднородной классификационной производственной функцией типа Кобба-Дугласа, вполне соответствуют многим реальным производственным процессам, можно утверждать, что и псевдооднородная классификационная производственная функция типа Кобба-Дугласа может быть использована при моделировании экономики. Но, поскольку и в этой модели введены априорные предположения о её однородности и ограничениях на знаки показателя степени (6.5.5), то область практического применения такой модели ограничена. Поэтому не будем уделять её свойствам столько же внимания, сколько уделили классификационная производственной функции типа Кобба-Дугласа в предыдущем параграфе.

Универсальной будет являться модель, в которой убираны какие-либо ограничения на однородность модели (6.5.1) и знаки её коэффициентов. При этом расширяется ареал применения такой модели, хотя она существенно усложняется, а процедура вычисления комплексных коэффициентов становится значительно более трудоёмкой.

Если прологарифмировать правую и левую части равенства (6.5.1), то будет получена модель такого вида:

$$\ln(G_t + iC_t) = \ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(K_0 + iK_1) + (c_0 + ic_1)\ln(L_0 + iL_1) \quad . \qquad (6.5.13)$$

Никаких проблем теоретического плана, связанных с оценкой коэффициентов этой модели на статистических данных не предвидится – всё довольно просто. Другое дело, что для этого необходимо будет решать систему из шести уравнений с шестью неизвестными (если работать с действительными переменными) или же систему из трёх комплекснозначных уравнений системы МНК. При этом, конечно же необходимо тщательно следить за полярными углами переменных, поскольку большинство программ, с которыми работают экономисты при моделировании, вычисляют углы, обрезая их значения в диапазоне от 0 до 2π, что может вызвать ошибки в оценивании коэффициентов модели.

В любом случае, экономист, приняв решение работать со степенной классификационной производственной функцией комплексных переменных, добивается более адекватного моделирования производственных процессов и влияния активной и пассивной части производственных ресурсов, нежели он это сделает, используя модели действительных переменных.

Очевидно, что помимо степенных, могут использоваться классификационные модели других видов – показательные, логарифмические или их некоторый симбиоз. Принципиально важно, что количество привлекаемых в модель ресурсов ограничивается лишь вычислительными способностями используемой техники и смысловым содержанием задачи.

6.6. Теневая экономика и её моделирование комплекснозначными функциями

Проф. Г.В.Савинов, выступивший одним из первых рецензентов работ по комплекснозначной экономике, предвидя вопрос многих экономистов о том, «какой экономический смысл имеет мнимая составляющая?», предложил использовать комплекснозначные модели, исходя их принципа отнесения к мнимой части скрытых факторов или нераскрытых способностей (потенциал) экономических факторов.[33] Используя этот подход, можно предложить классификацию экономических процессов на две группы – легальная экономика и теневая экономика. Очевидно, что показатели легальной экономики следует отнести к действительным частям экономических переменных, а показатели теневой экономики следует относить к мнимым составляющим. Придерживаясь этого правила, можно построить многообразнейшие модели, описывающие теневую экономику. Остановимся лишь на одной из них.

Введём следующие переменные:

K_0 – стоимость основных фондов, отражённая в статистических отчётностях;

K_1 - стоимость основных фондов, используемая в нелегальном производстве;

L_0 – количество занятых на производстве;

L_1 – количество занятых в теневой экономике;

---

[33] Савинов Г.В., Светуньков С.Г. Комплексные переменные в экономическом анализе и моделировании // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2006, № 4. - С. 21-35.

Q_0 – валовой внутренний продукт, отражённый в официальной статистике;

Q_1 – величина валового внутреннего продукта теневой экономики.

Простейшая степенная модель экономики с учётом теневого бизнеса имеет вид:

$$Q_0 + iQ_1 = a(K_0 + iK_1)^{\alpha}(L_0 + iL_1)^{\beta}. \tag{6.6.1}$$

где α и β – показатели степени функции, на величины и знаки которых мы не налагаем никаких ограничений.

С позиций наилучшей аппроксимации социально-экономических явлений с учётом теневых процессов более точной будет степенная производственная функция комплексных переменных с комплексными коэффициентами:

$$Q_0 + iQ_1 = (a_0 + ia_1)(K_0 + iK_1)^{b_0 + ib_1}(L_0 + iL_1)^{c_0 + ic_1}, \tag{6.6.2}$$

коэффициенты которой можно найти с помощью МНК, о чём уже говорилось ранее. Но модель с действительными коэффициентами (6.6.1) с позиций экономической сути моделируемого процесса представляется более обоснованной.

Действительно, если величины основных фондов и занятых в теневой экономике вдруг благодаря усилиям власти будут сведены к нулю, то и объём производимой продукции в теневой экономике будет равен нулю. Модель (6.6.1) как раз это и моделирует – если $K_1=0$ и $L_1=0$, то очевидно что и $Q_1=0$. А в модели с комплекснозначными коэффициентами (6.6.2) даже при равенстве нулю теневых ресурсов действительная переменная, возводимая в комплексную степень, будет в качестве результата давать комплексную переменную и вычислять объём теневого продукта, отнесённый в мнимую часть, и не равный нулю. То есть - такая модель менее точно отражает реальные процессы. Это первое обстоятельство.

Второе обстоятельство, по которому следует отдать предпочтение модели (6.6.1), а не модели (6.6.2), заключается в характере исходных данных. Действительно, если статистические данные по легальной экономике, хотя и засорены ошибками, но их порядок и тенденции не особенно искажаются этими ошибками. А вот информация о теневой экономике и её слагаемых такому учёту не поддаётся по определению. Здесь приходится использовать экспертные оценки, точность которых, очевидно, крайне не велика. В таких условиях, когда исходные данные не точны, усложнять модель с целью повышения её точности – затея бесперспективная. Поэтому простой модели (6.6.2) следует отдать предпочтение и по этому основанию.

Проведём предварительный анализ свойств предлагаемой модели экономической динамики с учётом теневой экономики. Применяя экспоненциальную форму записи, преобразуем модель (6.6.1) к следующему виду:

$$Q_0 + iQ_1 = a(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}} (L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}} e^{i(\alpha arctg\frac{K_1}{K_0} + \beta\alpha arctg\frac{L_1}{L_0})}. \qquad (6.6.3)$$

Откуда легко определить, как модель учитывает влияние факторов на легальную и теневую экономики. Объём официально отражаемого производства:

$$Q_0 = a(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}} (L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}} \cos(\alpha arctg\frac{K_1}{K_0} + \beta\alpha arctg\frac{L_1}{L_0}). \qquad (6.6.4)$$

Аналогично можно определить, как предлагаемая модель описывает нелегальный выпуск:

$$Q_1 = a(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}} (L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}} \sin(\alpha arctg\frac{K_1}{K_0} + \beta\alpha arctg\frac{L_1}{L_0}). \qquad (6.6.5)$$

Как видно, модель описывает влияние всех ресурсов – легальных и нелегальных, - и на официальную, и на теневую экономику. Имеет ли это место в реальной экономике?

Действительно, занятые в теневой экономике L_1 производят нелегальный продукт, который через официальные продажи в определённой части легализируется и отражается как часть реального ВВП Q_0, а занятые в легальном производстве зачастую, не подозревая того, производят продукт, скрываемый от налогообложения и включаемый в оборот теневой экономики. Кроме того, оплата за труд этих людей способствует тому, что свои доходы они направляют в существенной части на удовлетворение потребностей с помощью товаров, легально производимых в экономике.

Точно также и на основных фондах K_0, официально отражаемых в бухгалтерских балансах, производят продукцию для теневого оборота, а в различного рода «подпольных» цехах на оборудовании, которое мы отнесём к основным фондам теневого бизнеса K_1, производят товары, реализуемые в официальном обороте. Комплекснозначная степенная функция отражает эти сложные взаимосвязи.

Посмотрим, какие именно тенденции описывает предложенная модель. Предположим вначале, что ситуация в изучаемом регионе или стране такова, что способствует увеличению предпринимателей, работающих нелегально в теневой экономике, а ресурсы, привлекаемые к легальному производству остаются постоянными. То есть – возрастают как капиталы K_1, привлекаемые к нелегальному производству, так и количество занятых в теневой экономике L_1. Как следует из (6.6.4), это приводит к тому, что растут оба сомножителя $(K_0^2 + K_1^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ и $(L_0^2 + L_1^2)^{\frac{\beta}{2}}$, и уменьшается тригонометрический сомножитель – косинус возрастающих углов уменьшается. Так каким образом усиление теневой экономики влияет на легальную экономику? Ответ на этот вопрос определяется значениями показателей степени α и β. Если они меньше единицы, то рост степенных составляющих будет происходить в меньшей степени, чем рост косинусоиды – моделируется либо стабильность, либо некоторое снижение легального производства. Чем ближе к нулю эти показатели, тем более отрицательным становится воздействие теневой экономики на легальную.

Если же показатели степени больше единицы, то степенные сомножители возрастают быстрее, нежели уменьшается косинусоида. Поэтому в этом случае моделируется положительное влияние теневой экономики на результаты легального производства.

Как эти ресурсы, вовлекаемые в теневой бизнес, оказывают влияние на его объёмы? Ответ на этот вопрос можно получить из второй составляющей модели, которая обозначена как равенство (6.6.5). Степенные сомножители растут с ростом ресурсов K_1 и L_1. Растёт и тригонометрический сомножитель – синусоида с ростом угла увеличивает свои значения. Значит, моделируется однозначный рост теневого производства вне зависимости от того, какими являются показатели степени – близкими к нулю, или больше единицы.

Теперь вновь предположим, что конъюнктура производства такова, что предпринимателям нет смысла развивать теневое производство и они, зафиксировав его на определённом уровне, вкладывают ресурсы в легальные производства. То есть – растут капиталы K_0, привлекаемые к легальному производству, как и количество занятых в экономике L_0. Как на такое изменение ресурсов отреагирует модель (6.6.1)?

Динамика легального производства, определяющаяся произведением степенных сомножителей и тригонометрического (6.6.4) сомножителя, будет такой. Степенные сомножители растут, и этот рост определяется показателями степени. Аргумент косинусоиды с ростом K_0, и L_0 будет уменьшаться. Косинус уменьшающегося угла – увеличивается. Следовательно, объём легального производства увеличивается в любом случае.

А что происходит с нелегальной экономикой? Степенные составляющие также возрастают, а вот тригонометрический сомножитель – синусоида, - уменьшается. Поэтому, в зависимости от значений показателей степени и соотношения ресурсов легальной и нелегальной экономики, объём нелегального производства может как возрастать, так и уменьшаться. А может оставаться стабильным. Если при этом показатели степени меньше единицы, то рост степенных сомножителей происходит в меньшей степени, чем уменьшение синусоиды.

Получается, что модель верно отражает возможные варианты воздействия ресурсов легальной и теневой экономики друг на друга.

По имеющимся данным построить модель (6.6.1) не сложно – это уже делалось в предыдущих параграфах. Но, как уже говорилось, основная сложность, с которой приходится сталкиваться при построении модели (6.6.1) – отсутствие достоверной информации о переменных, относящихся к теневой экономике в России и в других странах. Преодолевая эту проблему

И.С.Савков предложил опираться на имеющуюся экспертную информацию о теневой экономике России[34]. Поскольку известны экспертные оценки того, сколько занято человек в теневой экономики России (средняя оценка – 40,9%) и какой оборот составляет теневая экономика по отношению к официально регистрируемому ВВП (средняя оценка мнений экспертов – 45,1%), можно использовать эти данные для построения модели. Однако неизвестной является величина стоимости основных фондов (капитала), используемых в теневой экономике. Нам экспертная оценка этой величины не встречалась. Для её определения предлагается следующий подход. По имеющимся статистическим данным России вычисляем параметры степенной производственной функции действительных переменных. Модель имеет вид:

$$Q_t = 0{,}5241 K_t^{0{,}569} L_t^{0{,}579}. \qquad (6.6.6)$$

Поскольку показатели степени отражают вклад каждого ресурса в результаты производства, а технологии теневой экономики незначительно отличаются от технологий официальных производств, тем более, что существенная часть теневого продукта вырабатывается на тех же технологических линиях, то можно использовать эти коэффициенты для модели (6.6.1):

$$Q_{0t} + iQ_{1t} = 0{,}5241(K_{0t} + iK_{1t})^{0{,}569}(L_{0t} + iL_{1t})^{0{,}579}. \qquad (6.6.7)$$

Откуда можно получить оценку основных фондов, используемых в теневой экономике России. Для этого прологарифмируем левую и правую части этого равенства (будем использовать главные значения логарифмов):

$$\ln\sqrt{Q_{0t}^2 + Q_{1t}^2} + i\,arctg\,\frac{Q_{1t}}{Q_{0t}} = \ln 0{,}5241 + 0{,}569\left[\ln\sqrt{K_{0t}^2 + K_{1t}^2} + i\,arctg\,\frac{K_{1t}}{K_{0t}}\right] + 0{,}579\left[\ln\sqrt{L_{0t}^2 + iL_{1t}^2} + i\,arctg\,\frac{L_{1t}}{L_{0t}}\right]$$

Теперь можно вычислить неизвестную величину капитала, находящегося в теневой экономике России.

Впрочем, особенности свойств комплексных переменных позволяют упростить эту задачу. Поскольку два комплексных числа равны друг другу только тогда, когда равны друг другу их действительные и мнимые части, то применительно к экспоненциальной форме, это означает, что должны быть равны друг другу модули комплексных чисел и их полярные углы. Поэтому из (6.6.7) можно получить и более удобные для вычислений выражения:

$$(Q_{0t}^2 + Q_{1t}^2)^{\frac{1}{2}} = 0{,}5241(K_{0t}^2 + K_{1t}^2)^{\frac{0{,}569}{2}}(L_{0t}^2 + L_{1t}^2)^{\frac{0<579}{2}}. \qquad (6.6.8)$$

---

[34] Светуньков С.Г., Савков И.С. Моделирование теневой экономики с помощью степенной производственной функции комплексны переменных. // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск №19 – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2009.

Или

$$arctg\frac{Q_{1t}}{Q_{0t}} = 0,569arctg\frac{K_{1t}}{K_{0t}} + 0,579arctg\frac{L_{1t}}{L_{0t}}. \quad (6.6.9)$$

Решая любое из приведённых уравнений относительно величины основных фондов теневой экономики K_{0t}, получим, что они составляют величину 37,3% от официальной величины основных фондов России в последние годы. То есть – примерно треть основных фондов России определяется моделью как включенные в оборот теневой экономики.

Конечно, результаты расчётов по полученной модели (6.6.7) носят в существенной части условный характер, поскольку она базируется на ряде упрощений и допущений; и при появлении относительно достоверных значений переменных, отнесённых к теневой экономике, коэффициенты модели (6.6.7) должны быть пересчитаны и наверняка изменятся. Но важно другое – модель классификационной комплекснозначной функции может быть использована для моделирования экономики с учётом её теневой составляющей. Модели действительных переменных в этом отношении представляют собой менее тонкий инструмент исследования и анализа.

6.7. Формирование сложных многофакторных моделей комплексных переменных

Классификационные модели комплексных переменных значительно расширяют возможности комплекснозначной экономики. Но пока что были рассмотрены исключительно модели одного типа - линейные или степенные. Но в реальной экономике влияние факторов на результат вовсе не обязательно подчиняется одному какому-либо закону. Поэтому в моделях действительных переменных встречаются сложные многофакторные модели, например, такого типа:

$$y_t = ax_{1t}^{\alpha}x_{2t}^{\beta} + bx_{3t}.$$

МНК непосредственно к этой модели применить сложно, поскольку будет получена система четырёх нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными коэффициентами. Эту систему в принципе можно решить численными методами, но куда проще с помощью тех же численных методов, которые имеются в пакетах прикладных программ, найти целенаправленным перебором удовлетворительные значения коэффициентов, соответствующие критерию МНК – для этого, например, в MS Exell имеется функция «поиск решения».

Однако воспользоваться этой функцией и заложенным в программе алгоритмом для поиска значений коэффициентов комплекснозначной модели такого же типа:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(x_{1rt} + ix_{1it})^{\alpha}(x_{2rt} + ix_{2it})^{\beta} + (b_0 + ib_1)(x_{3rt} + ix_{3it})$$

невозможно.

Потребность в построении сложных нелинейных многофакторных комплекснозначных моделях имеется. Например, объём произведённой продукции растениеводства и животноводства в сельском хозяйстве определяется количеством занятых в растениеводстве и количеством занятых животноводстве, земельными площадями, выделенными под сельскохозяйственные угодья и выделенными под пастбища, количеством техники для обработки земли и количеством техники, используемой в животноводстве и другими факторами. Для верного моделирования сельскохозяйственного производства как раз и необходимо строить комплекснозначную многофакторную модель, которая вовсе не будет являться линейной.

В своё время для решения подобных задач в области действительных переменных был предложен метод синтеза однофакторных моделей в многофакторную.

Пусть исследователь с помощью какого-либо метода, МНК например, построил несколько однофакторных зависимостей некоторого показателя y от факторов x_k, $k=1,2,3,\ldots n$,

$$y = f_k(x_k) + \varepsilon_k . \tag{6.7.1}$$

причём каждая из этих моделей описывает поведение показателя с дисперсией:

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k - f_k(x_k))^2$$

Поскольку у всех n моделей (6.7.1) левые части равенств равны друг другу и равны y, просуммируем n раз левые и правые части равенств:

$$ny = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k . \tag{6.7.2}$$

Откуда:

$$y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k . \tag{6.7.3}$$

Получилась многофакторная модель как синтез однофакторных. Из полученной формы записи следует, что каждая однофакторная модель входит в многофакторную с одинаковым весом, равным *1/n*. Поскольку дисперсии каждой модели отличны друг от друга, для минимизации общей ошибки аппроксимации и дисперсии модели вводят вес каждой модели v_i при их синтезе в общую многофакторную модель. При этом очевидно правило – чем больше дисперсия однофакторной модели, тем с меньшим весом она должна входить в общую многофакторную модель.

С учётом этого многофакторная модель как синтез однофакторных будет записана так:

$$y=\sum_{k=1}^{n} v_k f_k(x_k)+\sum_{k=1}^{n} v_k \varepsilon_k \qquad (6.7.4)$$

где $$v_l=\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k-\sigma_l}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_k}. \qquad (6.7.5)$$

Легко заметить, что сумма весов, задаваемых по формуле (6.7.5), равна единице. Могут быть и другие способы задания весов каждой однофакторной модели в многофакторную.

Воспользуемся этим методом для построения многофакторных комплекснозначных моделей. Пусть построены несколько однофакторных комплекснозначных зависимостей некоторого комплексного показателя (y_r+iy_i) от комплексных факторов $(x_{rk}+ix_{ik})$, $k=1,2,3,\ldots l, \ldots n$, причём каждая из этих моделей описывает поведение комплексного показателя со средней ошибкой аппроксимации $(\varepsilon_{rk}+i\varepsilon_{ik})$:

$$y_r+iy_i=f_i(x_{rk}+ix_{ik})+(\varepsilon_{rk}+i\varepsilon_{ik}). \qquad (6.7.6)$$

Синтезируем эти однофакторные модели в многофакторную с соответствующими весами:

$$y_r+iy_i=\sum_{k=1}^{n} v_k f_k(x_{rk}+ix_{ik})+\sum_{k=1}^{n} v_k(\varepsilon_{rk}+i\varepsilon_{ik}), \qquad (6.7.7)$$

где $$v_l=\frac{1}{n-1}\frac{\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{rk}+i\sigma_{ik})-(\sigma_{rl}+i\sigma_{il})}{\sum_{k=1}^{n}(\sigma_{rk}+i\sigma_{ik})} \qquad (6.7.8)$$

- комплексный вес каждого фактора в общей многофакторной комплекснозначной модели.

В том случае, когда предполагается строить аддитивную многофакторную модель, предложенный метод существенно упрощает процесс формирования комплекснозначных многофакторных моделей и снижает его трудоёмкость.

Несколько сложнее обстоит дело в ситуации, когда исследователь предполагает построить многофакторную мультипликативную модель. В таком случае каждую однофакторную модель следует рассматривать через мультипликативную ошибку аппроксимации:

$$\mu_k = \frac{y}{f_k(x_k)}. \tag{6.7.9}$$

Если модель однозначно описывает показатель, то мультипликативная ошибка аппроксимации всегда будет равна единице. Если описывает с некоторой дисперсией, то мультипликативная ошибка аппроксимации будет варьироваться вокруг единицы, причём – чем хуже модель описывает показатель, тем сильнее вариация этой ошибки. Значит, мерилом точности модели служит ошибка:

$$\varepsilon_k = 1 - \mu_k, \tag{6.7.10}$$

дисперсия которой легко вычисляется.

Вновь действует правило – чем больше дисперсия, тем меньший вес должен быть у модели. Но если в аддитивном случае сумма весов должны быть равна единице, то в мультипликативном случае произведение весов должно быть равно единице. Тогда каждый вес находится по формуле:

$$v_l = \frac{(\prod_{k=1}^{n} \sigma_k)^{\frac{1}{n}}}{\sigma_l}. \tag{6.7.11}$$

С учётом этого многофакторная мультипликативная модель примет вид:

$$y = (\prod_{k=1}^{n} v_k f_k(x_k))^{\frac{1}{n}}. \tag{6.7.12}$$

Точно также можно построить и многофакторную комплекснозначную модель:

$$y_r + iy_i = (\prod_{k=1}^{n} v_k f_k(x_{rk} + ix_{ik}))^{\frac{1}{n}}, \tag{6.7.13}$$

где комплексные веса вычисляются по формуле:

$$v_l = \frac{(\prod_{k=1}^{n}(\sigma_{rk} + i\sigma_{ik}))^{\frac{1}{n}}}{\sigma_{rl} + i\sigma_{il}}. \qquad (6.7.14)$$

Таким образом можно избежать серьезных вычислительных трудностей и построить комплекснозначную модель заданной точности. При этом, конечно же, следует тщательно следить за пределами изменения показателей и их коэффициентов, поскольку многие комплекснозначные функции являются многолистными и периодическими, в результате чего в погоне за сложностью модели можно получить бессмысленную модель.

6.8. Обобщение главы

Теория функций комплексного переменного ограничивается исследованием однофакторных комплексных переменных. Экономика представляет собой сложный объект для исследования, и стремление в максимальной степени учесть реальную сложность взаимосвязей при её моделировании неминуемо направляет нас по пути построения многофакторных зависимостей. В этой главе было показано, что многофакторные комплекснозначные модели действительно существенно расширяют математический аппарат исследователя. С помощью такого аппарата удаётся решать задачи, которые в области действительных переменных даже не могли быть поставлены. Классификационные модели, в которых каждая комплексная переменная представляет собой две части одного целого экономического показателя или фактора, позволяют промоделировать разный вклад этих составляющих в результат. Эффективность таких моделей была продемонстрирована на примере производственных функций и на примере модели экономики России с учётом нелегальной экономики.

Отмечая перспективность многофакторного комплекснозначного моделирования, следует всё же указать на то, что порой при их построении возникают весьма трудоёмкие задачи оценивания параметров моделей, поскольку количество неизвестных коэффициентов таких моделей велико.

В этой главе были рассмотрены в основном степенные многофакторные комплекснозначные модели, поскольку в экономическом анализе с помощью действительных переменных превалируют линейные и степенные мультипликативные многофакторные модели.

В последнем параграфе было показано – как можно строить сложные нелинейные многофакторные модели комплексных переменных с помощью синтеза однофакторных комплекснозначных моделей. Практические применение этого подхода будет показано в последней главе монографии.

Богатство аппарата теории функций комплексных переменных (а в данной главе показано, что можно работать именно с моделями не одной, а нескольких комплексных переменных) открывает многоплановые перспективы для практического использования комплекснозначных моделей в моделировании экономики.

Глава седьмая. Моделирование экономической конъюнктуры фондового рынка

7.1. Индексы фондовых рынков

Одно из направлений, которое было заявлено в самом начале исследования возможности использования ТФКП в экономике, было моделирование экономической конъюнктуры фондовых рынков[35]. Задачу моделирования экономической конъюнктуры экономическая наука решает более ста лет. В этом направлении достигнуты существенные успехи, и экономисты повсеместно используют некоторый стандартный набор методов для этого.

В то же время уточнение результатов моделирования происходит фрагментарно, принципиальных прорывов в данном направлении нет. Как раз применение ТФКП и может способствовать такому прорыву.

При моделировании экономической конъюнктуры используют два подхода: первый заключается в том, чтобы показатели экономической конъюнктуры определить как некоторую зависимость от конъюнктурообразующих факторов, а второй подход подразумевает агрегирование показателей в некоторую обобщённую величину, по которой и судят о состоянии конъюнктуры.

Все основания для использования комплекснозначных моделей в первом направлении изложены в предыдущих главах. С помощью моделей комплексных переменных можно построить более сложные и, возможно, более адекватные модели зависимости показателей экономической конъюнктуры от конъюнктурообразующих факторов. Здесь не предвидятся трудности методологического характера. А вот для использования комплекснозначных построений во втором подходе - для построения индексов экономической конъюнктуры, - готовых рецептов сразу не получишь.

Для того чтобы иметь возможность судить о поведении некоторого объекта в целом, стараются использовать не совокупность показателей, а некий обобщающий показатель, который вбирает в себя диагностические свойства совокупности показателей. Это понятно, ведь множество показателей одного объекта трудно сравнить с множеством показателей другого объекта или того же самого, но в предыдущий момент времени и сделать какой-то вывод в целом. Чаще всего одни из множества таких показателей свидетельствуют о преимуществе данного объекта, а другие – о преимуществе другого. Вбирая в себя главные особенности существенной части показателей, обобщённый показатель, иначе называемый индексом, как раз и свидетельствует о состоянии объекта в среднем.

Поскольку о состоянии экономической конъюнктуры любого рынка можно судить по множеству возможных показателей, именно здесь индекс является наиболее предпочтителен, поскольку является результатом агреги-

---

[35] Светуньков С.Г. Комплексные переменные в теории индексов // Теория функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании: материалы Всероссийского научного семинара. 19 декабря 2005 г. / Под ред. проф. С.Г.Светунькова. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006. - С. 39 – 44.

рования многообразной информации. В данной главе мы не будем рассматривать вопросы моделирования экономической конъюнктуры рынков вообще, а уделим внимание одной из разновидностей рынка – фондовому рынку или рынку ценных бумаг.

