С. Г. СВЕТУНЬКОВ

ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Санкт-Петербург
Медиапапир
2019

УДК 330.4