Каждый крупный национальный рынок ценных бумаг обычно имеет свой собственный фондовый индекс, на основании знаний о значениях которого и ориентируются в своей деятельности торговцы акциями. Индексом фондового рынка является некоторое число, которое характеризует его качественное состояние. Причём само по себе значение этого числа, как правило, не несёт в себе существенной информации. Важно не само значение этого числа, а результат его сопоставления с теми значениями, которое оно принимало ранее. Индекс может характеризовать фондовый рынок в целом, рынок групп ценных бумаг (рынок государственных ценных бумаг, рынок облигаций, рынок акций и т.п.), рынок ценных бумаг какой-либо отрасли (нефтегазового комплекса, телекоммуникации, транспорта, банков и т.п.) и др. Сопоставление динамики поведения этих индексов может показать, как изменяется состояние какой-либо отрасли по отношению к рынку в целом, отражая тем самым состояние конъюнктуры рынка или динамику и направление его изменения.

Теория индексов имеет чёткие логические параллели с известными в экономической теории кривыми безразличия и поверхностями безразличия. Сумма стоимостей на товары в замкнутой системе при разных ценах при неизменности прочих условий, в соответствии с выводами экономической теории, будет одинаковой (постоянный уровень потребления):

$$\sum_{j} \mathrm{P}^{j}\mathrm{Q}^{j} = const\,.$$

Если во времени меняется ситуация в этой замкнутой системе, будет меняться и совокупная стоимость. Изменение этой совокупной стоимости во времени и должен отражать индекс. Поэтому в качестве обобщающей величины в каждый момент времени *t* используется совокупная стоимость всех покупок на данном рынке ценных бумаг или отношение этой стоимости к такой же величине в предыдущий момент времени:

$$\mathrm{I}_{t} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \mathrm{P}_{t}^{j}\mathrm{Q}_{t}^{j}}{\sum\limits_{j=1}^{m} \mathrm{P}_{t-1}^{j}\mathrm{Q}_{t-1}^{j}}\,, \qquad (7.1.1)$$

где P_{t}^{j} - цена *j*–ой акции, реализованной на рынке; Q_{t}^{j} - объём *j*–ой акции, реализованной на рынке; *j* - номер акции (или предприятия, реализующего товар), который реализуется на рынке, $j = 1, 2, 3, \ldots m$; *t* - время.

С помощью индекса осуществляется сравнение совокупных стоимостей в данный момент времени t с совокупной стоимостью в предыдущий момент времени (t-1). Если экономическая конъюнктура на рынке улучшилась по сравнению с предыдущим моментом, то усилилась деловая активность, количество сделок увеличилось по сравнению с предыдущим моментом. Значит, совокупная стоимость продаж также увеличилась, и индекс (7.1.1) становится больше единицы. Если конъюнктура ухудшилась, то активность участников рынка снизилась, число сделок и объёмы продаж уменьшились, уменьшилась и совокупная стоимость. Это приводит к тому, что числитель (7.1.1) оказывается меньше знаменателя, а сам индекс становится меньше единицы. Если же конъюнктура не изменилась, индекс оказывается равным единице.

Таким образом, различные значения индекса (7.1.1) позволяют интерпретировать состояние экономической конъюнктуры рынка в данный момент по сравнению с предыдущим моментом. В возможности обобщения огромных массивов данных – преимущество индексов экономической конъюнктуры, ведь числитель и знаменатель индекса представляют собой суммы произведений цен товаров на объёмы их реализации. Дополнить эту сумму новым слагаемым не составляет особого труда, поэтому индекс в состоянии учесть и обобщить информацию об изменениях в стоимостях всех товаров, продающихся и покупающихся на данном рынке. Следовательно, индекс даёт уникальную возможность использования всей имеющейся в распоряжении исследователя информации. Впрочем, возможность обобщения большого количества данных, в свою очередь, является условием существования индекса – принцип расчёта индекса как раз и заключается в необходимости обобщения многих данных. В этой объективной необходимости заключается и недостаток индексов – обобщающий индекс не в состоянии вовремя просигнализировать о системных диспропорциях, тенденции которых начинают набирать силу на рынке.

Действительно, в силу того, что в числителе и знаменателе (7.1.1) находятся суммы произведений, возможны случаи, когда в сумме уменьшение одного показателя будет компенсироваться увеличением другого показателя, например, уменьшение цены товара в два раза (под товаром понимаются акции) будет компенсировано увеличением объёмов продаж на этот товар в два раза. Резкое падение цены на товар может свидетельствовать, например, об уходе с рынка одного из его участников, что может иметь различные последствия для рынка и его конъюнктуры.

Возможен и другой случай, когда падение цены и объёмов продаж одного товара в общей совокупности будет компенсировано ростом цены и объёмов продаж другого товара. При этом в целом индекс не изменится, хотя состояние экономической конъюнктуры очевидно изменилось. Такое изменение может привести к ряду неприятных последствий – известны многочисленные «чёрные» дни, когда на биржах происходил внезапный «обвал», хотя индексы экономической конъюнктуры фондовых бирж таких «обвалов» не предсказывали. Поэтому встречаются попытки ограничивать количество включаемых в индекс показателей только наиболее важными из них.

В последние годы практикующие экономисты уходят от использования индекса как отношения суммы продаж в данный момент времени к сумме продаж в предыдущий момент. Используют объем продаж некоторого определённым образом отобранного множества акций и анализируют изменение во времени этого объёма. Подобные фондовые индексы рассчитывают различные информационные агентства (AK&M, Interfax, РБК, Cbonds), фондовые биржи (ММВБ, РТС), рейтинговые агентства (S&P) и т.п. Они рассчитываются как средняя величина из цен акций компаний, включенных в выборку. Разработчики индексов применяют для вычислений подобных индексов разнообразные подходы – где-то используется метод простой средней арифметической, где-то - метод средней геометрической, а где-то - метод средней арифметической взвешенной.

Общая формула расчёта простого среднеарифметического индекса имеет вид:

$$\mathrm{I} = \frac{\sum_{j=1}^{m} P_j}{\mathrm{m}}. \qquad (7.1.2)$$

Здесь I – индекс; P_j – цена j–ой акции, реализованной на рынке; m – число компаний.

По методу простой средней арифметической рассчитываются индексы Доу-Джонса, и наиболее известный фондовый индекс Японии – индекс «Никкей» (Nikkei). Промышленный индекс Доу-Джонса определяется по 30 компаниям, а индекс Никкей - на базе 225 акций, торговля которыми ведётся на Токийской фондовой бирже.

По методу средней геометрической рассчитываются композитный индекс «Вэлью Лайн» в США, учитывающий котировки 1695 акций и старейший индекс «FT-30» в Великобритании, который определяется на основании курсов акций 30 компаний:

$$I = \sqrt[m]{I_1 \times I_2 \times \ldots I_m}, \qquad (7.1.3)$$

где I – сводный индекс; I_1, $\mathrm{I}_{2,}$ $\mathrm{I}_{3,}$ …..I_n – индивидуальные индексы компаний; m – число компаний в выборке.

Наиболее распространённым методом, применяемым при расчёте индексов, является метод взвешенной среднеарифметической. При использовании данного метода учитывают размер компании и масштабы совершения операций на фондовом рынке. Обычно в качестве весов берут рыночную капитализацию компании, т.е. рыночную стоимость акций, выбранных компанией. По данному методу рассчитывают многие известные в мировой экономике индексы - «Стандарт энд Пурз» («S&P»), сводный индекс Нью-

Йоркской фондовой биржи, индексы системы Nasdaq, индекс Американской фондовой биржи, индекс «Уилшир-5000» и др. В Великобритании данным методом определяют индекс «FT–100», который рассчитывается по 100 крупнейшим компаниям, отбираемым специальной комиссией, в состав которой входят представители Лондонской фондовой биржи, газеты «FT» и профессиональных участников фондового рынка; индекс «FT–250», рассчитываемый по 250 средним компаниям, которые составляют около 20% рыночной капитализации; индекс «FT–350», который объединяет индексы «FT – 100» и «FT–250». В Германии классическим среднеарифметическим взвешенным индексом является индекс «DAX», а также другие индексы, входящие в эту группу (композитный индекс «CDAX»; «DAX–100»).

Во Франции данным методом исчисляются основные фондовые индексы группы «САС», в том числе «САС-40», который рассчитывается Обществом французских бирж по акциям 40 крупнейших эмитентов, и генеральный индекс («CAC Cenегаl»), определяемый по 250 компаниям. В Японии среднеарифметическим взвешенным индексом является классический индекс «ТОПИКС» (TOPIX), рассчитываемый по акциям всех компаний, торговля которыми ведётся в первой секции Токийской фондовой биржи. В данной секции осуществляется торговля акциями наиболее известных компаний, число которых превышает 1000. Взвешивание производится по количеству выпущенных акций.

Расчёт индекса по методу среднеарифметической взвешенной осуществляется по формуле:

$$I = \frac{\sum_{j=1}^{m} P_j^t Q_j^t}{\sum_{j=1}^{m} P_j^0 Q_j^0} \times I_0, \qquad (7.1.4.)$$

где P_j^0 и P_j^t – цена акций i – той компании в базовом и отчетном периоде;

Q_j^0 и Q_j^t – количество акций в обращении в базовом и отчетном периоде;

$i=1,2,..., m$ - количество компаний в выборке;

I_0 – базовое значение индекса.

Многообразие подходов по расчёту индексов вызвано тем, что ни один из них не обладает достаточной диагностической способностью. Поэтому аналитики совершенствуют индексы самыми различными способами.

Посмотрим, каким образом те общие принципы и подходы комплекснозначной экономики, которые сформулированы в монографии, можно использовать на примере разработки инструментария анализа фондового рынка.

Акция как товар является носителем двух составляющих: потребительских свойств, объективно присущих товару, и цены – денежной оценки конкретным потребителем потребительских свойств акции как товара. В экономической теории в разделе «Потребительское поведение» до сих пор не утихают споры о том, что первично, а что вторично. Некоторые специалисты придерживаются точки зрения о том, что цена за единицу товара определяет тот объём товара, который потребитель согласен приобрести; другие специалисты приводят аргументы в пользу того, что оценивая предлагаемое количество товара и степень удовлетворения потребностей в нём, потребитель определяет свои денежные способности и называет цену, по которой он готов приобрести такую партию товара. Такое разнообразие мнений, судя по всему, возникло с лёгкой руки А.Маршалла, который, говоря о функциональной зависимости объёма от цены, на график поместил обратную зависимость - цены от объёма.

Мы не будем вторгаться в этот спор, а отметим лишь, что и объём спроса, и цена являются необходимыми показателями экономической оценки свойств товара. С позиций нашего исследования – это две разные стороны, характеризующие товар. А поскольку это именно так, то оба эти показателя характеризуют товар в целом и их необходимо рассматривать не по отдельности друг от друга, а в комплексной взаимосвязи, то есть – как комплексную переменную:

$$z_{jt} = q_{jt} + ip_{jt}. \qquad (7.1.5)$$

Здесь:
q – объём продаж акций,
p – цена одной акции,
j – номер акции.

Исходные значения цены и объёма должны быть представлены как безразмерные величины, иначе комплексная переменная не может быть сформирована.

Представленная запись (7.1.5) позволяет полностью описать свойства конкретной акции и математически корректно работать как с каждой из двух его составляющих, так и с их совокупностью в целом, если предварительно отмасштабировать исходные переменные или привести их одной размерности.

Комплексная переменная *z* (7.1.5) характеризуется модулем и полярным углом:

$$R_{jt} = \sqrt{q_{jt}^2 + p_{jt}^2}, \quad \theta_{jt} = arctg\,\frac{p_{jt}}{q_{jt}}. \qquad (7.1.6)$$

Поэтому она может быть представлена как в арифметической (7.1.5), так и в тригонометрической и экспоненциальной форме записи. В дальнейшем нам понадобится именно экспоненциальное представление данной комплексной переменной:

$$z_{jt} = R_{jt} e^{i\theta_{jt}}. \qquad (7.1.7)$$

Если в распоряжении исследователя имеются значения о продажах акций в момент времени t и в предыдущий момент времени $t-1$, то, сравнивая их, можно судить об изменении конъюнктуры рынка этих акций. В нашем случае сравнение может осуществляться либо вычитанием из z_{jt} его предыдущего значения, либо делением z_{jt} на z_{jt-1}.

В первом случае действительная часть полученной разности будет характеризовать изменение объёмов продаж, а мнимая часть – изменение цены за единицу акции. Частное от двух комплексных чисел будет характеризоваться отношением модулей и углов двух комплексных переменных. Модуль будет больше или меньше единицы в зависимости от того, увеличился ли модуль переменной или уменьшился, а полярный угол будет характеризовать изменение цены по отношению к изменению объёма. Поскольку информация о каждой акции содержится в её комплексной модели (7.1.5), то помимо операции с отдельными акциями можно сформировать показатель, обобщающий информацию по всем акциям, или, иначе говоря – индекс. Этот индекс должен содержать в себе информацию обо всех продажах на рынке, которые уместно учитывать, то есть – необходимо использовать для этого m комплексных переменных (7.1.7).

Простая сумма комплексных переменных (7.1.5) будет бессмысленной – сложатся отдельно действительные и мнимые части, и полученное комплексное число особого смысла не имеет. При этом, очевидно, теряются свойства каждой акции в отдельности, а от такого обобщения новые свойства у суммарной комплексной величины не появляются. Перемножение же комплексных переменных продаж всех m акций на данном рынке имеет такой смысл[36]:

$$Z_t = \prod_{j=1}^{m} z_{jt} = \prod_{j=1}^{m} (R_{jt} e^{i\theta_{jt}}) = e^{i\sum_{j=1}^{m}\theta_{jt}} \prod_{j=1}^{m} R_{jt} \,. \tag{7.1.8}$$

Аналогично можно найти произведение комплексных переменных продаж на этом же рынке всех товаров в предыдущий момент времени $t-1$:

$$Z_{t-1} = \prod_{j=1}^{m} z_{jt-1} = \prod_{j=1}^{m} (R_{jt-1} e^{i\theta_{jt-1}}) = e^{i\sum_{j=1}^{m}\theta_{jt-1}} \prod_{j=1}^{m} R_{jt-1} \,. \tag{7.1.9}$$

Отношение (7.1.8) к (7.1.9) будет также являться комплексной переменной, и будет характеризовать ситуацию на рынке, то есть выступать уже в качестве некоторого индекса:

[36] Светуньков С.Г. Комплексные переменные в теории индексов // Теория функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании: материалы Всероссийского научного семинара. 19 декабря 2005 г. / Под ред. проф. С.Г.Светунькова. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006. - С. 39 – 44.

$$I_{St} = (\frac{\prod_{j=1}^{m} z_{jt}}{\prod_{j=1}^{m} z_{jt-1}})^{\frac{1}{m}} = e^{i\frac{1}{m}(\sum_{j=1}^{m}\theta_{jt} - \sum_{j=1}^{m}\theta_{jt-1})}(\frac{\prod_{j=1}^{m} R_{jt}}{\prod_{j=1}^{m} R_{jt-1}})^{\frac{1}{m}}. \qquad (7.1.10)$$

Сам этот индекс I_S, в соответствии со свойствами комплексной переменной, является комплексной переменной с действительной и мнимой частью. Он же может быть выражен в экспоненциальной форме с помощью модуля R_z и полярного угла φ_z.

Полярный угол индекса I_S находится как показатель степени в (7.1.10):

$$e^{i\frac{1}{m}(\sum_{j=1}^{m}\theta_{jt} - \sum_{j=1}^{m}\theta_{jt-1})}, \qquad (7.1.11)$$

то есть, он равен разности:

$$\varphi_z = \frac{1}{m}(\sum_{j=1}^{m}\theta_{jt} - \sum_{j=1}^{m}\theta_{jt-1}) \cdot \qquad (7.1.12)$$

Модуль индекса I_S определяется по формуле:

$$R_{zt} = (\frac{\prod_{j=1}^{m} R_{jt}}{\prod_{j=1}^{m} R_{jt-1}})^{\frac{1}{m}} = (\prod_{j=1}^{m}\frac{R_{jt}}{R_{jt-1}})^{\frac{1}{m}}. \qquad (7.1.13)$$

Для того чтобы понять смысл модуля и полярного угла этого индекса, обратимся к его графической интерпретации на комплексной плоскости. Осями координат этой плоскости по определению выступают отмасштабированные цена за единицу акции и объём продаж акций.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда $m=1$, то есть, когда изучается поведение только одной акции. Ни рис. 7.1 приведено положение комплексной переменной в момент времени t и предыдущий момент времени $t-1$.

На рисунке комплексная переменная z_t изображена в условиях, когда объёмы продаж этой акций q_t несколько упали по сравнению с предыдущим моментом q_{t-1}, но цена за единицу акции p_t существенно возросла $p_t > p_{t-1}$. Это отражается в модели тем, что модуль комплексной переменной вырос – $R_t > R_{t-1}$, так же как вырос и полярный угол – $\theta_t > \theta_{t-1}$.

Очевидно, что для любых ценных бумаг их полярный угол лежит в пределах от 0 до $\pi/2$.

Если теперь отнести комплексную переменную в момент времени t к её значениям в предыдущий момент времени, получим новую комплексную переменную (частный индекс):

$$I_t = \frac{z_t}{z_{t-1}} = \frac{R_t}{R_{t-1}} e^{i(\theta_t - \theta_{t-1})} = \frac{R_t}{R_{t-1}} \cos(\theta_t - \theta_{t-1}) + i \frac{R_t}{R_{t-1}} \sin(\theta_t - \theta_{t-1}) \,. \qquad (7.1.14)$$

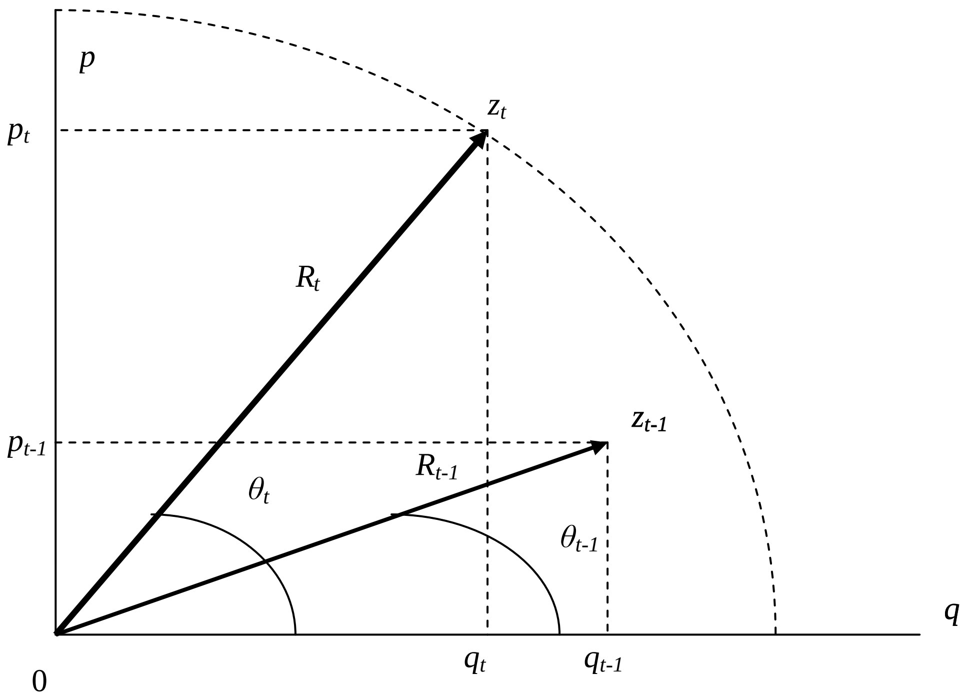

Рис. 7.1. Поведение акции, изображаемое на комплексной плоскости

Поскольку полярный угол этого комплексного индекса равен:

$$\theta_{It} = \theta_t - \theta_{t-1} = arctg\frac{p_t}{q_t} - arctg\frac{p_{t-1}}{q_{t-1}}, \qquad (7.1.15)$$

а модуль:

$$R_{It} = \frac{\sqrt{q_t^2 + p_t^2}}{\sqrt{q_{t-1}^2 + p_{t-1}^2}}, \qquad (7.1.16)$$

то можно сделать предварительный вывод об изменениях полярного угла комплексного индекса (7.1.14) и его модуля.

Прежде всего, следует отметить, что полярный угол комплексного индекса лежит в пределах:

$$- \pi/2 < \theta_{It} < \pi/2. \qquad (7.1.17)$$

Полярный угол (7.1.15) частного индекса (7.1.14) равен нулю, если пропорция между ценой и объёмом продаж не изменилась – это следует из

(7.1.15). Пропорционально возрастание цены при таком же одновременном росте объёме продаж означает возрастающий интерес к акциям и оживление на рынке. Пропорциональное уменьшение цены при таком же одновременном снижении объёма продаж означает стремление держателей акций попридержать акции при падающей цене на них. То есть, равенство нулю полярного угла частного индекса (7.1.14) свидетельствует о некотором относительно стабильном отношении на рынке к данной ценной бумаге – при росте её цены торги этой бумагой растут, при снижении цены - уменьшаются.

Применительно к арифметической форме комплексного индекса это означает равенство нулю его мнимой составляющей.

Полярный угол (7.1.15) больше нуля, если выросла цена акции при неизменной величине объёмов продаж или при фиксированной цене снизились объёмы продаж. Первое свидетельствует о росте интереса к этой ценной бумаге и о нежелании ряда её держателей избавляться от неё, второе – о том, что данная цена не устраивает держателей акции, и они воздерживаются от продаж акций. То есть, это – ситуация ожиданий, когда участники рынка считают данную бумагу перспективной.

Положительность полярного угла означает, что и косинус, и синус положительны, как положительны действительная и мнимая части индекса (7.1.14). Причём, чем выше мнимая часть этого индекса, тем в большей степени рынок ожидает будущих изменений по поведению акции и изменения эти ожидаются по повышению цен на них, поэтому цены на акцию выросли по сравнению с предыдущим наблюдением. Положительное значение полярного угла частного индекса свидетельствует о нарастании интереса к акции на рынке.

Если полярный угол частного индекса оказывается меньше нуля, то это означает - при фиксированных ценах увеличиваются объёмы продаж этой акции, или при фиксированных объёмах уменьшается цена за единицу акций. Первое означает, что от этой акции её держатели спешат избавиться, ожидая ухудшения её позиций. Второе означает, что цена начинает уменьшаться и при этом ценную бумагу особенно не придерживают – она не очень интересна. Таким образом, отрицательный полярный угол частного индекса свидетельствует о снижении интереса к акции.

В арифметической форме записи это означает, что мнимая часть комплексного частного индекса отрицательна – и чем больше она по модулю, тем более резко ухудшились позиции акции на рынке.

Теперь разберём возможную динамику модуля (7.1.16) частного комплексного индекса. Он может оставаться постоянным, возрастать или уменьшаться. На рис. 7.1 пунктирной линией проведена окружность с радиусом R_t. В любой точке этой окружности радиус этой переменной будет один и тот же – при возрастании полярного угла (росте цены и снижении объёмов продаж) и при уменьшении полярного угла (уменьшении цены и увеличении объёмов продаж). То есть – этот показатель не отражает настроения участников рынка. Он отражает лишь масштаб (не объём!) операций с этой ценной бумагой.

Объём продаж этой акции представляет собой произведение цены на объём или в рассматриваемом случае – произведение действительной части частного комплексного индекса на вещественную составляющую его мнимой части, то есть:

$$p_t q_t = R_t \cos\theta_t \times R_t \sin\theta_t = \frac{1}{2} R_t^2 \sin(2\theta_t). \qquad (7.1.18)$$

Уменьшение модуля частного комплексного индекса при постоянном полярном угле свидетельствует о уменьшении объёма продаж, а его увеличение в этом случае – о увеличении объёма продаж. Одновременное изменение и полярного угла, и модуля могут привести к постоянному объёму продаж, но существенному изменению отношения участников рынка к данной акции (рис.7.2).

(7.1.18) может оставаться величиной постоянной, если например, наблюдается рост модуля комплексной переменной, но её полярный угол уменьшается. Из рис. 7.2 следует, что это может соответствовать только ситуации, когда цена падает, а объём продаж растёт.

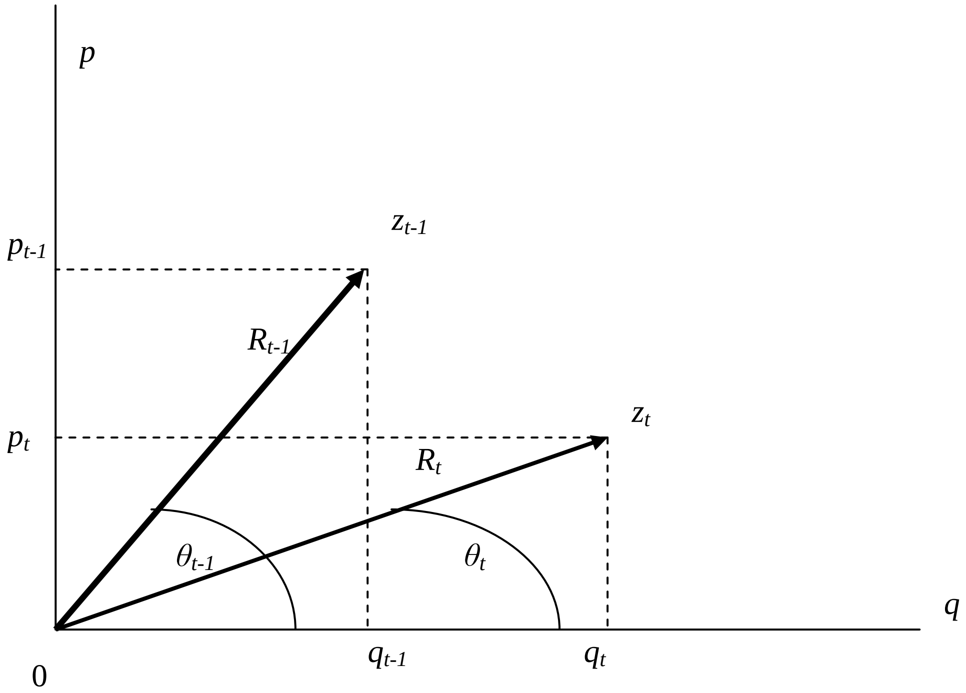

Рис. 7.2. Неизменность объёмов продаж при изменении состояния конъюнктуры данной акции

Это ли не соответствует ситуации, когда владельцы акции избавляются от неё? Именно поэтому объёмы продаж являются малоинформативными о ситуации на рынке, а изменение полярного угла и мнимой части комплексной переменной – более информативными.

Возвращаясь к частному комплексному индексу, отметим, что:

1) близость к нулю мнимой части этого индекса свидетельствует о стабильном состоянии конъюнктуры. Если при этом действительная часть увеличивается, это означает возрастающий интерес к ценной бумаге, если же его действительная часть уменьшается, то это означает, что интерес к данной бумаге несколько упал;

2) если мнимая часть комплексного частного индекса положительная, то это свидетельствует о том, что акция очень интересна рынку. Если при этом мнимая часть далека от нулевых значений, то это означает, что на рынке наблюдается спрос на бумагу, близкий к ажиотажному. Если при этом действительная часть велика, то наблюдается ажиотаж; если действительная часть мала – объёмы продаж уменьшились в ожидании дальнейшего роста цены;

3) если мнимая часть индекса отрицательная, то это означает падение интереса рынка к данной бумаге, причём, чем больше по модулю её величина, тем сильнее падение интереса. Высокое значение действительной части при этом будет свидетельствовать о том, что объём продаж увеличивается – участники рынка избавляются от этой бумаги; если нет – участники рынка придерживают эту бумагу в ожидании лучших времён.

Поскольку обобщающий индекс (7.1.10) представляет собой произведение частных индексов, то вышеуказанные выводы распространяются и на его свойства.

На условном примере, представленном в таблице 7.1, продемонстрируем свойства индекса комплексных переменных.

Табл.7.1.

Условный пример для расчёта индекса (безразмерные единицы)

	Акция 1		Акция 2		Акция 3		Акция 4	
	Цена, *p*	Объём продаж, *q*	Цена, *p*	Объём продаж, *q*	Цена, *p*	Объём продаж, *q*	Цена, *p*	Объём продаж, *q*
t	11	10	10	8	7	5	15	10
t-1	10	11	8	10	5	7	10	15

Цены и объём акций выбраны таким образом, чтобы при расчёте классический индекс (7.1.1) был равен 1, тем самым, показывая стабильность на рынке. В этом легко убедиться:

$$I_t = \frac{11*10+10*8+7*5+15*10}{10*11+8*10+5*7+10*15} = 1 \qquad (7.1.19)$$

Теперь по каждой акции в каждый момент времени вычислим модуль комплексной переменной (табл. 7.2).

Табл. 7.2.
Расчётные значения модулей акций по каждому моменту времени

	Акция 1	Акция 2	Акция 3	Акция 4
	R_1	R_2	R_3	R_4
t	14,87	12,80	8,60	18,03
$t-1$	14,87	12,80	8,60	18,03

После чего определим полярные углы каждой переменной в различные моменты времени (табл.7.3)

Табл. 7.3.
Расчётные значения полярного угла (в радианах)

	Акция 1	Акция 2	Акция 3	Акция 4
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
t	0,83	0,90	0,95	0,98
$t-1$	0,74	0,67	0,62	0,59

Рассмотрим теперь, значения частных комплексных индексов.
Первый частный комплексный индекс:

$$I_{1t} = \frac{14,87}{14,87} e^{i(0,83-0,74)} = 1\cos 0,09 + i1\sin 0,09 = 0,995952733 + i0,089878549 .$$

Теперь второй:

$$I_{2t} = \frac{12,80}{12,80} e^{i(0,90-0,67)} = \cos 0,23 + i\sin 0,23 = 0,973666395 + i0,227977524 .$$

Рассчитаем третий частный индекс:

$$I_{3t} = \frac{8,60}{8,60} e^{i(0,95-0,62)} = \cos 0,33 + i\sin 0,33 = 0,946042344 + i0,324043028 .$$

Теперь последний четвёртый индекс:

$$I_{4t} = \frac{18,03}{18,03} e^{i(0,98-0,59)} = \cos 0,39 + i\sin 0,39 = 0,92490906 + i0,380188415$$

У всех индексов мнимые части положительны, что свидетельствует о росте интереса к акциям. Мнимая часть первого индекса близка к нулю, поэтому интерес к этой акции можно диагностировать, как вполне обычный. А вот у четвёртой акции мнимая часть значительна – *0,380188415*. Это свидетельствует о наличии ажиотажного спроса на бумагу. И действительно, из табл. 7.1 видно, что цена на эту акцию выросла на 50%.

Теперь вычислим общий для рынка в целом комплексный индекс (7.1.10). Модуль индекса:

$$R_t = \left(\frac{14,87\times 12,80\times 8,6\times 18,03}{14,87\times 12,80\times 8,6\times 18,03}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{29,513}{29,513}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 \qquad (7.1.20)$$

Его полярный угол:

$$\theta_t = \frac{1}{4}[\,(0,83\text{-}0,74)+(0,9\text{-}0,67)+(0,95\text{-}0,62)+(0,98\text{-}0,59)]= 0,26 \qquad (7.1.21)$$

Тогда комплексный индекс в арифметической форме:

$$I_{St} = 0,966389978+i0,257080552\,. \qquad (7.1.22)$$

Мнимая часть этого коэффициента положительна и больше нуля, что свидетельствует о благоприятном состоянии экономической конъюнктуры и оживлении на рынке. Следует вновь упомянуть, что классический индекс для изучаемого условного примера равен единице, что означает стабильность конъюнктуры, хотя мы наблюдаем очевидное её изменение.

Вновь видно, что использование комплексных переменных позволяет иначе промоделировать экономический объект и получить выводы, отличные от тех, которые получаются с помощью моделей и индексов действительных переменных.

Зачастую для отражения ситуации на рынке экономисты учитывают некоторый «сводный» индекс, представляющий собой сумму объёмов продаж некоторого набора акций («голубых фишек»):

$$I_t = \sum_j \mathrm{P}_t^j \mathrm{Q}_t^j = const\,. \qquad (7.1.23)$$

При этом для анализа ситуации на рынке значение индекса не делится на предыдущее значение, а просто анализируется динамика индекса. Само собой разумеется, что динамический ряд значений этого индекса даёт возможность сравнения друг с другом как рядом стоящих индексов, так и отдалённых друг от друга индексов.

Если использовать по аналогии с (7.1.23) индекс (7.1.8):

$$Z_t = \prod_{j=1}^{m} z_{jt} = \prod_{j=1}^{m}(R_{jt}e^{i\theta_{jt}}) = e^{i\sum_{j=1}^{m}\theta_{jt}}\prod_{j=1}^{m}R_{jt}$$

то можно столкнуться с одной проблемой – этот индекс, являясь комплексным числом, увеличивает с ростом числа включаемых данных по акциям свой модуль, и увеличивает полярный угол, который равен сумме полярных углов, каждый из которых является положительным:

$$\theta = \sum_{j=1}^{m} \theta_{jt}$$

Такой индекс является потому периодической величиной, поскольку при разных сочетаниях включаемых в индекс акций можно получить полярные углы, различающиеся друг от друга на *2πk*, следовательно, отношение их действительных и мнимых частей будут одинаковыми, хотя процессы - различные. Индекс (7.1.10) в котором находится частное комплексных индексов, свободен от этого недостатка, поскольку полярные углы одних и тех же акций вычитаются друг из друга. Так возможно ли получение некоторого аналога сводного индекса (7.1.23) в области комплексных переменных?

Таким вариантом может быть среднее геометрическое индекса (7.1.8):

$$I_t = \sqrt[m]{e^{i\sum_{j=1}^{m}\theta_{jt}} \prod_{j=1}^{m} R_{jt}} = e^{i\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\theta_{jt}} \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} R_{jt}} . \qquad (7.1.24)$$

Вычисление этого индекса позволит анализировать отдельно динамику его четырёх характеристик:

1) полярного угла:
$$\varphi_t = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\theta_{jt} ,$$
2) модуля:
$$R_t = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} R_{jt}} ,$$
3) действительной части:
$$I_{rt} = R_t \cos\varphi_t ,$$
4) мнимой части:
$$I_{it} = R_t \sin\varphi_t .$$

Эти предложения носят гипотетический характер.

Рассматривая комплексный индекс как дополнительный инструмент анализа фондовых рынков, а не альтернативный инструментарию действительных переменных, мы вновь имеем все основания утверждать, что такое развитие инструментальной базы экономики является весьма продуктивным.

7.2. Фазовая плоскость и К-паттерны

Фондовый рынок – рынок особого рода. На нём не встречаются продавцы и конечные покупатели. Его товары не удовлетворяют насущные потребности, продавцы мгновенно становятся покупателями, а покупатели – мгновенно превращаются в продавцов. Для объяснения их поведения теории предельной полезности или трудовой стоимости беспомощно опускают руки. Модели и методы экономической теории, применённые к этому рынку, терпят полное фиаско – на фондовом рынке другие законы, другие взаимосвязи, другие стили поведения. Здесь, более чем на каком-либо рынке, действуют законы, относимые к психологии и, в некоторой степени, социологии. Массовая паника на рынке приводит к их обвалу, в виде основной движущей силы выступают ожидания, прогнозированию которых уделяется много внимания, но пока что мало результативно.

Теория фондовых рынков далеко не так завершена в той степени, в какой хотелось бы. Следует напомнить, что задача любой теории – объяснить изучаемое явление, в том числе и с использованием моделей. Модели, как известно, могут быть словесными, графическими, математическими или аналоговыми, не важно – они представляют собой результат абстрагирования, представления изучаемого объекта в виде некоторого образа, включающего в себя главные свойства изучаемого объекта.

К настоящему времени применительно к фондовому рынку выделяют два подхода к его исследованию. Первый получил название «фундаментальный анализ», который представляет собой использование словесных и графических моделей для описания сложной взаимосвязи причин и факторов, действующих на рынке. Второй подход получил название «технический анализ», в котором используются математические модели самой разной сложности в попытке описать и спрогнозировать количественные характеристики рынка без выявления системы причинно-следственных связей. Синтез этих двух направлений и представляет собой некоторую теорию фондового рынка.

Поскольку на этом рынке основными показателями, изучением поведения которых занимается теория фондового рынка, являются цена за одну ценную бумагу и объём продаж этой бумаги, то вполне естественным является желание найти и понять взаимосвязь между этими двумя экономическими показателями. Но до сих пор их использование в теории фондового рынка ограничивается расчетом разного рода индексов – типа (7.1.1) или (7.1.2). Большего достичь пока не удаётся.

Но любой экономист понимает, что между ценой за единицу товара и объёмом продаж этого товара, пусть даже этим товаром выступает ценная бумага на фондовом рынке, существует экономическая взаимосвязь, интуитивно ощущаемая, но в теории фондовых рынков пока не объяснимая. Эту интуитивно ощущаемую взаимозависимость выявить, объяснить и описать пока не удавалось. Поэтому сегодня теория фондового рынка рекомендует визуально анализировать динамику цены p_t и динамику объёмов продаж q_t, размещая два графика один под другим, соотнося масштаб оси времени. Такое совместное размещение динамики экономических показателей даёт экономисту некоторое интуитивное представление об изучаемом процессе. При этом есть некоторое понимание взаимного влияния этих двух показателей друг на друга, но - ни направление этого влияния, ни его суть описать с помощью каких-либо моделей не удаётся.

Поскольку и цена за акцию, и объём продаваемых акций являются взаимосвязанными и распределёнными во времени, то возникает возможность их совмещения на одном графике, который будет представлять собой известную в естественных науках фазовую плоскость, ведь каждое значение объёма продаж и цены имеет точно идентифицирующий их индекс, в виде которого выступает время. Поэтому располагая на одной оси плоскости цену, а на другой оси – объём продаж, можно на эту фазовую плоскость нанести совокупность точек, которая зачастую имеет вид ярко выраженной закономерности и называется поэтому «фазовым портретом». Наиболее ярким примером фазового портрета является известная в физике «петля гистерезиса».

Попытка построения фазовых портретов различных ценных бумаг, котирующихся на разных фондовых рынках, заканчивается неудачей. Никакого «портрета» не получается, а получается хаотическое нагромождение точек и связывающих их линий. Пример такой фазовой плоскости некоторой ценной бумаги приведён на рис. 7.3.

Поэтому следует признать, что с помощью инструментов действительных переменных, используя общеизвестные подходы исследования, не удастся решить задачу выявления и описания взаимосвязи между ценой за единицу ценной бумаги и объёмом обращения этой бумаги на фондовом рынке. То есть, науке не удаётся решить самое главное – выявить движущую силу рынка, проявляющуюся в его закономерностях. Конечно, никто не спорит о том, что в современной теории фондового рынка наработан огромный эмпирический материал и выявлены многочисленные закономерности его динамики. Но эмпирико-дедуктивный метод познания, используемый при этом, так и не выходит на уровень теоретических обобщений. Гипотеза о наличии взаимосвязи между ценой и объёмом на этом рынке пока не подтверждается.

Рис. 7.3. Типичный фазовый портрет ценной бумаги на фондовом рынке

Поскольку задачей данного исследования является демонстрация только малой части тех богатейших возможностей, которые открываются перед экономистами при использовании теории функций комплексных переменных, покажем, как можно решить поставленную задачу по проверке гипотезы о наличии взаимосвязи между ценой и объёмом продаж ценной бумаги на фондовом рынке. Воспользуемся для этого введённой ранее комплексной переменной (7.1.5):

$$z_{jt} = q_{jt} + ip_{jt}.$$

Эта комплексная переменная может быть записана и в экспоненциальной, и в тригонометрической форме, для чего необходимо вычислить модуль комплексной переменной и её полярный угол:

$$R_{jt} = \sqrt{q_{jt}^2 + p_{jt}^2}, \quad \theta_{jt} = arctg\frac{p_{jt}}{q_{jt}}. \qquad (7.2.1)$$

И модуль комплексной переменной, и её полярный угол, характеризующие ценную бумагу (цену и объём продаж), претерпевают изменения во времени, поскольку исходная комплексная переменная является динамичной. Поэтому дополнительную характеристику ценной бумаги могут дать графики изменения во времени как полярного угла, так и модуля. Экономический смысл увеличения или уменьшения этих показателей был изложен в предыдущем параграфе (рис.7.1 и 7.2). Поэтому, построив такие графики, экономист получает возможность располагать некоторой дополнительной информацией об изучаемом процессе изменения во времени ценной бумаги. Это - с одной стороны.

С другой стороны из (7.2.1) со всей очевидностью следует, что эти две переменные взаимосвязаны друг с другом, поскольку при вычислении модуля и полярного угла используется одна и та же пара значений – цена и объём. Это означает, что динамические переменные (7.2.1) могут быть расположены на одном графике - графике фазовой плоскости, а взаимосвязь между ними, если она обнаружится, будет характеризовать собой фазовый портрет изучаемого процесса.

Т.В.Корецкая построила несколько десятков таких фазовых плоскостей ценных бумаг, котирующихся на ММВБ[37] с 2007 по 2009 год. На фазовых плоскостях всех изученных ценных бумаг отчётливо выделялся фазовый портрет, имеющий типичную форму, изображённую на рис. 7.4.

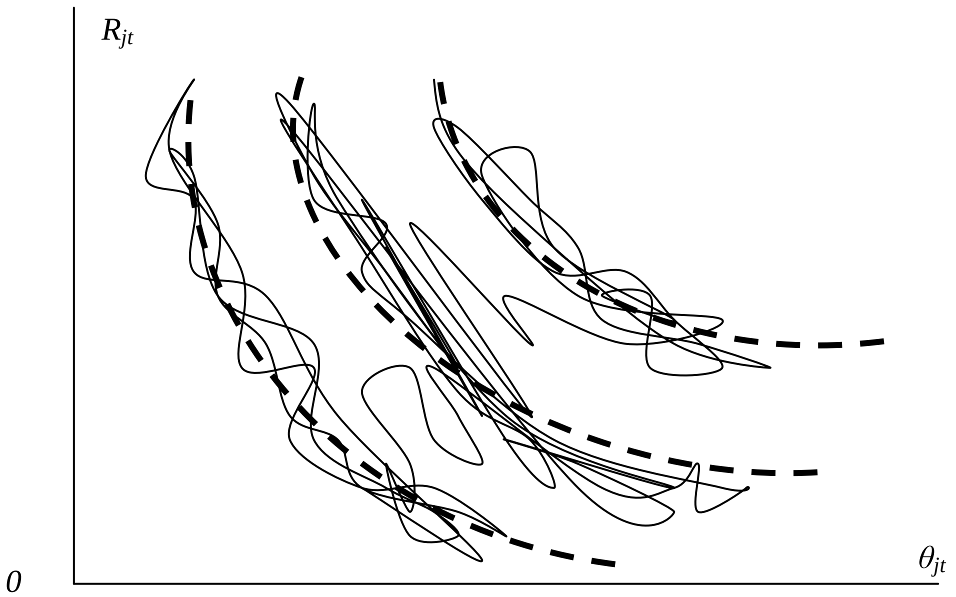

Рис. 7.4. Типичный фазовый портрет поведения полярных координат ценной бумаги на фондовом рынке

На фазовом портрете видно, что точки модуля и полярного угла ценных бумаг в определённый промежуток времени лежат на линии вогнутой кривой (на рис. 7.4 эти кривые изображены жирной пунктирной линией). Причём расположение точек на этих линиях, если рассматривать их в динамике, представляют собой движение вдоль выделенных линий так, как это характерно для качелей – вверх-вниз, вверх-вниз и т.п. Затем в ситуации, когда характер динамики рынка изменяется, точки фазового портрета «срыва-

[37] Светуньков С.Г., Корецкая Т.В. Сравнительное исследование классического индекса и индекса комплексной переменной на примере динамики акций ММВБ // Вестник Оренбургского государственного университета, 2009, №5 – С. 78 – 81.

ются» с этих устойчивых линий, как малые дети падают с качелей, и осуществляют переход на другой, расположенный более низко уровень, где в течение довольно длительного промежутка времени вновь располагаются на подобной же вогнутой линии, но находящейся на другом уровне и т.д. Поскольку Т.В.Корецкая рассматривала исключительно тот промежуток времени, который характеризуется глобальным экономическим кризисом, в результате чего несколько раз «падали» фондовые рынки, а деньги, вложенные финансовыми компаниями в ценные бумаги, выводились с этих рынков, то переход из одного состояния на фазовой плоскости в другое имеет понижательное направление. Глубоко убеждён в том, что как только появятся первые признаки оздоровления мировой экономики, и свободные денежные средства вновь появятся на фондовом рынке, на фазовых плоскостях ценных бумаг будет отмечен переход из одного фазового состояния в другое, но уже в повышательном направлении.

Для определённости линии фазового портрета мы назвали *К*-паттернами. Не последнюю роль в этом названии сыграли ассоциации с качелями, о которых было написано выше, хотя и фамилия одного из соавторов также нашла отражение в этом названии.

Графический анализ фазового состояния ценной бумаги, которое на графике изображается в виде *К*-паттерн, позволил выдвинуть гипотезу о параллельности друг другу *К*-паттерн одних и тех же ценных бумаг. Для проверки этой гипотезы Т.В.Корецкая предложила простой, но очень продуктивный подход – осуществить логарифмирование модуля и полярного угла ценных бумаг, после чего строить фазовую плоскость в логарифмах. В результате такого преобразования характеристик комплексных переменных и фазовой плоскости, были получены фазовые портреты в виде параллельных друг другу прямых линий (рис.7.5).

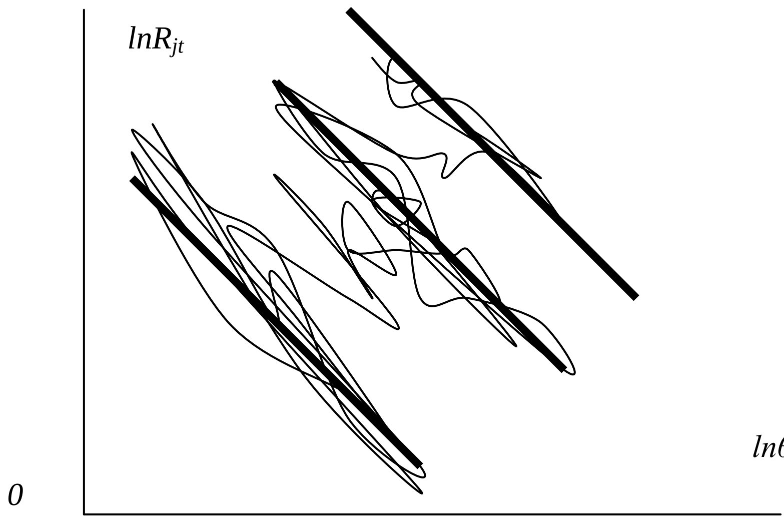

Рис. 7.5. Фазовый портрет ценной бумаги на логарифмической фазовой плоскости

Конечно, поскольку графические модели строятся по выборочным значениям показателей, то происходит это при воздействии множества случайных факторов, способствующих тому, что некоторые линии располагаются, слегка отклоняясь от общего параллельного расположения на фазовой плоскости всех линий. Но параллельность в среднем прямых линий на логарифмической фазовой плоскости при визуальном анализе десятков графиков ценных бумаг очевидна. Это же подтвердил и статистический анализ, когда угол наклона линейных моделей колебался вокруг некоторого среднего значения.

Решив задачу выявления взаимосвязи между ценой за единицу ценной бумаги и объёмом продаж этой бумаги на рынке в форме *К*-паттерны, необходимо дать экономическую интерпретацию полученным результатам.

Сама взаимосвязь между ценой и объёмом носит сложный нелинейный характер, ведь *К*-паттерна представляет собой нелинейную взаимозависимость модуля комплексной переменной (корень квадратный из суммы квадратов цены и объёма) и полярным углом этой переменной (арктангенсом соотношения цены к объёму). Сложность выявленной формы взаимозависимости не позволяет дать её однозначную интерпретацию типа такой: с ростом цены объём поведёт себя так-то, а не иначе. Такие явные выводы не напрашиваются. Напрашиваются выводы другого рода – *К*-паттерны, как совокупность точек фазовой плоскости, очевидно, имеют нечто общее, что и определяет их местоположение на плоскости таким образом, а не иначе. Но каковы эти самые причины, которые отражаются в одинаковом местоположении точек фазового портрета и почему наблюдаются фазовые переходы из одного состояния в другое? Верно ли предположение о том, что в периоды стабильной экономической конъюнктуры на фондовом рынке акции располагаются вдоль К-паттерн, а во времена нестабильности «срываются» с этих паттерн?

Для ответа на эти вопросы обратим внимание на процессы, происходящие на фондовом рынке. Для определённости рассмотрим рынок ценных бумаг ММВБ в 2008 году[38].

21 января 2008 года торги в США не проводились. Однако именно в этот день рухнули азиатские биржи, а вместе с ними и российский фондовый рынок. Многие участники рынка в условиях кризиса и нестабильности поспешили избавиться от ценных бумаг и вывести деньги из этого рынка - массовый исход денег и привёл к ощутимому снижению объёма денежных средств, обращающемуся на рынке. Такое состояние рынка ММВБ оставалось неизменным в течение трёх с половиной месяцев вплоть до 4 мая 2008 года. Если построить фазовый портрет любой из «голубых фишек» ММВБ, то можно убедиться в том, что этот период «стабильности» на фазовой плоскости этой ценной бумаги отражается *К*-паттерной. Конечно же, на рисунках имеются вполне очевидные отклонения от линии, вызванные случайными факторами, но этот разброс не является значительным. Период, который отразился *К*-паттерной, характеризуется одинаковым отношением участников

---

[38] Обзор выполнен Т.В.Корецкой

рынка к ценным бумагам, и главное – относительной стабильностью на рынке в целом.

Начиная с 5 мая, точки на фазовой плоскости начали постепенный переход в новое состояние. Точки стали располагаться ниже *К*-паттерны, постепенно опускаясь всё ниже и ниже. На эту понижательную тенденцию наложились события 18 августа 2008 года, которое ознаменовалось новым падением российских акций на фоне грузино-югоосетинского конфликта. В день встречи министров иностранных дел стран НАТО в Брюсселе 19 августа 2008 года, когда решался вопрос о том, как наказать Россию за затянувшуюся оккупацию Грузии, российский фондовый рынок обвалился, что на фазовой плоскости отражается хаотическим колебанием точек с их явным стремлением к новому уровню.

16 сентября 2008 года под воздействием банкротства американского инвестиционного банка «Леман Бразес», российский фондовый рынок продемонстрировал очередное падение. В этот период наблюдался активный отток средств с депозитов в России, и эта нестабильность демонстрируется стремлением и полярного угла, и модуля вниз.

На фондовом рынке России в понедельник 29 сентября 2008 года случился очередной обвал. Нервозность на рынке достигла высочайшей точки, что отразилось 6 октября 2008 года, когда закрытие торгов в пятницу в США показало, что принятие плана Полсона не сняло напряжение с американского фондового рынка и не развеяло сомнений в его эффективности. В результате утром в понедельник 6 октября 2008 года рынок вновь начал падать.

Состояние некоторой стабильности после падения на рынке наблюдалось, начиная с 29 октября 2008 года, когда произошло снижение учётной ставки ФРС США на 0,5%. Это толкнуло азиатские и европейские рынки вверх 30 октября 2008 года. Российский фондовый рынок также показал рост в четверг 30 октября 2008 года. Объём денежных средств, обращаемых на рынке, зафиксировался на некотором постоянном уровне. С этого дня до конца 2008 года точки на фазовой плоскости аккуратно ложились на новую *К*-паттерну.

Анализ и других фазовых портретов показывает, что те промежутки времени, для которых характерна стабильная конъюнктура рынка, характеризуются на фазовой плоскости тем, что все точки находятся на одной *К*-паттерне. Как только начинается изменение экономической конъюнктуры на фондовом рынке, точки фазового портрета начинают перемещаться в сторону другой *К*-паттерны, которая возникает в последующий период стабильности экономической конъюнктуры на фондовом рынке.

Вывод, который следует из сказанного, таков: *К*-паттерны описывают участки стабильной экономической конъюнктуры, а переход из одной *К*-паттерны в другую характеризует периоды изменения состояния экономической конъюнктуры фондового рынка.

Интересно, что акции «Лукойл» на РТС в начале 2000-х годов ложились на К-паттерны, а начиная с 2005 года, перестали демонстрировать такое поведение. А.М.Чуважлов, открывший это явление, предположил, что отсутствие К-паттерн в этот период вызван некоторыми политико-экономическими причинами, в том числе и приобретением акций американскими компаниями.

7.3. Математические модели К-паттерн

Линейность *К*-паттерн на логарифмической фазовой плоскости (рис. 7.5) предопределяет вид математической модели *К*-паттерны. Она в логарифмах имеет вид:

$$\ln R_{jt} = a_0 + a_1 \ln(arctg\theta_{jt}) . \quad (7.3.1)$$

Переходя от логарифмов к мультипликативной форме, получим:

$$R_{jt} = e^{a_0} arctg\theta_{jt}{}^{a_1} . \quad (7.3.2)$$

Если теперь в эту модель подставить вместо модуля и полярного угла комплексной переменной цену и объём, будет получено следующее уравнение *К*-паттерны:

$$\sqrt{p_{jt}^2 + q_{jt}^2} = e^{a_0} (artg \frac{p_{jt}}{q_{jt}})^{a_1} \quad (7.3.3)$$

Преобразовать эту модель в явно заданную зависимость цены от объёма или объёма от цены сложно. Но так как при заданном полярном угле вычисляется модуль комплексной переменной по формуле (7.3.2), то можно элементарно вычислить расчётные значения объёма продаж акций как действительную часть комплексной переменной с известным модулем и полярным углом:

$$q_{jt} = e^{a_0} arctg\theta_{jt}{}^{a_1} \cos\theta_{jt} \quad (7.3.4)$$

и цену единицы акции как мнимую часть комплексной переменной:

$$p_{jt} = e^{a_0} arctg\theta_{jt}{}^{a_1} \sin\theta_{jt} . \quad (7.3.5)$$

Впрочем, из свойств комплексных переменных следует такая очевидная зависимость между ценой за одну акцию и объёмом продаж:

$$p_{jt} = q_{jt} tg\theta_{jt} \,. \qquad (7.3.6)$$

Общее представление о зависимости между ценой за единицу акции и объёмом продаж, которое следует из такого её представления, демонстрируется на рис. 7.6, на котором Т.В.Корецкая нанесла выявленные для ОАО «Аэрофлот» *К*-паттерны.

Теперь можно предложить такой алгоритм моделирования рынка ценных бумаг. Если есть основания считать полярный угол равным некоторой заданной (например, прогнозируемой) величине, то в условиях стабильной конъюнктуры, когда наблюдаются *К*-паттерны, можно вычислить по (7.3.4) объём продаж, а по (7.3.5) – цену за единицу акций.

Для практических целей вполне приемлемой является модель (7.3.1) или её аналог (7.3.2), поскольку коэффициенты этой модели легко определяются на статистических данных с помощью любого метода статистической оценки, например, с помощью МНК.

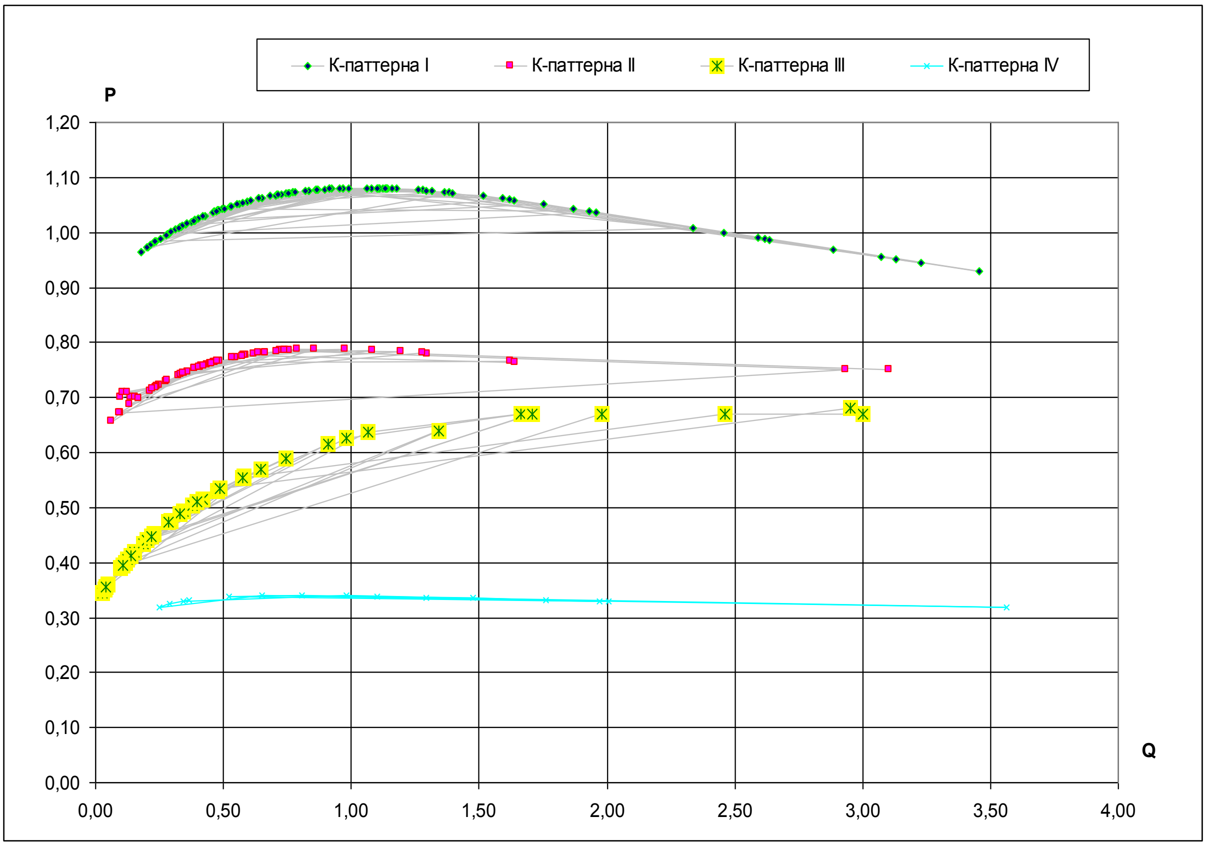

Рис. 7.6. *К*-паттерны для акций ОАО «Аэрофлот»

По данным об изменении котировок акций ОАО «Аэрофлот» на ММВБ за 2008 год Т.В.Корецкая нашла с помощью МНК уравнения нескольких *К*-паттерн. Рассмотрим две из них. Первая *К*-паттерна соответствует относительно стабильному периоду времени от 21 января до 4 мая 2008 г., а вторая

К-паттерна соответствует промежутку времени с 29 октября 2008 года до конца этого года.

Уравнение модели (7.3.2) для первой *К*-паттерны имеет вид:

$$\ln \hat{R}_t = 0,2366 - 0,8261 \ln \theta_t . \qquad (7.3.7)$$

Коэффициент детерминации модели с фактическими данными составляет 0,955.

Уравнение этой же модели для второй *К*-паттерны

$$\ln \hat{R}_t = -0,9945 - 0,9396 \ln \theta_t . \qquad (7.3.8)$$

Эта модель также хорошо описывает исходные данные, поскольку коэффициент детерминации этой модели с фактическими данными составляет 0,9613.

Легко заметить, что свободный член уменьшился и стал отрицательным, что означает сдвиг К-паттерны вниз. Коэффициент пропорциональности модели также изменился, что вызвано действием случайных факторов, но свой знак и масштаб не изменил.

Для оценки качества уравнения регрессии Т.В.Корецкая использовала *F*–критерий Фишера. Расчёты *F*-критерия Фишера и других статистических характеристик моделей двух *К*-паттерн приведены в табл. 7.4.

Табл. 7.4.

Статистические характеристики регрессионных моделей *К*-паттерн

К-паттерна I - период с 21.01.08 по 4.05.08
Индекс детерминации $R^2_{гф}$ =0, 955; $F_{факт}$ =2440; $F_{табл}(\alpha = 0,05)$ = 3,94
t_b = -49,40; t_a = 2,08; t_r = 49,40
m_b = 0,016; m_a = 0,114; m_r = 0,020; Δ_b = 0,03; Δ_a = 0,23
$V_{a\ min}$ = 0,0088; $V_{a\ max}$ = 0,4644; $V_{b\ min}$ = -0,8087; $V_{b\ max}$ = -0,7458
К-паттерна II - период с 29.10.2008 по 31.12.08
Индекс детерминации $R^2_{гф}$ = 0,9613 $F_{факт}$ = 322,92; $F_{табл}(\alpha = 0,05)$ = 4,84
t_b = -16,54; t_a = -2,42; t_r = 16,25
m_b = 0,057; m_a = 0,411; m_r = 0,060; Δ_b = 0,11; Δ_a = 0,82
$V_{a\ min}$ = -1,8164; $V_{a\ max}$ = -0,1726; $V_{b\ min}$ = -1,0533; $V_{b\ max}$ = -0,8260

Так как для всех *К-паттерн* $F_{факт} > F_{табл.}$, поэтому делается вывод о существенности связи и гипотеза H_0 отклоняется. Уравнения регрессии всех *К-паттерн* являются статистически значимыми.

Как можно использовать на практике вычисленные с помощью МНК уравнения *К*-паттерн? Пусть, например, в декабре 2008 года нам известно о том, что ситуация на рынке стабильна и мы знаем о намерении одного из игроков реализовать крупный пакет акций Q_{t+1}=100000 ОАО «Аэрофлот». В нашем распоряжении имеется уравнение *К*-паттерны, коэффициенты которой вычислены с помощью МНК (7.3.8). Приведя этот объём к базовому значению, получим, например, число q_{t+1}=1,28.

Для принятия правильного решения нам нужно спрогнозировать возможную величину цены за акцию ОАО «Аэрофлот», которая сложится в результате торгов при таком объёме акций, выставленных на продажу. Конъюнктура рынка не меняется, следовательно, уравнение *К*-паттерны остаётся неизменным, но все точки *К*-паттерны характеризуются изменением полярного угла и модуля. Поэтому алгоритм вычисления (7.3.4) – (7.3.5) в данном случае не может быть применён.

Для решения задачи необходимо использовать математическое уравнение *К*-паттерны. Подставив величину объёма акций, выставляемых на продажу, в уравнение модели *К*-паттерны, получим:

$$\sqrt{p_{t+1}^2 + 1,28^2} = e^{-0,9945}(artg\,\frac{p_{t+1}}{1,28})^{-0,9396} = 2,703(artg\,\frac{p_{t+1}}{1,28})^{-0,9396}$$

Из полученного уравнения непосредственно вывести значение прогнозируемой цены и рассчитать её невозможно, но это не является препятствием для решения поставленной задачи, поскольку уравнение:

$$\sqrt{p_{t+1}^2 + 1,28^2} - 2,703(artg\,\frac{p_{t+1}}{1,28})^{-0,9396} = 0$$

относительно единственного неизвестного p_{t+1} можно решить с помощью одного из численных методов.

Поскольку такая задача не ставилась, а использовалась только в демонстративных целях, решение её здесь не приводится.

Подводя итог всем результатам, изложенным в этой главе, следует отметить, что комплексный индекс (7.1.10), используемый наряду с другими индексами, позволяет исследователю получить дополнительную информацию о ситуации на фондовом рынке. Также новую информацию о фондовом рынке можно получить, вычисляя комплексный индекс (7.1.24) и анализируя его основные характеристики.

Выявление *К*-паттерны и обоснование формы её математической модели (7.3.1) позволяет развить теоретические представления о фондовом рынке, поскольку она представляет собой математическую модель взаимозависимости между ценой за единицу ценной бумаги, котирующейся на акции, и объёмом продаж этой акции, взаимозависимости, имеющей очень сложный характер и с помощью моделей действительных переменных не выявляемой. Общее представление об этой зависимости даёт рис. 7.6.

Особый интерес, конечно, представляет процесс перехода от одной *К*-паттерны в другую. Поскольку *К*-паттерны отражают периоды стабильной экономической конъюнктуры рынков, то прогнозирование наступления нестабильности – переход от одного состояния конъюнктуры в другое, представляет основной интерес. Возможно, что совмещая построения *К*-паттерн с циклами конъюнктуры и удастся получить искомые результаты, но это – задача будущих периодов. Важно то, что удалось эти *К*-паттерны выявить и показать, что они соответствуют периодам стабильности конъюнктуры рынка.

Глава восьмая. Моделирование и прогнозирование экономической динамики комплекснозначными моделями

8.1. Модель И.С.Светунькова для краткосрочного прогнозирования

Михаил Жванецкий как-то изрёк замечательную фразу: «ремонт квартиры невозможно закончить, его можно только остановить»! Эта фраза вспоминается каждый раз, когда думается, что монография по основам комплекснозначной экономики завершена. Нет! Появляются всё новые и новые научные результаты, открывающие новые научные горизонты…

Одним из таких замечательных результатов является модель краткосрочного прогнозирования И.С.Светунькова, в которой наилучшим образом переплелись достоинства модели краткосрочного прогнозирования Брауна и свойств комплекснозначных моделей. Суть этой «модели с коррекцией», как её назвал автор, в следующем[39].

Задача прогнозирования социально-экономической динамики на краткосрочную перспективу в 80% случаев практического применения решается с помощью метода Брауна (также известного как «метод экспоненциального сглаживания»). Идея метода заключается в том, что прогнозное значение определяется средняя взвешенная предыдущего ряда, которая в компактном виде запишется так:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)\hat{Y}_t \,. \qquad (8.1.1)$$

Свойства модели, сделавшей её весьма популярной среди прогнозистов, видны, если осуществить такую группировку:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha\left(Y_t - \hat{Y}_t\right). \qquad (8.1.2)$$

Из этой формы записи модели Брауна видно, что прогнозное значение вычисляется через предыдущее спрогнозированное значение, но скорректированное на величину отклонения факта от прогноза.

Точность модели Брауна для задач прогнозирования определяется значениями коэффициента α, который получил название «постоянная сглаживания».

Значение постоянной сглаживания α лежит в пределах:

$$0 < \alpha < 2\,. \qquad (8.1.3)$$

Поскольку множество значений модели Брауна, лежащее в пределах

---

[39] Светуньков И.С. Самообучающаяся модель краткосрочного прогнозирования социально-экономической динамики // Модели оценки , анализа и прогнозирования социально-экономических систем: Монография / Под ред. Т.С.Клебановой, Н.А.Кизма – Ч.: ФЛП Павленко А.Г., ИД «ИНЖЭК», 2010. – с. 11 – 33.

$$1 \le \alpha < 2 \tag{8.1.4}$$

было выявлено и исследовано ещё в 1997 году[40], и названо «запредельным множеством метода Брауна» на его свойствах в этой работе подробно останавливаться не будем. Скажем лишь, что ситуации с запредельными случаями метода Брауна встречаются в современной экономике довольно часто, особенно, когда исследователь сталкивается с задачей прогнозирования необратимых процессов.

И.С.Светуньков, развивая логику метода Брауна, предложил, используя особенности комплекснозначной экономики, прогнозировать одновременно два параметра: значение показателя Y_t и его отклонение от фактического значения ε_t:

$$\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t.$$

Для этого сам прогнозируемый показатель и отклонение от него можно представить в виде единой комплексной переменной:

$$Y_t + i\varepsilon_t, \tag{8.1.5}$$

которая и рассматривается как величина, краткосрочный прогноз которой осуществляется методом Брауна.

Поскольку и показатель, и отклонение от него имеют одинаковую размерность, и отражают разные стороны одного и того же процесса, то такая переменная имеет право на существование. Рассматривать показатель и отклонение от него как одну комплексную переменную предложил ещё в 2006 году проф. Г.В.Савинов[41]. Обозначим расчётное прогнозное значение этой комплексной переменной как

$$\hat{Y}_t + i\hat{\varepsilon}_t.$$

Тогда по аналогии с моделью Брауна (8.1.1) можно получить следующую прогнозную модель:

$$\hat{Y}_{t+1} + i\hat{\varepsilon}_{t+1} = (\alpha_0 + i\alpha_1)(Y_t + i\varepsilon_t) + ((1+i) - (\alpha_0 + i\alpha_1))(\hat{Y}_t + i\hat{\varepsilon}_t), \tag{8.1.6}$$

В отличие от модели Брауна в рассматриваемом случае используется комплексная постоянная сглаживания:

---

[40] Светуньков С.Г. Запредельные случаи метода Брауна // Экономические науки: Ученые записки УлГУ. Ульяновск: Изд-во СВНЦ,1997. Вып.2. Часть 1.

[41] Савинов Г.В., Светуньков С. Г. Комплексные переменные в экономическом анализе и моделировании // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2006, № 4.

$$\alpha_0 + i\alpha_1 . \qquad (8.1.7)$$

Но пределы изменения этой постоянной сглаживания не обязательно должны совпасть с теми, которые были определены для исходной модели Брауна (8.1.3). Исследование этих границ будет осуществлено позже, а теперь самое время изучить свойства самой модели краткосрочного прогнозирования И.Светунькова.

С учётом свойств комплексных переменных, выделяя действительную и мнимую части, комплекснозначная модель (8.1.6) может быть сведена к следующей системе действительных уравнений:

$$\begin{cases} \hat{Y}_{t+1} = \left(\alpha_0 Y_t + (1-\alpha_0)\hat{Y}_t\right) - \left(\alpha_1 \varepsilon_t + (1-\alpha_1)\hat{\varepsilon}_t\right) = \left(\hat{Y}_t^0\right) - \left(\hat{\varepsilon}_t^1\right) \\ \hat{\varepsilon}_{t+1} = \left(\alpha_0 \varepsilon_t + (1-\alpha_0)\hat{\varepsilon}_t\right) + \left(\alpha_1 Y_t + (1-\alpha_1)\hat{Y}_t\right) = \left(\hat{\varepsilon}_t^0\right) + \left(\hat{Y}_t^1\right) \end{cases}. \qquad (8.1.8)$$

Из (8.1.8) видно, что прогнозное значение $\hat{Y}_{t+1}$ определяется как некоторое спрогнозированное значение $\hat{Y}_t^0$, найденное методом Брауна, скорректированное на некоторую также спрогнозированную методом Брауна величину $\hat{\varepsilon}_t^1$. В свою очередь прогнозное значение корректировочного показателя $\hat{\varepsilon}_{t+1}$ определяется также двумя составляющими, найденными тем же самым методом Брауна, только путём их сложения: спрогнозированный корректировочный показатель $\hat{\varepsilon}_t^0$ и прогнозное значение $\hat{Y}_t^1$. Здесь верхние индексы «*0*» и «*1*» указывают на то, какое значение α из двух используется при расчёте данных значений (α_0 или α_1).

Очевидно, что в модели (8.1.6) прогнозные значения формируются через предыдущие фактические с некоторыми комплексными весами, заданными по алгоритму, похожему на экспоненциальное сглаживание в методе Брауна, но несколько более сложному. Представим в формуле (8.1.6) расчётное значение $\hat{Y}_t + i\hat{\varepsilon}_t$ через предыдущее фактическое $Y_{t-1} + i\varepsilon_{t-1}$:

$$\hat{Y}_{t+1} + i\hat{\varepsilon}_{t+1} = (\alpha_0 + i\alpha_1)(Y_t + i\varepsilon_t) + (\alpha_0 + i\alpha_1)[(1-\alpha_0) + i(1-\alpha_1)]((Y_{t-1} + i\varepsilon_{t-2}) + \ldots$$

Тогда понятно, что и в этом случае имеется процесс вычисления средней взвешенной, но с использованием комплексных чисел и переменных. Комплексные переменные ряда (8.1.5) умножаются на весовые коэффициенты, которые в данном случае являются комплексными. Ряд этих комплексных весов из выведенного выше равенства можно представить так:

$$(\alpha_0 + i\alpha_1), (\alpha_0 + i\alpha_1)[(1-\alpha_0) + i(1-\alpha_1)], (\alpha_0 + i\alpha_1)[(1-\alpha_0) + i(1-\alpha_1)]^2, \ldots , \qquad (8.1.9)$$

который есть ни что иное, как ряд геометрической прогрессии комплексных чисел.

Получив этот ряд, мы можем теперь определить пределы изменения комплексной постоянной сглаживания (8.1.7). По определению этот ряд должен сходиться, поскольку иначе более старые наблюдения будут иметь значительно больший вес, чем новые, что будет приводить к неточности прогноза по модели.

Это означает, что для комплексного ряда весов (8.1.9) должно выполняться равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha_0+i\alpha_1\right)[(1-\alpha_0)+i(1-\alpha_1)]^n=0. \qquad (8.1.10)$$

При постоянстве значений комплексной постоянной сглаживания и выполнении очевидно существующего неравенства:

$$\left(\alpha_0+i\alpha_1\right)\neq 0,$$

равенство (8.1.10), как и для ряда геометрической прогрессии действительных чисел, сходится к некоторому числу, когда выполняется условие:

$$\sqrt{\left(1-\alpha_0\right)^2+\left(1-\alpha_1\right)^2}<1. \qquad (8.1.11)$$

Неравенство (8.1.11) на плоскости коэффициентов α_0 и α_1 представляет собой круг, с центром в точке (1;1) и единичным радиусом (рис.8.1). Если значение комплексной постоянной сглаживания оказывается внутри круга, то ряд (8.1.9) сходится к комплексному числу. Если значение оказывается на границе окружности или выходит за её пределы, то ряд (8.1.9) расходится.

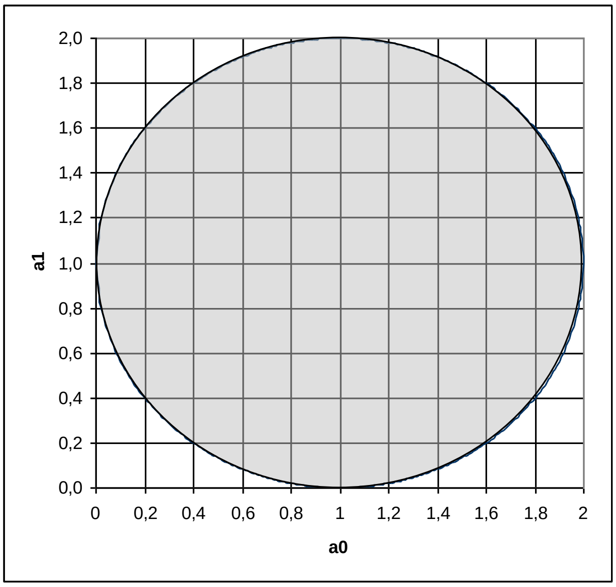

Рис. 8.1. Область определения комплексной постоянной сглаживания

Из (8.1.11) путём элементарных преобразований можно получить пределы, в которых должен лежать коэффициент α_1 для того, чтобы ряд сошёлся:

$$1-\sqrt{1-(1-\alpha_0)^2} < \alpha_1 < 1+\sqrt{1-(1-\alpha_0)^2}\,.$$

В свою очередь, очевидно, что это условие выполнимо только тогда, когда подкоренное выражение положительно (ситуацию, в которой α_1 может быть комплексным числом, мы не рассматриваем):

$$1-(1-\alpha_0)^2 > 0, \qquad (8.1.12)$$

Из ограничения (8.1.12) легко выводятся пределы, в которых в таком случае должны лежать коэффициенты α_0 и α_1:

$$0 < \alpha_0 < 2,\ 1-\sqrt{1-(1-\alpha_0)^2} < \alpha_1 < 1+\sqrt{1-(1-\alpha_0)^2} \qquad (8.1.13)$$

Итак, мы получили границы, в которых должны лежать действительная и мнимая части комплексного коэффициента сглаживания для того, чтобы ряд комплексных весов (8.1.9) сходился к некоторому числу. Светуньков И.С. также вычислил, к какому именно числу сходится ряд этих весов. Оно вычисляется по следующей формуле:

$$S = \frac{(\alpha_0^2 - \alpha_1 + \alpha_1^2) + i(\alpha_0)}{\alpha_0^2 + (1-\alpha_1)^2} \qquad (8.1.14)$$

Можно заметить, что в числе (8.1.14), действительная часть может быть представлена любым действительным числом (как положительным, так и отрицательным), а мнимая – только любым положительным действительным числом. Получается, что в модели (8.1.6) ряд весов (8.1.9) имеет более сложный смысл, нежели в модели Брауна, в которой для существования модели ряд весов должен обязательно сходиться к 1.

Специфические свойства модели (8.1.6) проявляются ещё и в том, что ряд весов (8.1.9) сходится к числу (8.1.14) с разной скоростью, в зависимости от значения постоянной сглаживания. Исследования показали, что, чем ближе значение комплексной постоянной сглаживания к краю круга (8.1.11), тем медленней ряд сходится. Своеобразной характеристикой скорости схождения в таком случае может выступать модуль числа:

$$v = \sqrt{(1-\alpha_0)^2 + (1-\alpha_1)^2} \qquad (8.1.15)$$

По условию (8.1.11) v лежит в пределах от 0 до 1. Причём, чем ближе v к 1, тем более инертной получается модель, то есть на прогноз оказывают большее влияние устаревшие данные, а чем v ближе к 0, тем в меньшей степени в формировании прогноза участвуют старые данные, модель становится более адаптивной.

В нашем распоряжении имеются данные по величине генерации электроэнергии ветровыми установками одного из штатов США. Этот временной ряд состоит из двадцати тысяч наблюдений, снятых за каждые пол часа. Поскольку эти данные предназначены исключительно для служебного пользования, по договорённости с американской стороной здесь не приводятся даже выборочные значения этого ряда, а демонстрируются только результаты вычислений.

Если для этого ряда использовать непосредственно метод Брауна, то для него оптимальное значение α получилось равным *0,28*, что говорит о том, что модель медленно адаптируется к поступающей информации. Средняя относительная ошибка аппроксимации в этом случае составила *7,54%*, коэффициент детерминации *0,1485*, коэффициент соответствия 94,22%. Эти показатели свидетельствуют о том, что модель не очень хорошо описывает и прогнозирует ряд ветрогенерации.

Применяя к этому же ряду модель И.Светунькова (8.1.6), можно также найти оптимальное значение комплексного коэффициента сглаживания, которое равно

$$\alpha_0 + i\alpha_1 = 0{,}59 + 1{,}00i\,.$$

Средняя относительная ошибка аппроксимации составила *5,06%*, коэффициент детерминации равен *0,6051*, а коэффициент соответствия *95,68%*. По этим показателям видно, что результаты прогноза методом коррекции получаются более точными, нежели с использованием метода Брауна или его модификаций.

Стоит обратить внимание на то, что модель И.Светунькова отличается от всех существующих моделей краткосрочного прогнозирования тем, что улавливает тенденции в рядах данных и позволяет описывать их. Модель с корректировкой «предугадывает» динамику ряда, в то время как модель Брауна всё время «запаздывает».

И.С.Светуньковым проведён сравнительный анализ предложенной модели с различными модификациями модели Брауна (метод Хольта, метод Хольта с модификацией Муира и т.п) и показал, что в ряде случаев его модель даёт значительно более точные результаты, нежели эти модификации. Это свидетельствует о том, что модель с коррекцией И.Светунькова может быть включена в арсенал инструмента прогнозирования социально-экономической динамики наравне с существующими моделями.

В завершение этого параграфа следует отметить, что дополнительные исследования, проведённые Е.Цедяковой, показали, что модель с коррекцией даёт лучшие прогнозы в рядах данных, имеющих хаотическую динамику, для которых оптимальный коэффициент сглаживания по модели Брауна получается близок к *0*.

8.2. Комплекснозначные авторегрессионные модели

Если применение в модели Брауна комплексных переменных привело к таким интересным результатам, то имеет смысл рассмотреть и иные прогнозные модели, к которым возможно применение комплексных переменных.

Комплекснозначные производственный функции, рассмотренные в пятой и шестой главах монографии, вполне могут быть использованы для этих целей как прогнозные модели – линейные и нелинейные. Свойства моделей были изучены ранее, и поэтому повторяться здесь не имеет смысла.

Более интересными с этих позиций представляются модели авторегрессии, если рассматривать авторегрессию комплексной переменной.

Модель авторегрессии первого порядка комплексной переменной может быть записана в таком виде:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(y_{rt-1} + iy_{it-1}), \quad t = 1, 2, 3, \ldots . \tag{8.2.1}$$

Здесь уместно напомнить, что модель авторегрессии первого порядка действительно переменной, записываемая так:

$$y_t = ay_{t-1}, \tag{8.2.2}$$

в конечном итоге представляет собой функцию вида:

$$y_t = a^t y_0, \tag{8.2.3}$$

и динамика изменения во времени этой показательной функции полностью определяется основанием функции – коэффициентом a.

Легко показать что аналогично и комплекснозначная модель авторегрессии (8.2.1) может быть представлена как степенная функция:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)^t (y_{r0} + iy_{i0}) . \tag{8.2.4}$$

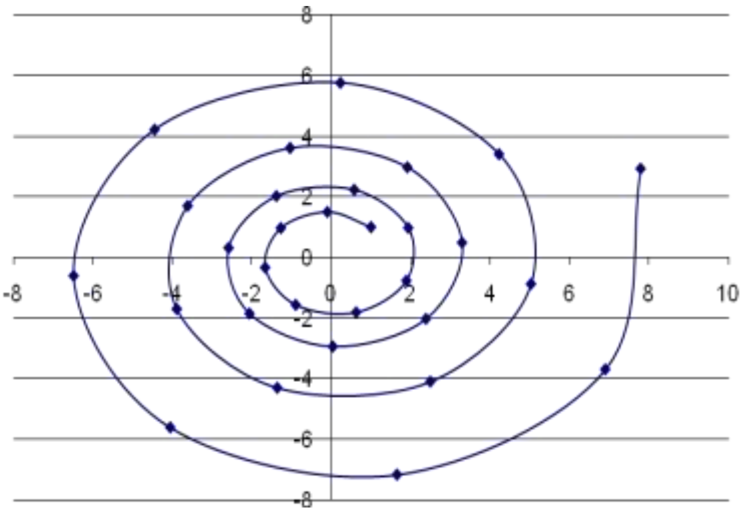

Рис. 8.2. Комплекснозначная авторегрессионная модель при основании степени, модуль которой больше единицы (8.2.5)

Степенная комплекснозначная функция, как известно, является периодической и она расходится в виде спирали с ростом показателя степени, если модуль основания больше единицы, и сходится по спирали к нулю, если модуль комплексного числа в основании степени меньше единицы.

На рис. 8.2 приведён график изменения авторегрессионной функции:

$$y_{rt+1} + iy_{it+1} = (0,7 + i0,8)(y_{ro} + iy_{i0}), \quad y_{ro} = 1, y_{i0} = 1 . \qquad (8.2.5)$$

Модуль комплексного коэффициента авторегрессии равен 1,063 >1. Поэтому на графике видно, как моделируемый с помощью авторегрессии показатель из начальной точки на комплексной плоскости с координатами (1,1) расходится по спирали. Очевидно, что можно задавать любую начальную точку и характер моделируемой зависимости не изменится – будет меняться только место расположения начальной точки.

Поскольку в экономике фазовые плоскости типа той, которая изображена на рис. 8.2, практически не применяются, а используют, в основном, графики изменения показателей во времени, то на рис. 8.3 показано изменение во времени действительной и мнимой части модели авторегрессии (8.2.5). Их динамика имеет колебательный расходящийся во времени характер.

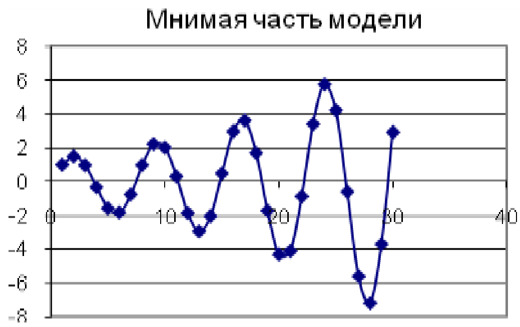

Рис. 8.3. Изменение во времени вещественной и мнимой частей комплекснозначной авторегрессионной модели (8.2.5)

Если в модели комплекснозначной авторегрессии комплексный коэффициент авторегрессии имеет модуль, меньший, чем единица, модель будет генерировать сходящийся к нулевой точке по спирали процесс. Так, для модели:

$$y_{rt} + iy_{it} = (0,7 + i0,6)(y_{rt-1} + iy_{it-1}), \quad y_{ro} = 1, y_{i0} = 1. \tag{8.2.6}$$

модуль комплексного коэффициента пропорциональности равен 0,922 <1.

Модель авторегрессии генерирует ряд, сходящийся к нулю из начальной точки с координатами (1,1) на комплексной плоскости (рис. 8.4).

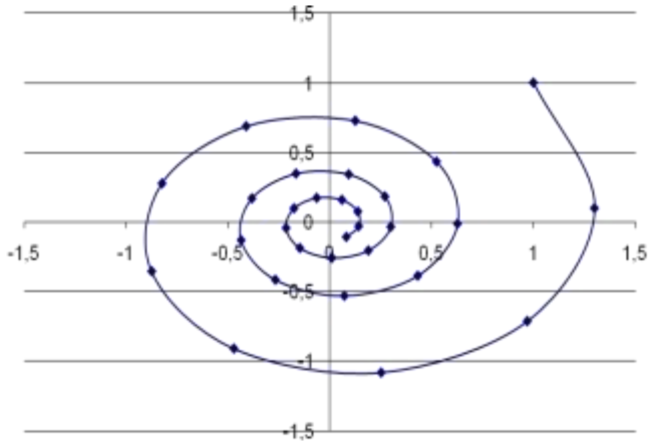

Рис. 8.4. Комплекснозначная авторегрессионная модель при основании степени, модуль которой больше единицы

Изменение во времени действительной и мнимой части модели авторегрессии (8.2.6) будет иметь колебательный затухающий характер, со временем обе части стремятся к нулю.

Более сложный характер имеет модель авторегрессии второго и больших порядков. Рассмотрим для определённости модель авторегрессии второго порядка действительной переменной:

$$y_t = ay_{t-2}, \quad t = 2,3,4,... \qquad (8.2.7)$$

При $t=2$ легко заметить, что: $y_2 = ay_0$. При $t=3$ вычисляется $y_3 = ay_1$. Видно, что эти два расчётных значения не зависят друг от друга. Продолжая дальше, увидим, что при $t=4$ $y_4 = a y_2^{2}$, при $t=5$ вычисляется $y_5 = ay_3 = a^2 y_1$.

И вообще для модели авторегрессии второго порядка (8.2.7):

$y_t = a^{\frac{t}{2}} y_0$, если t – чётное, и

$y_t = a^{\frac{t-1}{2}} y_1$, если t – нечётное. (8.2.8)

Тогда, если коэффициент авторегрессии будет по модулю больше единицы, то модель генерирует колебательный процесс с возрастающей амплитудой колебаний, как это изображено на рис. 8.5, а если он будет по модулю меньше единицы, то модель будет генерировать колебательный процесс с затуханием колебаний.

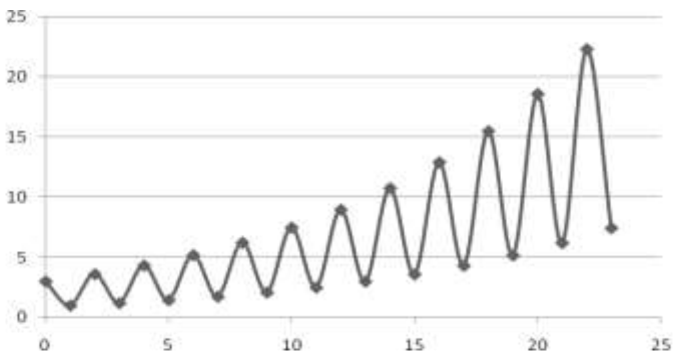

Рис. 8.5. Модель авторегрессии второго порядка $y_t = 1{,}3 y_{t-2}, \quad y_0 = 3, y_1 = 1$

Характер моделируемого процесса при авторегрессии второго порядка определяется значением коэффициента авторегрессии и двумя первыми значениями моделируемого ряда.

Точно также и модель авторегрессии второго порядка для комплекснозначного ряда:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(y_{rt-2} + iy_{it-2}), \quad t = 2,3,.... \qquad (8.2.9)$$

будет иметь более сложную, чем у модели авторегрессии первого порядка динамику, характер которой определяется и значениями комплексного коэффициента регрессии, и двумя первыми значениями комплекснозначного ряда.

В качестве примера приведём динамику комплекснозначной модели авторегрессии второго порядка следующего вида:

$$y_{rt}+iy_{it}=(0,7+i0,6)(y_{rt-2}+iy_{it-2}),\quad y_{ro}=1, y_{i0}=1,\quad y_{r1}=0,4, y_{i1}=2,1\,. \qquad (8.2.10)$$

Фазовый портрет этой модели авторегрессии приведён на рис. 8.6.

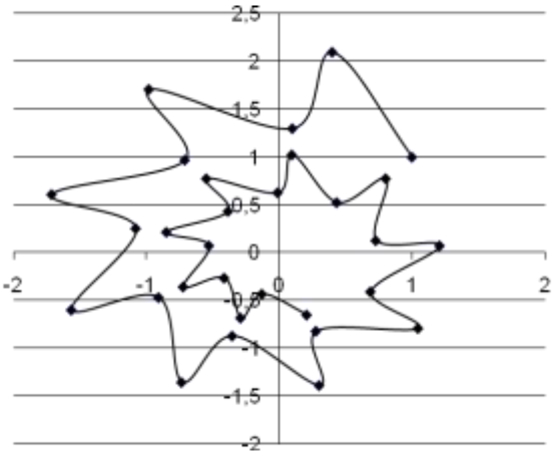

Рис. 8.6. Комплекснозначная авторегрессионная модель второго порядка (8.2.10)

Поскольку модель коэффициента авторегрессии меньше единицы, то модель сходится к нулю. Если же модуль будет больше единицы, то модель будет расходиться на комплексной плоскости.

На рис. 8.7 приведен график изменения во времени действительной и мнимой частей этой комплекснозначной модели авторегрессии второго порядка.

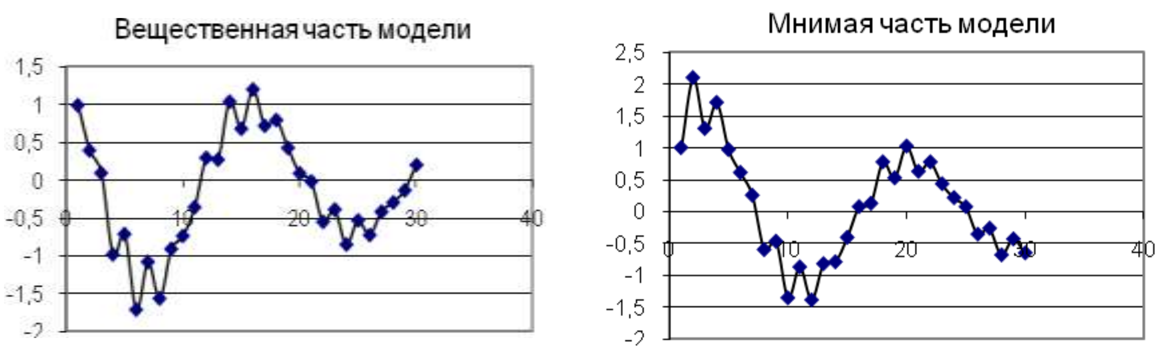

Рис. 8.7. Действительная и мнимая части комплекснозначной авторегрессионной модели второго порядка (8.2.10)

Из этого рисунка видно, что обе части модели демонстрируют затухающий во времени процесс со сложной структурой колебаний. Очевидно, что период колебаний у них один и тот же, и они сдвинуты друг относительно друга на один и тот же лаг.

Модели авторегрессии более сложного порядка будут генерировать более сложные варианты динамики.

В качестве только одного примера, демонстрирующего такой вариант динамики, приведём модель авторегрессии с распределёнными лагами – на одно и два наблюдения:

$$\begin{aligned} &y_{rt} + iy_{it} = (-0,3 - i0,4)(y_{rt-1} + iy_{it-1}) + (0,6 - i0,8)(y_{rt-2} + iy_{it-2}), \\ &y_{ro} = 1, y_{i0} = 1, \quad y_{r1} = 1,2, y_{i1} = 0,8 \end{aligned} \tag{8.2.11}$$

Динамика изменения действительной и мнимой частей этих показателей приведена на графике рис.8.8.

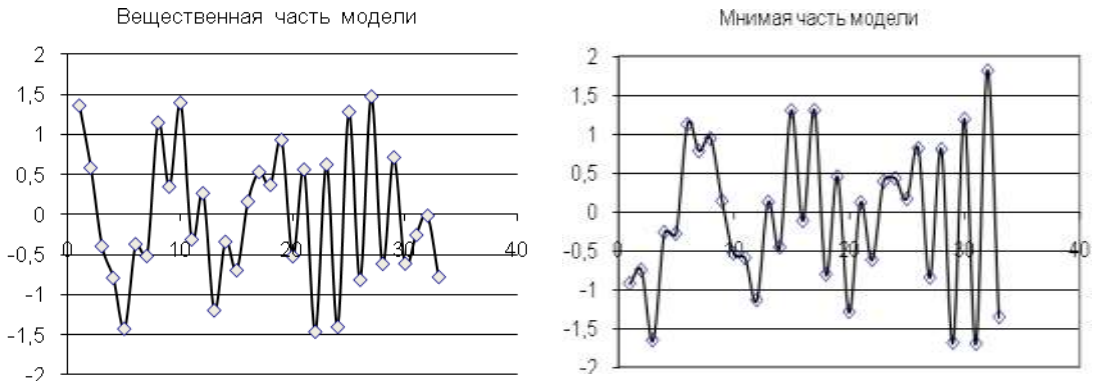

Рис. 8.8. Действительная и мнимая части комплекснозначной авторегрессионной модели с распределёнными лагами (8.2.11)

Приведённые графики комплекснозначных авторегрессионных моделей показывают, что они могут применяться при моделировании многих процессов с наличием сезонной составляющей или, например, на фондовых рынках. Это означает, что комплекснозначные авторегрессионные модели могут занять достойное место в ряду моделей прогнозирования социально-экономической динамики. Нахождение коэффициентов таких моделей по имеющимся статистическим данным следует осуществлять с помощью МНК, суть которого применительно к комплекснозначным моделям изложена в третьей главе монографии.

8.3. Комплекснозначные модели действительного аргумента

В четвёртой главе монографии рассматривались модели производственной функции комплексного аргумента. Если говорить о подобных моделях в более широком плане, то это просто модели зависимости некоторого действительного показателя от комплексного аргумента. Они могут использоваться не только в случаях описания производственных процессов, но и для моделирования иных экономических процессов.

Эта модель в общем виде может быть записана так:

$$y = f(x_r + ix_i)\,. \tag{8.3.1}$$

Но особенностью моделей комплексных переменных является то, что выполняется и другое равенство, обратное данному:

$$f(x_r + ix_i) = y \leftrightarrow x_r + ix_i = F(y)\,, \tag{8.3.2}$$

где – $F(y)$ некоторая комплекснозначная функция.

В данном параграфе мы рассмотрим подобные модели, которые вполне могут быть использованы в экономике.

Например, поведение спроса, отражающееся в том, какое количество товара *Q* готов купить потребитель, если цена этого товара равна *P*, определяется множеством факторов, но главный экономический фактор – это доход *C*. Получается, что пара взаимосвязанных показателей – объём и цена, - определяются значением одной переменной – доходом потребителя. Это, в логике данного параграфа может быть записано так:

$$Q + iP = F(C)\,. \tag{8.3.3}$$

Поскольку самым простым вариантом комплекснозначных моделей действительного аргумента выступают модели комплексного тренда, когда в виде действительного аргумента выступает время, рассмотрим в качестве примера в данном параграфе именно такие модели, понимая, что в случае необходимости вместо времени можно использовать любой другой аргумент.

Необходимо отметить, что в разделе «Операционное исчисление» теории функций комплексного переменного[42] рассматривается преобразование Лапласа для функции *f(t)*, где *t≥0*. Модификация этого преобразования, известная как z-преобразование Лорана, использовалась проф. В.К.Семёнычевым для прогнозирования экономики[43]. Здесь не будет использоваться этот аппарат теории, а будет рассматриваться исключительно правило преобразования (8.3.2).

В монографии по умолчанию предполагается дискретное время, но поскольку в данном параграфе оно выступает как аргумент функции, следует это особо оговорить.

Линейная комплекснозначная модель действительного аргумента типа:

---

[42] Теория функций комплексного переменного / М.И.Шабунин, Ю.В.Сидоров. – М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. - С. 238

[43] Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1. / В.К.Семёнычев, Е.В.Семёнычев. – Самара: Изд-во Самар. Гос. аэрокосм. Ун-та, 2006. – С. 101 – 111.

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)t \qquad (8.3.4)$$

Не представляет никакого интереса, поскольку выражает банальную линейную зависимость каждого показателя от времени.

Больший интерес представляют нелинейные модели, которые будем рассматривать в том же порядке, что и нелинейные модели комплексного аргумента четвёртой главы.

Первой из них стоит степенная функция. Применительно к рассматриваемому классу моделей она будет иметь вид:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)t^{(b_0+ib_1)} \ . \qquad (8.3.5)$$

Поскольку значение коэффициента пропорциональности заключается в том, чтобы отмасштабировать модель, без умаления общности выводов будем считать, что он равен действительной единице. Тогда (8.3.5) может быть представлена в удобной для анализа форме:

$$y_{rt} + iy_{it} = t^{b_0} e^{ib_1 \ln t} \ . \qquad (8.3.6)$$

Действительная часть этой модели может быть записана так:

$$y_{rt} = t^{b_0} \cos(b_1 \ln t) \, , \qquad (8.3.7)$$

а мнимая:

$$y_{it} = t^{b_0} \sin(b_1 \ln t) \, . \qquad (8.3.8)$$

Характер тренда каждой из частей модели определяется значением коэффициентов показателя степени.

Например, если использовать модель с такими коэффициентами:

$$y_{rt} + iy_{it} = t^{(-0,5+i10)} \ , \qquad (8.3.9)$$

То каждая из составляющих комплекснозначного тренда будет иметь вид, изображённый на рис. 8.9 и рис. 8.10:

Тот же вид тренда, но с другими коэффициентами:

$$y_{rt} + iy_{it} = t^{(0,25+i0,35)} \ , \qquad (8.3.10)$$

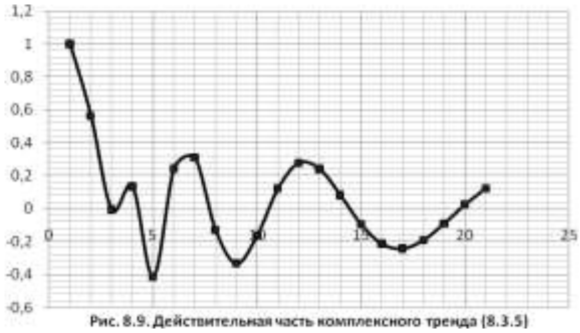

Рис. 8.9. Действительная часть комплексного тренда (8.3.5)

Рис. 8.10. Мнимая часть комплексного тренда (8.3.5)

моделирует совсем иную динамику, которая изображена на рис. 8.11 и рис. 8.12:

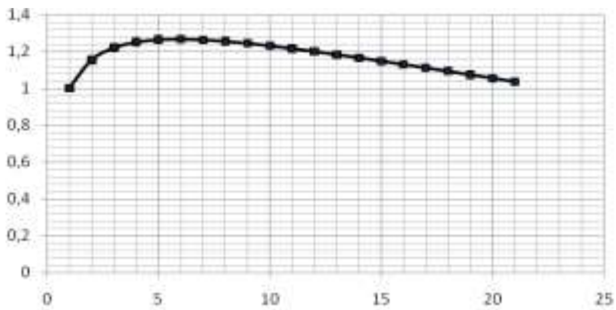

Рис. 8.11. Действительная часть комплексного тренда (8.3.5)

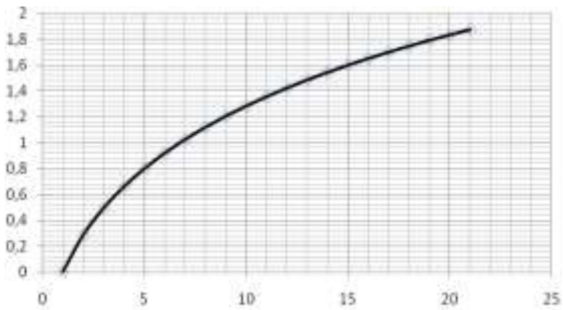

Рис. 8.12. Мнимая часть комплексного тренда (8.3.5)

Если тренды, подобные тем, что изображены на рис. 8.11 и рис. 8.12 довольно часто встречаются в области действительных переменных, то с моделями, описывающими динамику трендов типа рис.8.9 и рис. 8.10, в практике исследования социально-экономических процессов экономисты встречаются редко, разве что на фондовых рынках, – обосновать выбор моделей в области действительных переменных типа (8.3.7) и (8.3.8) довольно сложно.

Следует также отметить, что нахождение коэффициентов модели (8.3.5) с помощью МНК (при коэффициенте пропорциональности, равном единице) – простая задача.

Действительно, логарифмируя левую и правую части равенства (8.3.5), получим:

$$\ln(y_{rt} + iy_{it}) = (b_0 + ib_1)\ln t \ . \qquad (8.3.11)$$

Теперь можно получить уравнение МНК для нахождения значений комплексного показателя степени:

$$b_0 + ib_1 = \frac{\sum \ln(y_{rt} + iy_{it})\ln t}{\sum \ln^2 t} \ . \qquad (8.3.12)$$

Не значительно сложнее и задача оценки коэффициентов модели с комплексным коэффициентом пропорциональности. Поскольку подобная задача рассматривалась подробно в третьей главе монографии, не будем останавливаться на ней.

Степенная комплекснозначная функция действительного аргумента способна описать самые разнообразные траектории развития двух взаимосвязанных социально-экономических показателей – колебательные процессы и монотонно возрастающие или убывающие, со сложной циклической структурой.

Следующей моделью действительного аргумента может выступать показательная функция. Она может быть представлена в таком общем виде:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)e^{(b_0 + ib_1)t} \quad , \tag{8.3.13}$$

Основание показательной функции может быть и другим, в том числе и некоторым комплексным числом.

Вновь для простоты анализа будем рассматривать ситуацию, когда комплексный коэффициент пропорциональности равен единице. Тогда модель показательного тренда (8.3.13) может быть представлена так:

$$y_{rt} + iy_{it} = e^{b_0 t} e^{ib_1 t} = e^{b_0 t}\cos(b_1 t) + ie^{b_0 t}\sin(b_1 t)\,. \tag{8.3.14}$$

Этот тренд является некоторой периодической функцией и характер динамики действительной и мнимой частей определяется значениями комплексного показателя степени.

Например, при малых положительных значениях коэффициентов комплексного показателя степени таких, как:

$$y_{rt} + iy_{it} = e^{(0{,}15 + i0{,}05)t} \quad , \tag{8.3.15}$$

моделируется показательный рост каждой из составляющих (рис. 8.13 и рис. 8.14).

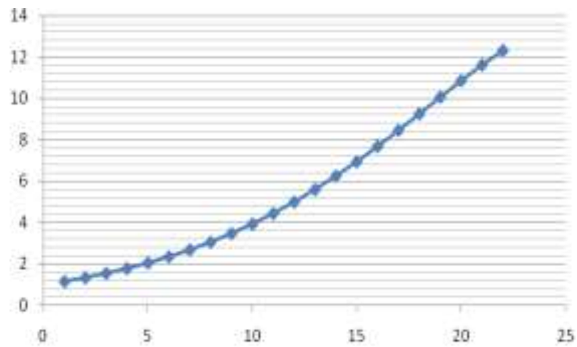

Рис. 8.13. Действительная часть тренда (8.3.15)

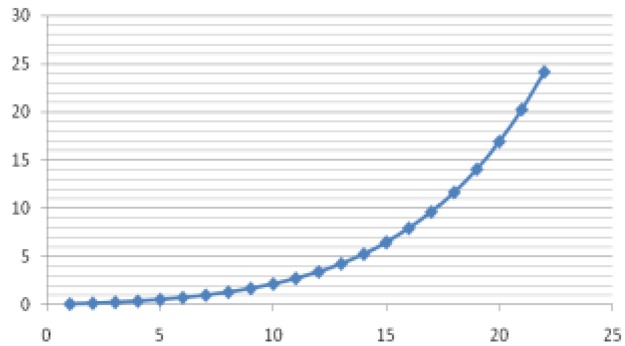

Рис. 8.14. Мнимая часть тренда (8.3.15)

При других коэффициентах может быть промоделирована сложная цикличная динамика, например, если модель примет вид:

$$y_{rt} + iy_{it} = e^{(0,05+i60)t} \ , \tag{8.3.16}$$

динамика действительной и мнимой составляющих этого комплекснозначного тренда принимают сложную форму, изображённую ниже на рис.8.15 и рис. 8.16.

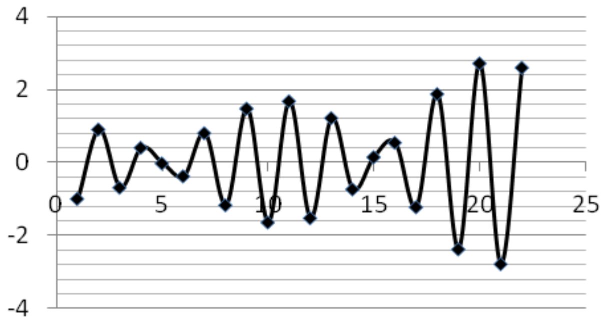

Рис. 8.15. Действительная часть тренда (8.3.16)

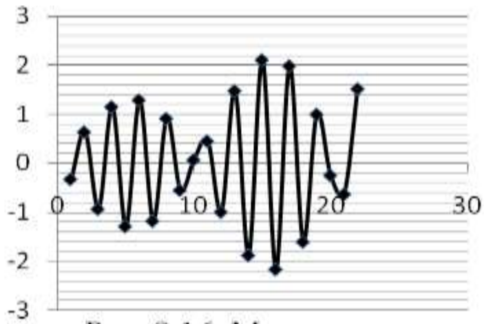

Рис. 8.16. Мнимая часть тренда (8.3.16)

Найти значения коэффициентов такого типа комплекснозначного тренда по статистическим данным также не составляет особого труда. Для этого вновь прологарифмируем левую и правую части модели и получим:

$$\ln(y_{rt} + iy_{it}) = (b_0 + ib_1)t \ .$$

Откуда, применяя МНК, получим:

$$b_0 + ib_1 = \frac{\sum \ln(y_{rt} + iy_{it})t}{\sum t^2} \ . \tag{8.3.17}$$

Если необходимо использовать более сложную модель общего вида с комплексным коэффициентом пропорциональности (8.3.13), то и это можно сделать с помощью МНК так, как это показано в третьей главе.

Последняя из элементарных функций, которая может быть использована для построения комплекснозначных трендов – это логарифмическая функция. В общем виде комплекснозначный тренд этого вида может быть представлен так:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)\ln[(b_0 + ib_t)t] \ , \tag{8.3.18}$$

Вновь приняв для упрощения, что комплексный коэффициент пропорциональности равен действительной единице, получим удобный для исследования вид модели:

$$y_{rt} + iy_{it} = t\sqrt{b_0^2 + b_1^2}[\cos(\frac{b_1}{b_0}t) + i\sin(\frac{b_1}{b_0}t)] \qquad (8.3.19)$$

Откуда легко заметить, что и действительная, и мнимая части такого комплекснозначного тренда изменяются по синусоиде или косинусоиде с возрастающей амплитудой колебаний. Их особенности, конечно, определяются коэффициентами модели, но особого интереса эта модель в описании социально-экономических процессов не вызывает.

8.4. Модель экономической динамики Солоу и её комплекснозначный аналог

В основе современных и весьма многообразных моделей экономической динамики лежит модель Солоу. В данной работе нет смысла углубляться в особенности аппарата моделирования экономической динамики - покажем лишь, как с помощью комплекснозначной экономики обогащается этот аппарат экономико-математического моделирования на примере фундаментальной модели Солоу.

Модель Солоу выглядит так.

Конечный продукт в модели Солоу определяется с помощью функции Кобба-Дугласа:

$$Y_t = aK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}. \qquad (8.4.1)$$

В дискретном времени t распределение конечного продукта Y_t производится на валовые инвестиции I_t и потребление C_t:

$$Y_t = I_t + C_t. \qquad (8.4.2)$$

Предполагается, что та часть конечного продукта, которая идёт на инвестиции, задается в виде нормы накопления ρ:

$$I_t = \rho Y_t. \qquad (8.4.3)$$

Инвестиции, очевидно, способствуют приросту основных производственных фондов будущего года K_{t+1} и выражаются через устаревшие фонды K_t с учётом доли выбывших за год основных производственных фондов μ:

$$K_{t+1} = (1-\mu)K_t+I_t. \qquad (8.4.4)$$

Число занятых в экономике L_{t+1} определяется через число занятых в текущем году L_t с учётом годового темпа прироста числа занятых v:

$$L_{t+1} = (1+v)L_t. \qquad (8.4.5)$$

Взаимосвязанные уравнения (8.4.1) – (8.4.5) и представляют собой модель Солоу, с помощью которой моделируется экономических рост некоторой идеализированной системы.

Используем в модели экономической динамики вместо производственной функции Кобба-Дугласа степенную комплекснозначную производственную функцию с действительными коэффициентами, подробно рассмотренную в пятой главе монографии. Тогда модель экономической динамики будет иметь вид:

$$I_t + iC_t = a(K_t + iL_t)^b, \qquad (8.4.6)$$
$$K_{t+1} = (1-\mu)K_t+I_t, \qquad (8.4.7)$$
$$L_{t+1} = (1+v)L_t. \qquad (8.4.8)$$

Как видно, в полученной модели используется только три равенства, поскольку производственная функция сразу же моделирует величину накопления, которая используется далее. Впрочем, если есть необходимость вычисления величины конечного продукта, эту модель можно дополнить ещё одним (8.4.2).

Одни и те же результаты по динамике конечного продукта можно получить, например, если в модели Солоу использовать производственную функцию с такими коэффициентами:

$$Y_t = 0,29K_t^{0,71}L_t^{0,29},$$

а в модели с комплексными переменными использовать производственную функцию вида:

$$I_t + iC_t = 0,225(K_t + iL_t)^{0,135}.$$

Однако динамика капитала и инвестиций, моделируемые этими двумя моделями, будут отличаться друг от друга. Следовательно, использование производственной функции комплексной переменной позволяет получить экономисту другую модель экономической динамки, с другой траекторией и другими особенностями развития. Если использовать вместе степенной комплекснозначной производственной функции другие комплекснозначные производственные функции, изученные в пятой главе монографии, будут получены совсем другие модели экономической динамики и другие траектории экономической динамики. Развитие модели можно осуществить и за счёт замены других уравнений моделями комплексных переменных, расширяя тем самым инструментальную базу экономиста, моделирующего экономическую динамику.

Доцент Хорезмского национального университета И.С. Абдуллаев, воспользовавшись основными положениями комплекснозначной экономики, построил систему моделей экономической динамики отдельных отраслей Республики Узбекистан и Хорезмской области. Поскольку его модели изложены во многих статьях и монографиях, воспользуемся только одним результатом для демонстрации возможности применения комплекснозначной экономики в моделировании реальной экономической динамики.

Для динамики промышленности Узбекистана с 1995 по 2008 год И.С.Абдуллаев пытался построить следующие типы моделей: производственную функцию Кобба-Дугласа, степенную производственную функцию и комплекснозначную производственную функцию.

Функция Кобба-Дугласа на этом множестве не определена – показатель степени при трудовых ресурсов отрицателен, также, как неопределенна на этом множестве и «неоклассическая» производственная функция. МНК позволяет найти на этом множестве только степенную производственную функцию, которая имеет вид:

$$Q = 0{,}13K^{1,2}L^{5,8}. \tag{8.4.9}$$

Эта модель плохо аппроксимирует исходные данные. Средняя абсолютная ошибка аппроксимации составила 132%. Очевидно, что такую функцию использовать в моделях экономической динамики нельзя.

Используя метод синтеза однофакторных комплекснозначных моделей в одну многофакторную комплекснозначную модель, описанный в параграфе 6.7 данной монографии, И.С. Абдуллаевым была получена такая модель производственной функции промышленности Узбекистана:

$$Q = 0{,}832e^{(-0,53-i2,7)}K^{(0,37+i0,121)}(L_{nnt} + iL_{\acute{\imath}t})^{3,03}. \tag{8.4.10}$$

Здесь L_{nnt} – численность промышленно-производственного персонала, $L_{нnt}$ – численность непроизводственного персонала промышленности Узбекистана (в безразмерных относительных величинах).

Модель (8.4.10) описывает динамику промышленного производства Узбекистана с средней абсолютной ошибкой аппроксимации, равной 32,8%, что почти в пять раз точнее моделей действительных переменных. Именно эту модель он и использовал для многовариантных расчётов возможных путей динамики развития промышленности Узбекистана на перспективу.

8.5. Модели Г.В.Савинова

Исследования в части формирования комплекснозначной экономики ведутся не только учёными под руководством автора монографии. Сама идея использования комплексных чисел как пары взаимосвязанных экономических показателей, являясь продуктивной, породила со стороны других учёных желание также исследовать такую возможность и открывающиеся перспективы. В этом направлении необходимо указать на интересные предложения проф. Г.В.Савинова, с которым нас связывают годы творческой дружбы. Исторически проф. Г.В.Савинов выступил первым рецензентом наших с И.С.Светуньковым научных работ по формированию комплекснозначной экономики и его критика была абсолютно конструктивной. Эта творческая дружба вылилась в несколько совместных публикаций, но в рамках данной монографии необходимо указать на авторство проф. Г.В.Савинова в некоторых идеях этих публикаций.

Возможность и необходимость использования комплексных экономических показателей. Рассмотрим вначале простую математическую модель для определения предприятием наилучшего объема выпуска продукции. Эта модель определяется двумя функциями: зависимостью валовых доходов предприятия от объема выпуска и затратами, необходимыми для обеспечения данного объема выпуска[44].

Пусть функция $q = f(z)$ описывает зависимость доходов предприятия от объема выпускаемой продукции z. Вначале с ростом объема выпуска доход так же возрастает, но скорость его возрастания постепенно падает. Это может отражать ситуацию, когда по мере насыщения рынка, спрос и цена на данную продукцию уменьшаются. После достижения насыщения в точке объема выпуска z_0, дальнейшее увеличение выпуска продукции приводит к падению доходов, из-за невозможности сбыта всей продукции по прежней высокой цене. Цену за единицу продукции приходится уменьшать, причём это уменьшение опережает по своим темпам рост объёмов производства. В результате валовой доход предприятия уменьшается. График этой функции показан на рис. 8.17.

В простейшем случае функцию $f(z)$ можно представить в виде:

$$q = f\left(z\right) = q_0 - \frac{q_0}{z_0^2}\left(z - z_0\right)^2, \qquad (8.5.1)$$

[44] Савинов Г.В., Светуньков С.Г. Комплексные переменные в экономическом анализе и моделировании // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2006, № 4. – с. 21 – 35.

где q_0 – максимально возможный доход, достигаемый при объёме выпуска z_0.

Затраты (издержки производства) c, необходимые для производства продукции, могут быть описаны линейной функцией от объема выпуска:

$$c = g(z) = az + b,\ a>0,\ b>0. \qquad (8.5.2)$$

Здесь свободный член b определяет постоянную часть затрат, не зависящую от объема выпуска продукции, а коэффициент a – затраты производства на единицу продукции.

Для определения оптимального объема выпуска продукции следует максимизировать прибыль $P=q–c$. Формальная математическая модель задачи имеет вид:

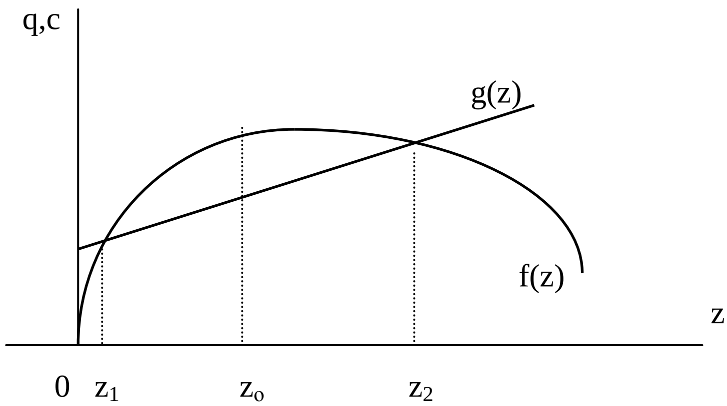

Рис. 8.17. Валовой доход от продажи товара f(z) и издержки его производства g(z)

$$\max_{z>0} P = \max_{z>0}|q-c| = \max_{z>0}\left[f(z)-g(z)\right] = \max_{z>0}\left[q_0 - \frac{q_0}{z_0^2}(z-z_0)^2 - (az+b)\right]. \qquad (8.5.3)$$

Границы эффективной работы предприятия определяются величинами z_1 и z_2, так как на интервале $[z_1;z_2]$ прибыль P неотрицательна.

Для определения границ z_1 и z_2 необходимо решить уравнение

$$P = q - c = f(z) - g(z) = 0. \qquad (8.5.4)$$

Если ситуация такая, как показано на рис. 8.17, то уравнение (8.5.4) имеет решения. Однако, возможна и другая ситуация, показанная на рис.1.3, когда затраты на производство продукции так велики, что функция затрат проходит выше функции выручки и в этом случае доход меньше расходов на производство при любом объеме выпуска. Столкнувшись с такой ситуацией, исследователь прекращает свою работу, констатируя отсутствие решения поставленной задачи.

Рассмотрим задачу формально с чисто математической точки зрения, для чего подставим в уравнение (8.5.4) функции *f(z)* и *g(z)*, определяемые формулами (8.5.1) и (8.5.2). Получим уравнение

$$q_0 - \frac{q_0}{z_0^2}\left(z - z_0\right)^2 - \left(az + b\right) = 0, \qquad (8.5.5)$$

которое после элементарных преобразований примет вид:

$$-\frac{q_0}{z_0^2} z^2 + \left(2\frac{a_0}{z_0} - a\right) z + b = 0. \qquad (8.5.6)$$

Как видно, это квадратное уравнение и оно всегда имеет два корня. Корни могут быть действительными, что соответствует случаю показанному на рис. 8.17, или же корни могут быть комплексными, что соответствует случаю на рис. 8.18. Этот последний случай характеризует убыточную работу предприятия, при которой прибыль будет иметь отрицательную величину, если считать объём выпуска продукции вещественным числом. Из уравнения (8.5.6) также вытекает, что могут существовать комплексные значения объёма выпуска продукции, определяющие границы области безубыточности производства.

Обозначим эти комплексные значения объёма производства следующим образом:

$$z_1 = x + iy \text{ и } z_2 = x - iy, \qquad (8.5.7)$$

где

$$x = z_0 - \frac{az_0^2}{2q_0}; \quad y = \frac{\sqrt{4b\, {}^{q_0}\!/\!_{z_0^2} - \left(2\, {}^{q_0}\!/\!_{z_0} - a\right)^2}}{2\, {}^{q_0}\!/\!_{z_0^2}}. \qquad (8.5.8)$$

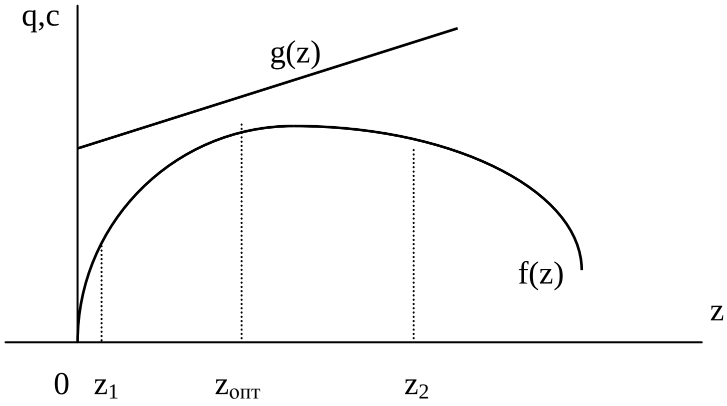

Рис. 8.18. Валовой доход от продажи товара f(z) меньше, чем издержки его производства g(z)

Заметим, что если считать объём производства вещественным числом, то убытки будут минимальными при *z=x* (*y=0*):

$$P(x) = f(x) - g(x) = \min_{z>0}[f(z) - g(z)]. \qquad (8.5.9)$$

Кроме того, для этого случая выполняются следующие условия для действительной и мнимой частей прибыли:

$$\mathrm{Re}\Big(P\big(z_j\big)\Big) = 0, \mathrm{Im}\Big(P\big(z_j\big)\Big) = 0; \ j=1, 2. \qquad (8.5.10)$$

То есть, в точках (8.5.7), для которых действительная и мнимая части комплексного выпуска определяются по формулам (8.5.8), прибыль перестаёт быть отрицательной, а становится равной нулю (решение уравнения).

Если же взять $|y_1| > |y|$ и положить $z_1 = x + iy_1 \quad z_2 = x - iy_1$, то получим для действительной и мнимой частей прибыли:

$$\mathrm{Re}\Big(P\big(z_j\big)\Big) > 0, \mathrm{Im}\Big(P\big(z_j\big)\Big) = 0; \ j=1,2 \qquad (8.5.11)$$

то есть прибыль стала положительной и остаётся действительной величиной. Таким образом, получаем, что всегда можно найти такой комплексный объем выпуска продукции, который давал бы положительную действительную часть прибыли. Причиной появления комплексного объема выпуска продукции в рассматриваемом примере выступает нелинейный характер функции дохода *f(z)*. С нелинейными задачами приходится встречаться в экономической практике повсеместно, и практически всегда мы можем в ходе их решения получить комплексные решения, причём ситуаций таких решений, когда имеется ненулевая мнимая часть, будет немало.

Чтобы понять, как комплексный объем выпуска продукции $z=x\pm iy$ влияет на прибыль *P(z)* вычислим *Re(P(z))* и *Im(P(z))*. Имеем

$$P(z)=q_0-k(z-z_0)^2-(az+b)=q_0-kz^2+2kzz_0-kz_0^2-az-b= \\ q_0-kx^2+ky^2-i2kxy+2kxz_0+i2kyz_0-kz_0^2-ax-iay-b,$$

где $k={q_0}/{z_0^2}$.

Сгруппируем теперь действительную и мнимую части полученного выражения:

$$P(z)=q_0-b-kx^2+ky^2+2kxz_0-kz_0^2-ax+i[2kyz_0-2kxy-ay]. \quad (8.5.12)$$

Оттуда следует, что

$$\operatorname{Re}(P(z))=q_0-kx^2+2kxz_0-kz_0^2-(b+ax)+ky^2$$
$$\operatorname{Im}(P(z))=y[2kz_0-2kx-a]$$

Теперь легко убедиться в том, что

$$\operatorname{Re}(P(z))=[f(\operatorname{Re}(z))-g(\operatorname{Re}(z))]+ky^2=f(x)-g(x)+ky^2, \quad (8.5.13)$$

$$\operatorname{Im}(P(z))=y\frac{\partial\operatorname{Re}(P(z))}{\partial x}$$

Заметим, что независимо от знака мнимой переменной *y* действительная часть *Re(P(z))* увеличивается на величину ky^2 при неизменном фиксированном значении *x*. Это означает, что при

$$y<\frac{\sqrt{4b\,{q_0}/{z_0^2}-\left(2\,{q_0}/{z_0}-a\right)^2}}{2\,{q_0}/{z_0^2}}$$

прибыль является отрицательной, при строгом равенстве - становится равной нулю, а при дальнейшем увеличении мнимой части прибыль становится положительной.

Дадим теперь экономическую интерпретацию полученным результатам (рис. 8.19). Так как решение лежит в комплексной плоскости объёмов производства, то следует представить задачу не на плоскости, а в пространстве, осями которого выступают затраты или прибыль, а также действительная часть объёмов производства *x* и мнимая часть объёмов производства *y*.

При объёме производства $z_{опт}$ равном только действительной части *x*, отрицательное значение прибыли принимает величину, характеризующую минимальный ущерб (на рисунке прибыль изображена жирной пунктирной кривой линией). При других действительных значениях объёма производства ущерб (отрицательное значение прибыли) увеличивается. Если же рассматривать при фиксированной действительной части изменяющуюся мнимую часть объёма производства, то с её увеличением отрицательные значения прибыли начнут уменьшаться и при достижении условий (8.5.8) становятся равными нулю.

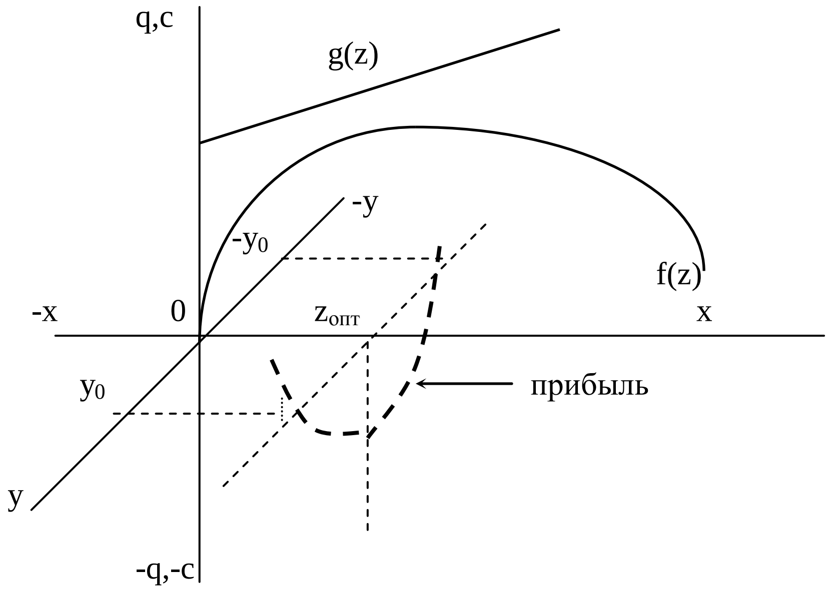

Рис.8.19. Пространство комплексного объёма (*x* и *y*) и денежных результатов (затрат, выручки и прибыли)

При достижении мнимой части объёма величины y_0 и далее прибыль становится положительной в соответствии с условием (8.5.13), что и изображено на рисунке.

Какой же смысл имеет мнимая составляющая комплексного выпуска продукции? Это не антипроизводство, поскольку антивыпуск – это покупка, а покупка означает выпуск с отрицательным знаком. Это, во-первых. Во-вторых, из свойства комплексного числа ясно, что его мнимая часть не зависима от действительной части, а только отражает некоторую часть общего явления, значит, производство мнимых единиц продукции не связано с производством данной продукции, для которой сформулирована задача.

Таким образом, мы можем утверждать, что мнимый объём производства характеризует выпуск и реализацию другой продукции, не связанной непосредственно технологически с производством данной. Решение задачи в данных условиях заключается в том, чтобы, доведя производство данной продукции до объёма $z=x$, где x определяется из (8.5.8), производить такую новую продукцию, объём производства которой должен быть не менее величины, определённой для y из (8.5.8) и продажа которого давала бы необходимую прибыль:

$$P = ky^2 = \frac{q_0}{z_0^2} y^2. \qquad (8.5.14)$$

Так как x измеряется в денежном выражении, то и объём y должен измеряться в денежном выражении. Но предприятие в процессе своего функционирования производит не только какие-либо изделия. Оно связано своими отношениями с поставщиками, с конкурентами и потребителями. Поэтому y может представлять собой результат деятельности в любой области. Это может быть результат решения по отношению к поставщикам; это может быть результат решения, связанного с массированной рекламой, это, в конце концов, может быть результат решения о выпуске на иной рынок иного продукта, который на этапе роста жизненного цикла товара будет приносить прибыль.

Продемонстрируем решение поставленной задачи на условном примере. Пусть некоторая фирма, стремящаяся выйти на рынок товара, изучив с помощью маркетинговых исследований характеристики спроса, выявила, что у модели могут быть такие параметры: $q_0= 10, z_0=4$. То есть, модель прибыли (8.5.1) имеет вид:

$$q = f(z) = 10 - \frac{10}{4^2}(z-4)^2$$

Фирма собирается выйти на рынок при любых затратах для того, чтобы подавить конкурентов, поэтому готова работать в убыток, но ей необходимо знать в каких пределах должен изменяться объём производства для того, чтобы работа была безубыточной. Анализ собственных производственных способностей позволил уточнить коэффициенты модели (8.5.2). Свободный член b равен 9, а коэффициент пропорциональности $a=0,5$. Модель (8.5.2) изменения затрат в зависимости от выпуска примет вид:

$$c = g(z) = 0,5z + 9$$

Найдём границы эффективной работы предприятия в этих условиях. Воспользуемся для этого формулами (8.5.8). Получим, что решение лежит в комплексной плоскости, и параметры комплексного решения равны:

$$x = 4 - \frac{0,5 \times 4^2}{2 \times 10} = 3,6; \quad y = \frac{\sqrt{4 \times 9 \times {}^{10}\!/_{4^2} - \left(2\,{}^{10}\!/_{4} - 0,5\right)^2}}{2\,{}^{10}\!/_{4^2}} = 1,2$$

То есть, в данном случае производство будет убыточным и границы эффективной работы предприятия определяются комплексными переменными: $z=3,6 \pm i1,2$.

Если не обращать внимания на мнимую составляющую решения, а использовать только действительную часть, получим для прибыли:

$$P = 10 - \frac{10}{4^2}(3,6-4)^2 - 0,5 \times 3,6 - 9 = -0,9.$$

То есть, при работе на этом рынке будут получены ущербы. Причём, при любом другом значении вещественной части этот ущерб увеличится.

Если использовать комплексное решение задачи, то прибыль при достижении границ $z=3,6 \pm i1,2$ равна нулю. При увеличении объёмов производства в мнимой части общая прибыль увеличивается.

Теперь осмыслим полученные результаты. Как выпустить 3,6 единиц данного товара ясно. Но что за продукция, скрывающаяся в мнимой части решения? Найдём его характеристики, вытекающие из условия задачи. Как следует из (8.5.14), каждая единица этой продукции должна давать такую прибыль: $P = ky^2 = \frac{10}{16}y^2$. При производстве 1,2 единиц этой неизвестной продукции, будет получена прибыль, численно равная ущербу от выпуска 3,6 единиц исходного товара, а именно:

$$P = \frac{10}{16} \times 1,2^2 = 0,9.$$

Увеличение объёмов производства этой продукции приведёт к увеличению общей прибыли.

Таким образом, видно, что данная достаточно простая модель, описывающая ситуацию, не являющуюся исключительной в экономической жизни, с помощью комплексных чисел позволяет найти новое решение, дающее более чёткое понимание ситуации.

Конечно, каждый раз, получая решение экономической задачи в виде некоторого комплексного числа, необходимо искать смысл мнимой составляющей. Но в любом случае можно констатировать, что встреча с комплексными числами, или комплексными переменными в экономике – это достаточно заурядная ситуация, которую следует тщательно анализировать. Смысл мнимой части чаще всего следует рассматривать как наличие некоторых дополнительных факторов, в том числе и внесистемных, действие которых аналогично действию действительной части, но которые не были учтены в исходной модели.

Рассмотренная выше модель определения оптимального объема выпуска продукции показывает возможный формальный механизм появления комплексных показателей в математических моделях экономических систем. Однако, с математической точки зрения, приведенные выше рассуждения, не являются безупречными. Прежде чем решать уравнение (8.5.6) необходимо было сразу определить над каким полем вещественных или комплексных чисел рассматривается данное уравнение. Если это поле вещественных чисел, то у уравнения (8.5.6) нет решений. Если же это поле комплексных чисел, то до решения уравнения (8.5.6) необходимо было придать экономический смысл вещественной и мнимой части комплексного выпуска продукции.

При такой постановке вопроса данная выше интерпретация мнимой части комплексного выпуска продукции представляется не совсем удачной. Действительно, мнимая продукция берется как бы ниоткуда, и производит эффект совсем не такой же как реальная продукция. Мнимая продукция изменяет свойства модели (функции дохода) и благодаря этим изменениям формируется предпосылки для безубыточной работы. Возникает так же естественный вопрос: если источник мнимой продукции лежит вне рассматриваемой моделируемой системы, то почему его нельзя конкретизировать и ввести в математическую модель? Таким образом, необходимо более общее объяснение возникающих комплексных экономических показателей.

Латентные факторы как мнимая составляющая комплексных экономических показателей. Рассмотрим теперь более простую модель формирования дохода предприятия. Пусть x – это объём производимой продукции. Часто на практике при анализе моделей производства этот показатель может быть определен лишь приближенно, так как он зависит от множества случайных факторов, способных оказать влияние на его величину. Заметим, что эти факторы могут не входить в рассматриваемую математическую модель и их влияние можно учесть, рассматривая показатель x как случайную величину

$$x = x_{cp} + \xi, \tag{8.5.15}$$

где $x_{cp}=M(x)$ - математическое ожидание (среднее значение) показателя x, а ξ- случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание $M(\xi)=0$, и имеющая смысл отклонения (колебания) показателя x от своего среднего значения.

Рассмотрим еще один показатель a – цену на продукцию, которую так же будем рассматривать, как случайную величину:

$$a = a_{cp} + \eta, \tag{8.5.16}$$

где $a_{ср}=M(a)$, η – некоторая случайная величина, имеющая нулевое математическое ожидание $M(\eta)=0$.

Вычислим доход предприятия, как произведение количества выпущенной продукции на ее цену.

$$P = ax = \left(a_{cp} + \eta\right)\left(x_{cp} + \xi\right). \tag{8.5.17}$$

Математическое ожидание дохода будет равно:

$$M(P) = P_{cp} = a_{cp}x_{cp} + M(\eta\xi). \tag{8.5.18}$$

Корреляционный момент $M(\eta\xi)$ можно представить в виде

$$M\left(\eta\xi\right) = r_{\eta\xi}\sigma_\eta\sigma_\xi, \tag{8.5.19}$$

где $r_{\eta\xi}$ - коэффициент корреляции между случайными величинами η и ξ, а σ_η и σ_ξ - средние квадратические отклонения этих величин.

Так как по смыслу все величины $a_{ср}$, $x_{ср}$, σ_η и σ_ξ не отрицательные, то минимальное значение $P_{ср}$ будет достигаться при $r_{\eta\xi}$ =-1. Кроме того, ясно, что $\sigma_\eta = \sigma_a$, а $\sigma_\xi .= \sigma_x$. В итоге имеем:

$$\min P_{cp} = a_{cp}x_{cp} - \sigma_a\sigma_x. \tag{8.5.20}$$

Аналогично рассуждая, легко получить, что

$$\max P_{cp} = a_{cp}x_{cp} + \sigma_a\sigma_x. \tag{8.5.21}$$

Введем теперь в рассмотрение комплексные показатели:

$$x = x_{cp} + i\sigma_x,\ a = a_{cp} + i\sigma_a,\ P = P_{cp} + i\sigma_p. \tag{8.5.22}$$

Тогда имеем:

$$P = ax = P_{cp} + i\sigma_p = \left(a_{cp}x_{cp} - \sigma_a\sigma_x\right) + i\left(a_{cp}\sigma_x + \sigma_a x_{cp}\right).$$

Или

$$P = a\bar{x} = P_{cp} - i\sigma_p = \left(a_{cp}x_{cp} + \sigma_a\sigma_x\right) + i\left(-a_{cp}\sigma_x + \sigma_a x_{cp}\right). \tag{8.5.24}$$

Таким образом, получаем, что

$$\operatorname{Re}(ax) = \min P_{cp}, \tag{8.5.25}$$

$$\operatorname{Re}(a\overline{x}) = \max P_{cp}. \tag{8.5.26}$$

Следовательно, действительная часть комплексного дохода служит верхней или нижней оценкой его средней величины. Мнимая часть этого показателя может рассматриваться как оценка возможных отклонений от среднего при различном характере взаимодействия показателей a и x.

Заметим, что реальное значение коэффициента корреляции $r_{\eta\xi}$ неизвестно, так как неизвестен совместный закон распределения случайных величин η и ξ. Именно поэтому и возникает необходимость в использовании верхних и нижних оценок.

Приведенная выше статистическая трактовка комплексных показателей рассматривает мнимую часть, как меру колебаний этого показателя под действием факторов, не входящих в модель или не достаточно точно оцениваемых в рассматриваемой модели.

Вернемся теперь к анализу рассмотренной выше модели определения оптимального выпуска продукции. Получаемое значение комплексного выпуска

$$z = x + iy \tag{8.5.27}$$

можно рассматривать как случайную величину, где x – это ее среднее значение, а y – мера отклонения от среднего. Тогда функция (8.5.1) определит комплексный доход.

$$q = q_{cp} + iq_{\sigma} = f(z). \tag{8.5.28}$$

Где q_{cp} - среднее значение дохода, а q_{σ}- мера отклонения от среднего.

Однако при таком подходе остается не ясным, почему объем выпуска продукции рассматривается как величина случайная. Для понимания сути дела сравним реальные значения доходов и выпуска продукции с теоретической функцией (8.5.1) считая q и z – действительными переменными. Обычно графическая картина имеет вид, изображенный на рис. 8.20.

На ней звёздочками обозначены реальные точки, взятые из наблюдений, а кривая $f(z)$ выступает как аппроксимирующая модель, чьи значения обычно определяются методом наименьших квадратов.

Таким образом, значение функции от не случайного показателя является случайной величиной. Естественно, хотелось бы выделить этот источник случайности и отнести его к аргументу функции, чтобы сама функция выступала бы как выражение некоторой определенной закономерности. Это и достигается введением комплексного объёма выпуска продукции $z=x\pm iy$.

Рассмотренные выше модели показывают возможности, которые открывает использование комплексных переменных для описания присущих экономическим моделям неопределенностей. Однако данная в этих моделях интерпретация комплексных показателей не является универсальной. Рассмотренные модели были приведены с целью того, чтобы показать сложность поставленной проблемы, а её возможные интерпретации положить в основу общей концепции обоснования существования комплексных показателей в экономике.

Комплекснозначные производственные функции. Если рассматривать два одинаковых значения одного и того же экономического показателя x_1 и x_2, но замеренные у разных экономических систем, то при взаимодействии с другими показателями или при рассмотрении разных процессов, эти показатели могут проявлять себя по-разному. То есть, результат от применения одного и того же количества ресурсов, но в разных условиях или в разные мо-

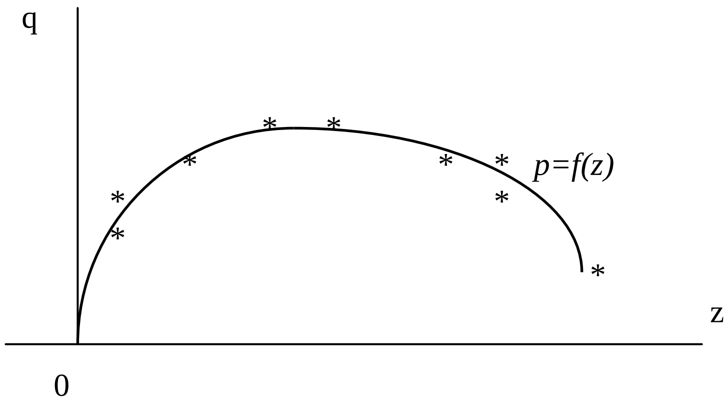

Рис. 8.20. Валовой доход от продажи товара f(z) как случайная величина

менты времени может быть разным. Следовательно, количественная мера не полностью определяет свойства фактора или показателя и его влияние на хозяйственный процесс. Это говорит о том, что у каждого экономического фактора или показателя можно выделить "скрытые свойства", величину которых будем представлять как мнимую часть количественной меры этого показателя, то есть:

$$x = x_0 + ix_i, \tag{8.5.29}$$

где x_0 - фактическая величина показателя, а x_i - его мнимая часть, воплощающая в себе "скрытые свойства". По сути, вместо одного числа, предлагается определять показатель x вектором $(x_0; x_i)$.

Поясним смысл предложенного на примере классической производственной функции.

В задачах математического моделирования экономических процессов и систем для оценки параметров модели, как правило, используют статистические методы. Поэтому функциональные зависимости между различными экономическими показателями, которые используются в математических моделях экономики, по сути являются регрессионными. Регрессионные зависимости, как известно, ставят в соответствие одному или нескольким экономическим показателям среднее значение другого.

Простейшим примером такой зависимости является производственная функция, связывающая ресурсные показатели с результативными.

Например, функция Кобба-Дугласа

$$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}, \tag{8.5.30}$$

где A и α - параметры, которые связывают затраты труда L и капитала K с объемом продукции Y.

Процесс определения коэффициентов A и α – заключается в обработке статистических наблюдений изменений ресурсов и результата с помощью метода наименьших квадратов. Следовательно, Y имеет смысл среднего значения выпуска продукции. Возможные отклонения от среднего ΔY - так же могут быть оценены методами математической статистики и рассматриваются как оценки точности модели. Между тем, тот факт, что при практически одинаковых значениях ресурсных показателей, результативные показатели могут принимать существенно различные значения не является ошибкой измерения, а является особым свойством экономических систем. Количественно равные показатели могут качественно отличаться друг от друга и, самое главное, характер взаимодействия показателей может быть в каждом конкретном случае особым.

На практике это означает, что если строить модели близких друг к другу экономических систем или процессов, то параметры для каждой модели придется находить отдельно. Например, параметры модели (8.5.30) A и α необходимо находить для каждого процесса производства или для каждого предприятия.

Возникает естественное желание определять параметры модели (8.5.30) для достаточно широкого класса систем или процессов, а возможные колебания выпуска продукции оценивать через свойства ресурсов или характер их взаимодействия.

Казалось бы, наиболее простой и естественный путь решения проблемы, это рассматривать параметры A и α как случайные величины. Однако при таком подходе приходится сталкиваться с двумя основными проблемами.

Первая проблема носит технический характер и связана с необходимостью построения знаков распределения случайных величин A и α или оценкой их числовых характеристик (прежде всего среднего квадратического отклонения).

Вторая проблема методологическая. При таком подходе определяют результат не объективные свойства ресурсов или реальные особенности их взаимодействия, а некоторые случайные факторы, управление которыми вызывает объективные проблемы.

Идея использования комплексных экономических показателей и теории функций комплексной переменной позволяет решить эту проблему.

Сначала покажем, почему целесообразно вводить в модель комплексные переменные.

Представим все показатели, входящие в производственную функцию (8.5.30) в виде комплексных чисел. Пусть

$$K = K_0 + iK_i, \tag{8.5.31}$$

где K_0 - реальное, измеренное значение капитала, а K_i - оценка скрытой части этого показателя, которая проявляется только в процессе производства, через изменение результативного показателя. Трудовые затраты будут записываться в комплексном виде так:

$$L = L_0 + iL_i, \tag{8.5.32}$$

где L_0 - реальное, измеренное значение трудовых затрат, а L_i - оценка скрытой части этого показателя, которая так же проявляется только в процессе производства.

Аналогично и выпуск продукции представим в виде комплексной величины:

$$Y = Y_0 + iY_i, \tag{8.5.33}$$

где Y_0 - значение ожидаемого выпуска продукции, а Y_i - оценка скрытой части продукции, которая может проявиться через влияние на выпуск продукции других показателей в результате процессов протекающих вне рамок, рассматриваемых при построении модели (8.5.30).

Формально модель (8.5.30) не изменит своего вида, однако суть модели станет другой. Для понимания этого, заменим правую часть модели с использованием экспоненциальной формы записи комплексных чисел (1.1.7). Имеем:

$$Y = Ar_K^{\alpha} r_L^{1-\alpha} e^{i\alpha\varphi_K} e^{i(1-\alpha)\varphi_L}, \tag{8.5.34}$$

$$Y = Ar_K^{\alpha} r_L^{1-\alpha} e^{i\varphi_Y}, \tag{8.5.35}$$

$$\varphi_Y = \alpha\varphi_K + (1-\alpha)\varphi_L, \tag{8.5.36}$$

где $r_K = \sqrt{K_0^2 + K_i^2}$ - модуль, а $\varphi_K = \operatorname{arctg} {K_i}/{K_0}$ - аргумент комплексного числа капитального ресурса К, $r_L = \sqrt{L_0^2 + L_i^2}$ - модуль, а $\varphi_L = \operatorname{arctg} {L_i}/{L_0}$ - аргумент комплексного числа трудового ресурса L.

В рамках модели производственной функции (8.5.30) интерес представляет $\operatorname{Re}(Y) = Y_0$ - реальная часть выпуска продукции, которая, как легко заметить, будет равна:

$$Y_0 = Ar_K^{\alpha} r_L^{1-\alpha} \cos\varphi_Y . \tag{8.5.37}$$

Так как скрытые части ресурсов, как правило, заданы своими оценками, то они определят возможные колебания результата производства Y_0. Верхняя и нижняя граница этих колебаний будут определяться следующим образом:

$$\max Y_0 = \max Ar_K^{\alpha} r_L^{1-\alpha} \cos\varphi_Y . \tag{8.5.38}$$

$$\min Y_0 = \min Ar_K^{\alpha} r_L^{1-\alpha} \cos\varphi_Y . \tag{8.5.39}$$

Величина аргумента φ_Y, как это следует из (8.5.36), определяется знаками углов φ_K и φ_L, которые могут быть как положительными, так и отрицательными.

Таким образом, комплексное представление функции (8.5.30) позволяет получить не только некое среднее (ожидаемое) значение выпуска продукции, но и оценки отклонений от него.

Использование комплексных переменных в экономическом анализе в качестве существенного конструктивного элемента имеет не только экономический смысл, рассмотренный выше, но и позволяет существенно расширить используемый в экономико-математическом моделировании модельный ряд. Покажем это вновь на примере производственной функции. Построим саму модель, рассматривая ресурсы как комплексную переменную:

$$R = K + iL . \tag{8.5.40}$$

Отнесение трудовых ресурсов к мнимой части неслучайно. Здесь трудовые ресурсы рассматриваются как иная форма проявления капитала.

Рассмотрим выпуск продукции не как некоторую вещественную единицу, а как комплексную единицу, состоящую из двух частей – вещественной и мнимой. Тогда комплексный выпуск продукции будет иметь вид:

$$P = Y + iX\ , \qquad (8.5.41)$$

где Y - объём выпускаемой продукции, а X – одна из оценок интенсивности использования производственных ресурсов. Это может быть показатель издержек производства, это может быть объём затрат на маркетинг и другие показатели.

Комплексную производственную функцию определим следующим образом

$$P = c_R R^{\alpha}, \qquad (8.5.42)$$

Где c_R и α - действительные коэффициенты.

Имеем:

$$Y + iX = c_R\left(K + iL\right)^{\alpha} = c_R\left|K + iL\right|^{\alpha} e^{i\varphi} = c_R\left|R\right|^{\alpha}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \qquad (8.5.43)$$

где $\varphi = \operatorname{arc}tg\left(L/K\right)$, $\left|R\right| = \sqrt{K^2 + L^2}$.

Рассмотрим теперь в чем принципиальное отличие функции Кобба-Дугласа (8.5.30) от предлагаемой функции комплексных перемененных (8.5.43).

В функции Кобба-Дугласа значение выпуска продукции Y зависит только от величины факторов K и L и не зависит от их соотношения. Значение же функции (8.5.43) существенно зависит от соотношения между факторами, особенно, если факторы имеют разный порядок.

Поясним сказанное числовым примером. Пусть $K=10$, а $L=1$. Оценим изменения Y в случае, если L возрастет до 2. Если использовать функцию Кобба-Дугласа, то Y увеличится в 2^{α} раз. При $\alpha=0,5$ это увеличение будет составлять $\sqrt{2} \approx 1,4$ раз, т.е. Y увеличится примерно на 40%.

При использовании функции (8.5.42) имеем

$$R \approx K\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{L}{K}\right)^2\right)$$

и изменение R в рассматриваемом случае будет в пределах 2%.

Аналогично малым будет и изменение $cos\varphi$, и, как следствие этого, и Y изменится в меньшей степени, чем в случае функции Кобба-Дугласа. Таким образом, предложенная функция комплексных переменных и функция Кобба-Дугласа имеют только внешнее сходство по форме, а их свойства существенно различны.

Заметим, что если бы основным производственным фактором были бы трудовые ресурсы ($L>>K$), то в этом случае с позиций экономической содержательности задачи следовало бы за комплексный выпуск продукции принимать величину

$$R = K + iL\,. \qquad (8.5.44)$$

Имеет смысл и введение дополнительного параметра при определении комплексного выпуска. Можно считать, что

$$R = K + ic_L L\,. \qquad (8.5.45)$$

Где c_L – действительный коэффициент, корректирующий общую меру между K и L.

Заметим, что для вычисления малых изменений выпуска продукции можно пользоваться производными от комплексных функций. Тогда имеем

$$\Delta P \approx \left(c_R R^{\alpha}\right)\Big|_{y_0} \Delta R = \left(c_R \alpha R^{1-\alpha}\right)\Big|_{y_0} \Delta R = \left(a + ib\right)\left(\Delta K + i\Delta L\right),$$

где $c_R \alpha R^{1-\alpha}\,|_{y_0} = a + ib$

$$\Delta Y = \operatorname{Re}\left(\Delta P\right) \approx a\Delta K - b\Delta L\,. \qquad (8.5.46)$$

Здесь a и b – действительные коэффициенты.

Вновь вернемся к исходной задаче определения оптимального выпуска продукции, рассмотренной в начале параграфа. После всех приведённых выше рассуждений, становится понятным, что комплексные переменные могут выступать в том числе и в качестве оценки скрытых свойств выпускаемой продукции. Эти скрытые свойства создают дополнительную прибыль за счет уменьшения нелинейного эффекта падения доходов с ростом объемов продукции. Представим функцию доходов как функцию комплексной переменной в экспоненциальном виде.

$$P\left(z\right) = 2\frac{q_0}{z_0} z - \frac{q_0}{z_0^2} z^2 = 2\frac{q_0}{z_0} r_z e^{i\varphi} - \frac{q_0}{z_0^2} r_z^2 e^{i2\varphi}\,, \qquad (8.5.47)$$

где $r_z = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа z, а $\operatorname{arctg} {}^{y}\!/_{x}$ - его аргумент.

После элементарных преобразований, получим

$$P\left(z\right) = \frac{q_0}{z_0} r_z e^{i\varphi} \left(2 - \frac{r_z}{z_0} e^{i\phi}\right), \qquad (8.5.48)$$

Из (8.5.48) видно, что если $\varphi=0$, то действие нелинейных эффектов максимально. По мере увеличения φ величина

$$\mathrm{Re}\left[2-\frac{r_z}{z_0}e^{i\varphi}\right] \tag{8.5.49}$$

уменьшается, что и приводит к дополнительным доходам за счет уменьшения влияния нелинейных эффектов.

В данной модели можно считать переменные x и y связанными условием $y=\eta x$, то есть, что мнимая часть выпуска продукции пропорциональна действительной, реальной её части.

Тогда реальная часть прибыли будет вычисляться по формуле

$$\mathrm{Re}\big(P(z)\big)=2\frac{q_0}{z_0}x-\frac{q_0}{z_0^2}\left(x^2-y^2\right)=2\frac{q_0}{z_0}x-\frac{q_0}{z_0^2}\left(1-\eta^2\right)x^2. \tag{8.5.50}$$

Параметр $\eta=tg\varphi=x/y$ по своему экономическому смыслу показывает, какую часть составляет мнимая (скрытая) часть продукции от ее реальной части.

Если вернуться к числовому примеру, рассмотренному ранее, то в нём

$$\eta=\frac{x}{y}=\frac{3,6}{1,2}=\frac{1}{3}.$$

Это означает, что если мнимая часть выпуска продукции будет больше 33,3% от реальной, то при благоприятном ее влиянии на доход производство станет безубыточным. Отметим, что если доходы оценивать по формуле

$$P(z)=2\frac{q_0}{z_0}z-q_0\frac{z\bar{z}}{z_0^2}, \tag{8.5.51}$$

то в этом случае будет построена модель ситуации, когда нелинейные эффекты уменьшения доходов с ростом объемов производства увеличиваются.

Производственные функции структурного типа. Перспективным представляется исследование, посвящённое изучению роли и влиянию неиспользованных ресурсов, запасов и резервов производства на производственный результат с помощью моделей комплексных переменных. Для моделирования производственных микроэкономических объектов, было предложено использовать производственные функции структурного типа[45]. Функции этого типа связывают объем конечной продукции с объемом вовлеченных в производство ресурсов и их структурой.

Суть этих моделей такова. Пусть Y - объем выпуска продукции, а $X=(x_1,x_2,...x_n)$ - вектор ресурсов. Будем считать, что конечная продукция и все ресурсы измеряются в денежной мере. Общий объем ресурсов, вовлеченных в процесс производства, будет

$$X=\sum_{i=1}^{n} x_i \text{, i=1,2,…n.} \tag{8.5.52}$$

Структура ресурсов определяется структурным вектором

$$\lambda_i = x_i / X \text{, } i=1,2,...n.. \tag{8.5.53}$$

Производственная функция структурного типа имеет вид

$$Y = A\cdot X\cdot f(\lambda), \tag{8.5.54}$$

где A - числовой коэффициент, $f(\lambda)$ - функция структурных потерь, определяющая снижение выпуска продукции от не оптимальности структуры ресурсов. Естественно считать, что эта функция лежит в пределах:

$$0\le f(\lambda)\le 1 \text{ и } \max_{\lambda} f(\lambda)=f(\lambda^*)=1,$$

где λ^* - вектор, задающий оптимальную структуру используемых ресурсов.

Функцию структурных потерь предлагалось использовать в таком виде:

$$f(\lambda)=\eta+\Delta(1-\eta), \tag{8.5.55}$$

где $0\le\Delta\le 1$,

η - числовая оценка близости реальной структуры к эталонной.

Предлагается η выбирать таким образом:

$$\eta=\min_{i}\frac{\lambda_i}{\lambda_i^*} \text{,i=1,2,…n .} \tag{8.5.56}$$

---

[45] Савинов Г.В., Эйсснер Ю.Н. Моделирование и оценка структурной динамики хозяйственных систем под влиянием научно-технического прогресса. //Концептуальные и методические вопросы прогнозирования научно-технической деятельности в регионе. Межвузовский сборник научных трудов. Ленинград, 1984; Савинов Г.В.Оценка результатов хозяйственной деятельности на основе анализа экономических процессов.// Экономические проблемы управления промышленным производством. Межвузовский сборник научных трудов. Ленинград, 1987.

В таком подходе η определяет долю ресурсов с оптимальной структурой, содержащуюся в фактическом наборе ресурсов, а Δ это коэффициент потерь от использования ресурсов с неоптимальной структурой.

Функция структурных потерь *f(λ)* может иметь и иной вид, причём обоснование её вида представляет собой довольно непростой процесс, а вид (8.5.55) является только одним из множества возможных. Поскольку (8.5.55) имеет простое толкование, то именно эта функция и использовалась ранее.

Если представлять производственную функцию в виде модели комплексной переменной, то выбор функции структурных потерь очевиден – рассматривая (8.5.54) как действительную часть комплексной переменной, производственная функция принимает такой вид:

$$Y = A \cdot |X| \cdot \cos(\alpha). \tag{8.5.57}$$

где

$$\cos(\alpha) = \cos(\lambda, \lambda^*) = \frac{(\lambda, \lambda^*)}{\|\lambda\|_2 \cdot \|\lambda^*\|_2}. \tag{8.5.58}$$

То есть, функция структурных потерь *f(λ)* рассматривается как

$$f(\lambda) = \cos(\alpha). \tag{8.5.59}$$

Тогда производственная функция допускает комплексное представление

$$Y = \operatorname{Re}\left(A \cdot X \cdot e^{i\alpha}\right). \tag{8.5.60}$$

И комплексный выпуск продукции будет моделироваться таким образом:

$$X \cdot e^{i\alpha} = A \cdot X \cdot \cos(\alpha) + i \cdot A \cdot X \cdot \sin(\alpha). \tag{8.5.61}$$

Действительная часть комплекснозначной модели производственной функции отражает реальный выпуск продукции, а экономический смысл мнимой части комплексного выпуска продукции состоит в том, что Y_2 является оценкой скрытых возможностей (резервов) выпуска продукции, либо, если предприятие участвует в теневой экономике, мнимая часть характеризует оборот предприятия, направленный в теневую экономику. Эти скрытые возможности могут проявиться при оптимизации структуры ресурсов. Действительно, максимально возможный выпуск продукции при заданном объеме ресурсов будет

$$Y^* = \max Y = A \cdot X = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}\ . \tag{8.5.62}$$

Рассмотренная однопродуктовая модель позволяет достаточно просто строить производственные функции для объединенных производств. Покажем, как это сделать. Рассмотрим для этого производственную систему, объединяющую несколько производств. Для каждого производства известен комплексный выпуск продукции $Y^k = Y_1^k + iY_2^k$ и объем используемых ресурсов X^k. Тогда комплексный выпуск всей производственной системы будет равен:

$$Y = Y_1 + iY_2, \tag{8.5.63}$$

где $Y_1 = \sum_k Y_1^k, \quad Y_2 = \sum_k Y_2^k$.

Угол между структурным вектором всей системы и вектором ее оптимальной структуры можно определить из соотношения

$$tg\alpha = \frac{Y_2}{Y_1}. \tag{8.5.64}$$

Общий объем ресурсов используемых в системе будет

$$|X| = \sum_k |X^k|. \tag{8.5.65}$$

Комплексная производственная функция системы определится формулой

$$Y = Y_1 + iY_2 = A \cdot |X| e^{i\alpha}, \text{ где } A = |Y|/|X|. \tag{8.5.66}$$

Заметим, что в данном подходе удается построить производственную функцию структурного типа для системы производств, не определяя оптимальную структуру ресурсов для всей системы.

Свойства периодичности комплекснозначных моделей в описании цикличной экономической динамики. Простейшая дифференциальная модель динамики экономической системы имеет вид:

$$Y'(t) = \lambda(t) y(t),\ y(0) = y_0,\ t \in [0, \infty). \tag{8.5.67}$$

Здесь $y(t)$ – некоторый показатель, характеризующий состояние рассматриваемой экономической системы в момент t, параметр $\lambda(t)$ определяет темпы роста этого показателя, а y_0 – его начальное значение.

Уравнение (8.5.67) можно записать и в дифференциальной форме, а именно:

$$\frac{dY(t)}{y(t)} = \lambda(t)dt \quad (8.5.68)$$

Из уравнения (8.5.68) видно, что относительное приращение показателя за единичное приращение времени равно темпам роста $\lambda(t)$, которые могут меняться со временем или оставаться постоянными. Рассмотрим вначале простейший случай, когда $\lambda(t)=\lambda=const$. В этом случае решение дифференциального уравнения (8.5.67) будет, как известно, таким:

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} \quad (8.5.69)$$

Экспоненциальный рост показателя (при положительном λ) в экономике встречается – демографические процессы, рост основных производственных фондов и т.п. Но действуют экономические процессы таким образом в ограниченный промежуток времени – экспоненциальный рост заменяется линейным ростом, а затем и замедлением роста. Тем не менее, моделирование экономических процессов с помощью модели типа (8.5.69) в определённые промежутки времени имеет смысл. Очевидно при этом, что реальный экономический процесс описывается моделью (8.5.69) в тот промежуток времени, когда наблюдается экспоненциальный рост показателя, с некоторой ошибкой. Причины отклонения роста любого экономического показателя от некоторой гладкой траектории заключаются в воздействии на него множества факторов, существенная часть которых носит случайный характер, а воздействие других факторов исследователю просто неизвестно. Однако их совокупное влияние приводит к наличию в этих отклонениях цикличной составляющей. При такой постановке проблемы возникает задача создания моделей экономической динамики, которые позволяли бы моделировать подобные цикличные «колебания» в скорости изменения самих показателей.

Поскольку отклонения реальных значений от экспоненциальной траектории модели (8.5.69) можно смоделировать изменениями параметра λ, рассмотрим эту возможность. Действительно, если параметр λ положителен, то наблюдается экспоненциальный рост; если этот параметр равен нулю, то рост прекратится; если он принимает отрицательные значения, рост сменяется уменьшением экономического показателя во времени, то есть, изменения показателя λ во времени вокруг нулевого значения моделирует в определённой степени колебательный характер показателя $Y(t)$. Тогда с учётом всего сказанного логично предположить, что параметр λ меняется во времени так:

$$\lambda(t) = \lambda + a\cos\omega t\,, \qquad (8.5.70)$$

где *a* и *ω* – некоторые параметры, определяющие характер «колебаний» в динамике показателя *y(t)*. В этом случае модель (8.5.69) примет следующий вид:

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t} e^{\frac{a}{\omega}\sin\omega t}\,. \qquad (8.5.71)$$

Или

$$Y(t) = Y^1(t)Y^2(t), \qquad (8.5.72)$$

где $Y^1(t) = y_0 e^{\lambda t}, Y^2(t) = e^{\frac{a}{\omega}\sin\omega t}$.

Функция $Y^1(t)$ определяет решение с постоянными темпами λ, а функция $Y^2(t)$ - определяет возмущение этого решения.

Как легко убедиться, полученная модель характеризуется экспоненциальным ростом с периодическими колебаниями относительно этого роста. При этом следует отметить, что амплитуда колебаний показателя *Y* с ростом *t* увеличивается, то есть, моделируется расходящийся во времени процесс. То есть, данные колебания являются несимметричными в том смысле, что

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{Y(t) - e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}}dt \to \infty\,. \qquad (8.5.73)$$

Действительно:

$$\int_0^A \frac{Y(t) - e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}}dt = \int_0^{+\infty}(e^{a\sin\omega t} - 1)dt = F(A)\,. \qquad (8.5.74)$$

Раскладывая подынтегральное выражение, получим:

$$F(A) = \int_0^A (a\sin\omega t + \frac{a^2\sin^2\omega t}{2} + ...)dt\,. \qquad (8.5.75)$$

Откуда ясно, что

$$F(A)\to+\infty,\ A\to+\infty. \qquad (8.5.76)$$

Можно, конечно, использовать аддитивную модель типа

$$Y(t) = Y_0 e^{\lambda t} + \frac{a}{\omega}\sin\omega t\,, \qquad (8.5.77)$$

которая моделирует экономический рост с одной и той же амплитудой колебаний, но при этом параметр λ перестаёт нести в себе характеристику изменчивости темпов экономического роста. Модель становится механистической.

Эффекта моделирования расходящегося во времени процесса легко можно избежать, если представить *λ(t)* в виде

$$\lambda(t) = \lambda + \frac{a\omega\cos\omega t}{1 + a\sin\omega t}\,. \qquad (8.5.78)$$

В таком случае

$$Y(t) = Y_0 e^{\lambda t}(1 + a\sin\omega t)\,. \qquad (8.5.79)$$

Таким образом, представляя темпы роста λ(t) в виде некоторой периодической функции, можно получить модель колебаний функции *Y(t)* около некоторого среднего значения.

Этого можно проще добиться введением в модель вместо действительного параметра комплексного, например, представляя темпы роста *λ(t)* в виде комплексной переменной:

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + i\lambda_2(t)\,. \qquad (8.5.80)$$

Тогда и результирующий показатель будет представлять собой комплексную переменную:

$$Y(t) = Y_1(t) + iY_2(t)\,. \qquad (8.5.81)$$

Если теперь рассмотреть динамику темпа роста *λ(t),* которая была представлена в виде (8.5.70), то её постоянную часть *λ* можно отнести к действительной составляющей. Именно она определяет динамику показателя *Y*. Гармоническую составляющую комплексного параметра логично отнести к мнимой части. Тогда получим следующий комплексный параметр:

$$\lambda(t) = \lambda + ia\cos(\omega t), a > 0, \qquad (8.5.82)$$

Подставляя это значение в (8.5.69), получим для действительной части комплексной переменной (8.5.81):

$$\operatorname{Re}Y(t) = Y_1(t) = Y_0 e^{\lambda t} \frac{a}{\omega} \sin \omega t \,. \tag{8.5.83}$$

Полученное решение моделирует нестабильность показателя *Y(t)*, но как и решение (8.5.71) не является симметричным относительно исходного решения с постоянными темпами роста. Для получения симметричного решения можно представить *λ(t)* в виде:

$$\lambda(t) = \lambda + i\left[\arccos\left(\frac{1 + a\sin(\omega t)}{1 + a}\right)\right]', \; a>0. \tag{8.5.84}$$

Тогда

$$\operatorname{Re}Y(t) = Y_1(t) = Y_0 e^{\lambda t}(1 + a\sin \omega t), \tag{8.5.85}$$

В рассмотренной модели мнимые переменные следует представлять как некоторые скрытые факторы. Введение в модель скрытых факторов (как мнимых переменных) позволяет добиться нового уровня адекватности модели. По сути в модель вводятся дополнительные параметры, не требующие ясного экономического толкования. Это полностью соответствует реальной жизни, так как на любую экономическую систему действуют факторы, которые не могут быть адекватно описаны на языке математики. Как уже отмечалось выше, эти факторы связаны, прежде всего, с наличием в экономических системах людей, поведение которых не поддаётся математическому описанию. Можно описать лишь некоторые средние особенности поведения людей. Это делается с помощью аппарата теории вероятностей. Теория вероятностей убирает из моделей неопределённости, заменяя случайные величины на их средние значения, таким образом, сводя модель к стандартной форме, пригодной для математического исследования.

Нам нужно выполнить обратную операцию: ввести в модель неопределённость. Аппарат теории функции комплексной переменной вполне подходит для решения этой задачи. Вместо одной модели получаются две модели (соответствующие действительной и мнимой частям основного уравнения), взаимосвязанных друг с другом, одна из которых и моделирует неопределённость.

Таким образом, модель (8.5.67) должна быть представлена в виде:

$$\begin{cases} Y(t) = Y_1(t) + iY_2(t); \lambda(t) = \lambda_1(t) + i\lambda_2(t) \\ Y_1'(t) + iY_2'(t) = \lambda_1(t)Y_1(t) - \lambda_2(t)Y_2(t) + i(\lambda_1(t)Y_2(t) + \lambda_2(t)Y_1(t)) \\ Y_1(0) = Y_1; Y_2(0) = Y_2 \end{cases} . \tag{8.5.86}$$

Или как система взаимосвязанных уравнений:

$$\begin{cases} Y_1^{/}(t) = \lambda_1(t)Y_1(t) - \lambda_2(t)Y_2(t) \\ Y_2^{/}(t) = \lambda_1(t)Y_2(t) + \lambda_2(t)Y_1(t) \\ y_1(0) = Y_1; Y_2(0) = Y_2 \end{cases} \cdot \qquad (8.5.87)$$

Первое уравнение системы (8.5.87) определяет динамику реального показателя $Y_1(t)$, а второе уравнение определяет теневой (скрытый) процесс, протекающий параллельно с основным. Этот теневой процесс генерируется параметром $\lambda_2(t)$, который определяет скрытые свойства рассматриваемой системы. Заметим, что если $\lambda_2(t)=0$, то оба процесса протекают независимо и определяются одними и теми же уравнениями.

В качестве примера практического использования комплексных динамических моделей рассмотрим модель конкуренции двух предприятий.

Пусть первое предприятие продаёт продукцию в объёме V_0 и периодически прикладывает маркетинговые усилия по продвижению своего товара. Результатом этих усилий является некоторое повышение объёма продаж.

Второе предприятие продаёт продукцию в объёме W_0 и также периодически прикладывает усилия по продвижению своего товара, делая это в ответ на маркетинговую активность конкурента. Близко к реальности предположение о том, что маркетинговые усилия одной компании направлены на нейтрализацию маркетинговых действий другой компании. При постоянной ёмкости рынка это приводит к тому, что рост объёма продаж первой компании приводит к уменьшению объёма продаж второй компании и наоборот.

Модель динамики объёма продаж первой компании с учётом колебаний имеет вид:

$$V'(t) = \lambda_V(t)V(t) = \frac{a\omega\cos\omega t}{1 + a\sin\omega t}V(t); a < 1; t \in [0, +\infty); V(0) = V_0 \cdot \qquad (8.5.88)$$

Модель динамики объёма продаж второй компании:

$$W'(t) = \lambda_V(t)W(t) = \frac{-b\omega\cos\omega t}{1 - b\sin\omega t}W(t); b < 0; t \in [0, +\infty); W(0) = W_0 \cdot \qquad (8.5.89)$$

Решения уравнений (8.5.88) и (8.5.89) будут такими:

$$V(t) = V_0(1 + a\sin\omega t) \qquad (8.5.90)$$

и

$$W(t) = W_0(1 - b\sin\omega t) \cdot \qquad (8.5.91)$$

Заметим, что если на рынке есть другие предприятия и общий объём продаж товара этих двух предприятий не является постоянным, то $a \neq b$.

Конкурентная борьба двух предприятий при постоянной ёмкости рынка не приводит к улучшению финансового состояния ни одного из них, поскольку средняя величина продаж для каждого из них за достаточно большой промежуток времени остаётся величиной постоянной:

$$\bar{V} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V(t)dt = V_0, \tag{8.5.92}$$

$$\bar{W} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T W(t)dt = W_0. \tag{8.5.93}$$

Предположим теперь, что на рынке помимо этих двух компаний работают ещё несколько других компаний, поведение которых нам не известно. Однако их совместные действия и поведение потребителей таковы, что объёмы продаж носят периодический (циклический) характер с той же частотой ω. Эти процессы можно учесть с помощью комплексного темпа роста:

$$\lambda_i(t) = (\arccos \frac{1 + d \sin \omega t}{1 + d})'. \tag{8.5.94}$$

Уравнения динамики объёмов продаж предприятий можно записать так. Для первого предприятия:

$$V'(t) = (\lambda_V(t) + i\lambda_i(t))V(t),\ V(\mathrm{t}) = V_1(t) + iV_2(t). \tag{8.5.95}$$
$$V_1(0) = V_0,\ V_1(0) = 0$$

Для второго предприятия:

$$W'(t) = (\lambda_W(t) + i\lambda_i(t))W(t),\ W(\mathrm{t}) = W_1(t) + iW_2(t). \tag{8.5.96}$$
$$W_1(0) = W_0,\ W_1(0) = 0$$

Подставляя в эти уравнения значение (8.5.94) и решая их, получим:

$$V_1(t) = V_0(1 + a \sin \omega t)(1 + d \sin \omega t), \tag{8.5.97}$$

$$W_1(t) = W_0(1 - b \sin \omega t)(1 + d \sin \omega t). \tag{8.5.98}$$

Вычислив с учётом этого средние величины объёмов продаж (8.5.92) и (8.5.93), имеем:

$$\bar{V} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T V_0(1+a\sin\omega t)(1+d\sin\omega t)dt = V_0(1+\frac{ad}{2}), \quad (8.5.99)$$

$$\bar{W} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T W_0(1-b\sin\omega t)(1+d\sin\omega t)dt = W_0(1-\frac{bd}{2}). \quad (8.5.100)$$

Таким образом, средний доход первого предприятия вырос, а второго – уменьшился.

Приведённая выше модель моделирует механизм конкурентной борьбы, когда конкуренция строится не на прямой борьбе между двумя предприятиями, а на оптимизации времени приложения маркетинговых усилий. То из предприятий получает дополнительный доход, которое согласует свои действия с колебаниями рынка (в маркетинге такая политика называется «синхромаркетингом»). Заметим, что если бы предприятия не занимались продвижением своих товаров, то $a=b=0$ и

$$V(t) = V_0(1+d\sin\omega t), \quad t\in[0,+\infty), \quad (8.5.101)$$

$$W(t) = W_0(1+d\sin\omega t), \quad t\in[0,+\infty). \quad (8.5.102)$$

В этом случае объёмы продаж периодически менялись бы в согласии с динамикой рынка. В заключение заметим, что если взглянуть на рассмотренный пример моделирования конкуренции с позиций классического моделирования, то возникает вопрос: каким ещё способом можно было бы ввести в модели динамики продаж колебания свойств рынка? Простого ответа на поставленный вопрос в моделировании с использованием действительных переменных не видно.

Заключение

В декабре 2004 года, когда было впервые предложено использовать комплексные числа как форму представления социально-экономических переменных, было примерно ясно, в каком направлении развивать это предложение, но тогда было сложно предвидеть, что модели комплексных переменных будут давать исследователю не столько альтернативные результаты, сколько новые.

Шесть лет напряжённого труда над этой проблематикой коллектива авторов позволил сформировать основы того нового научного направления, которое было названо «комплекснозначная экономика». Пренебрежительное отношение Российского государства к образованию и науке, которое возобладало в стране с 90-х годов XX века, мешало нам заниматься этой проблематикой концентрированно – каждому, кто работал и работает над комплекснозначной экономикой, приходится сначала думать о «хлебе насущном» - как заработать на жизнь, а только после этого обращаться к научным исследованиям.

В такой ситуации неоценимой оказалась поддержка, оказанная нам Российским фондом фундаментальных исследований. При поддержке этого фонда выполнялись работы в рамках гранта №07-06-00151 «Разработка основ экономико-математического моделирования с использованием комплексных переменных», который длился три года с 2007 по 2009 год. Помимо того при материальной поддержке РФФИ по итогам конкурса издательских проектов была выпущена монография «Производственные функции комплексных переменных» (грант 07-06-07030-д), которая явилась первым столь широко представляемым научной общественности трудом по комплекснозначной экономике.

Как можно заметить из содержания монографии, она представляет собой завершённый труд, представляющий экономисту основы комплекснозначной экономики – от общего представления комплекснозначных экономико-математических моделей до конкретных методик применения комплекснозначных моделей. Опираясь на полученные результаты, можно развивать это научное направление и дальше, находя всё больше и больше задач экономической практики, в которых комплекснозначная экономика позволяет углубить понимание процессов и дополнить арсенал экономико-математических методов и моделей новым более «тонким» инструментом исследования.

Многие положения монографии из-за отсутствия времени и сил, изложены в ней тезисно, без необходимого углубления в поставленную проблематику.

Эконометрика комплексных переменных являет яркий пример этого. В ней тщательно разобраны вопросы применения метода наименьших квадратов применительно к задаче оценки коэффициентов комплекснозначных моделей и показано, что посылки, принятые в современной теории математической статистике относительно комплексной случайной переменной, не являются верными – предположения о том, что основополагающие характеристики, такие как дисперсия, корреляционный момент и ковариация должны быть вещественными, поскольку они характеризуют меру колеблемости, в дальнейшем развитии приводят к тупиковому результату. Устранение этого предположения и выдвижение гипотезы о возможности существования комплексной дисперсии и корреляционного момента сразу же устраняют разбалансированность дальнейших эконометрических построений и позволяют получить требуемые статистические оценки.

Поскольку понятие «минимум функции» в теории функций комплексного переменного не существует, при нахождении оценок МНК был сформулирован соответствующий критерий, который позволяет найти искомые значения коэффициентов моделей. Первые такие построения оценивались с помощью матрицы Гессе на то, что оценки соответствуют минимуму оставленного критерия, но хотелось бы получить такой вывод в универсальной форме – доказать, что для всех случаев эти оценки соответствуют этому минимуму. Отсутствие времени и сил не позволило в должной мере решить эту задачу.

Удалось сформировать подход и метод интервального оценивания коэффициентов эконометрической линейной комплекснозначной модели, но хотелось бы распространить его и на другие статистические характеристики, например, на выборочное значение комплексного коэффициента парной корреляции.

В достаточно полном объёме исследованы свойства комплекснозначных производственных функций – функций комплексного аргумента, функций комплексной переменной и даже функций нескольких комплексных аргументов, но пока что нет времени и сил для рассмотрения в этой части теории производственных функций такого важного фактора, как научно-технического прогресса (инноваций).

Новые результаты получены и в теории фондового рынка, однако и они нуждаются в более тщательном осмыслении и развитии. Цикличность рынка, как его объективное свойство, может наилучшим образом отражено именно с помощью моделей комплексной переменной, но и это направление в работе освещено тезисно.

Новое направление научных исследований было получено в части построения двухфакторных моделей в условиях мультиколлинеарности, но распространить этот подход на задачу построения моделей с большим числом факторов пока не удалось – гипотезы, высказанные по этому поводу, нуждаются в тщательной проверке и обосновании.

Поэтому материалы, изложенные в этой монографии, представляют собой лишь основу комплекснозначной экономики – формирование самой комплекснозначной экономики как полного и сбалансированного раздела экономики, - ещё впереди.

Список публикаций по комплекснозначной экономике

1. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Исследование свойств производственной функции комплексного аргумента. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2005 . – 24 с.
2. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции в виде комплексного числа в прогнозировании // Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы Международной научно-практической конференции, 29-30 апреля 2005 г.- Воронеж, Изд-во ВГУ, 2005. – Ч.1. - С. 58 – 61.
3. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. О возможности использования комплексных чисел в теории производственных функций // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2005, № 4. – С. 5 – 16.
4. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Прогнозирование бюджетных доходов с помощью производственной функции в виде комплексной переменной // Состояние и проблемы трансформации финансов и экономики регионов в переходный период: материалы Второй Международной научно-практической конференции 12 мая 2005 г. - Ч.1. – Черновцы – Букрек, 2005. – С. 330 – 331.
5. Светуньков С.Г. Применение теории комплексного переменного в экономике как новая парадигма экономико-математического моделирования // Теория функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании: материалы Всероссийского научного семинара. 19 декабря 2005 г. / Под ред. проф. С.Г.Светунькова. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006. - С. 5 – 21.
6. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных // Теория функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании: материалы Всероссийского научного семинара. 19 декабря 2005 г. / Под ред. проф. С.Г.Светунькова. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006. - С. 21 – 38
7. Светуньков С.Г. Комплексные переменные в теории индексов // Теория функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании: материалы Всероссийского научного семинара. 19 декабря 2005 г. / Под ред. проф. С.Г.Светунькова. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006. - С. 39 – 44.
8. Светуньков С.Г. Метод Брауна для краткосрочного прогнозирования комплексных переменных // Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы Второй Международной научно-практической конференции. 30 – 31 марта 2006. – Воронеж, Изд-во ВГУ, 2006. - С. 25 – 32.
9. Савинов Г.В., Светуньков С.Г. Комплексные переменные в экономическом анализе и моделировании // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2006, № 4. - С. 21-35.
10. Светуньков С.Г. Конформное отображение степенной аналитической функции с комплексными коэффициентами в экономических приложениях // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск №15. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007. - с. 45-49.
11. Светуньков И.С. Обратные производственные функции комплексного переменного // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск №15. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007. - с. 88-93.
12. Светуньков И.С. Экономический анализ предприятия с помощью производственных функций комплексных переменных // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск №16. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007. – с. 76 – 81.
13. Светуньков С.Г.Метод наименьших квадратов для эконометрических моделей комплексных переменных // Экономическая кибернетика: системный анализ в эко-

номике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск №16. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007 – с. 86 – 91.

14. Светуньков С.Г. Корреляционный анализ в эконометрии комплексных переменных // Учёные записки факультета регионоведения, информатики, туризма и математических методов: Сборник научных трудов. Выпуск 1. / Под ред. проф. М.А.Клупта. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – С. 34 – 41.
15. Светуньков И.С. МНК применительно к производственной функции комплексных переменных // Учёные записки факультета регионоведения, информатики, туризма и математических методов: Сборник научных трудов. Выпуск 1. / Под ред. проф. М.А.Клупта. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – С. 41 – 46.
16. Светуньков С.Г. Конформное отображение степенной аналитической функции с комплексными коэффициентами в экономических приложениях // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2008, № 1.
17. Чанышева А.Ф. Проблемы построения доверительных границ в эконометрике комплексных переменных // Экономическое прогнозирование: модели и методы: Материалы IV Международной научно-практической конференции, 10 – 11 апреля 2008 г. ч.1. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2008. - С. 94 – 97.
18. Светуньков С.Г Оценка коэффициентов прогнозных эконометрических моделей комплексных переменных с помощью МНК // Экономическое прогнозирование: модели и методы: Материалы IV Международной научно-практической конференции, 10 – 11 апреля 2008 г. ч.1. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2008. – С. 81-87.
19. Светуньков И.С. Прогнозирование факторов производства с помощью производственных функций // Экономическое прогнозирование: модели и методы: Материалы IV Международной научно-практической конференции, 10 – 11 апреля 2008 г. ч.1. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2008. – С. 78 – 81.
20. Помялова Е.В. Оценка параметров классифицирующей производственной функции комплексного переменного // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении. Сборник научных трудов. Выпуск 17. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – С. 71 – 75.
21. Светуньков С.Г. Комплекснозначная экономика // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении. Сборник научных трудов. Выпуск 17. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – С. 90 – 95.
22. Светуньков И.С. Проблема размерности в комплекснозначной экономике // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении. Сборник научных трудов. Выпуск 17. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. – С. 95 - 101.
23. Корецкая Т.В. Краткосрочное прогнозирование комплексных переменных с помощью метода Брауна // Вестник ОГУ, 2008, №11. – с. 121 – 126.
24. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 136 с.
25. Светуньков С.Г. Основы эконометрии комплексных переменных. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008. - 108 с.
26. Светуньков С.Г. О некоторых свойствах комплексного коэффициента парной корреляции // Бізнес-Інформ (Бюлетень ВАК Украіни) // № 2 (1) 2009 (361). - с. 18 – 20.
27. Светуньков С.Г., Савков И.С. Моделирование теневой экономики с помощью степенной производственной функции комплексны переменных. // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск №19 – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2009

28. Светуньков С.Г. Некоторые проблемы комплекснозначной экономики // Теория хозяйственных систем: Материалы всероссийской научно-практической конференции, посвящённой 75-летию профессора И.М.Сыроежина. 21 ноября 2008 г. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2009. – с. 152 – 157.
29. Сиротина Е.В. Экономическая интерпретация ошибки аппроксимации классифицирующей производственной функции комплексного переменного // Теория хозяйственных систем: Материалы всероссийской научно-практической конференции, посвящённой 75-летию профессора И.М.Сыроежина. 21 ноября 2008 г. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2009. – с. 203 – 207.
30. Чанышева А.Ф. Проблемы построения доверительных интервалов для уравнения регрессии комплексных переменных // Теория хозяйственных систем: Материалы всероссийской научно-практической конференции, посвященной 75-летию профессора И.М. Сыроежина. 21 ноября 2008 г. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2009. – С. 207 - 212.
31. Чанышева А.Ф. Нахождение интервальной оценки комплексного уравнения регрессии // Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы Международной научно-практической конференции. 5 - 6 апреля 2009 г.: в 2ч., под ред. Давниса В.В. Воронеж.: Изд-во ВГУ, 2009.
32. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Степенная производственная функция комплексных переменных с действительными коэффициентами //Проблеми економічноі кібернетики: Тези доповідей XIV Всеукраінськоі науково-методичноі конеренціі (8-9 жовтня 2009 р.м. Харків). – Харьков: ХНУ имені В.Н.Каразина, 2009. – С. 278 – 280.
33. Помялова Е.В. Механизм управления предприятием на базе методики построения классифицирующей производственной функции аппроксимации комплексного переменного // Россия в современной мире: Социально-экономическое состояние и перспективны развития: Сборник научных статей аспирантов и студентов, вып. 4 – СПб.: НОУ ВПО Институт бизнеса и права, 2008. – с. 64 – 67.
34. Светуньков С.Г., Корецкая Т.В. Сравнительное исследование классического индекса и индекса комплексной переменной на примере динамики акций ММВБ // Вестник Оренбургского государственного университета, 2009, №5 – С. 78 – 81.
35. Светуньков С.Г., Абдуллаев И.С. Экономическая динамика и производственные функции // Вестник Оренбургского государственного университета, 2009, №5 – С. 110 -115.
36. Светуньков С.Г., Абдуллаев И.С. Некоторые проблемы комплекснозначной экономики // Вопросы вычислительной и прикладной математики: методы и алгоритмы решения задач математической физики и механики: сб. науч. тр. Вып.123 / Акад. наук Республ. Узбекистан, Ин-т математики и информ. технологий. - Ташкент: Академия Наук Республики Узбекистан, 2009. – С. 135 -142
37. Merkulova T.V., Prikhodko F.I. Dynamics of macroeconomic indicators modeling by functions of complex variables // Бізнес-Інформ (Бюлетень ВАК Украіни) // № 4 (1) 2010 (381). С. 67 –71.
38. Светуньков С.Г., Глущенкова М.И., Земляная Н.А., Цедякова Е.Б. Мультиколлинеарность в эконометрии и линейная функция комплексного аргумента // Бізнес-Інформ (Бюлетень ВАК Украіни) // № 4 (1) 2010 (381). С. 95 – 97.
39. Светуньков И.С. Самообучающаяся модель краткосрочного прогнозирования социально-экономической динамики // Модели оценки , анализа и прогнозирования социально-экономических систем: Монография / Под ред. Т.С.Клебановой, Н.А.Кизма – Ч.: ФЛП Павленко А.Г., ИД «ИНЖЭК», 2010. – с. 11 – 33.

Оглавление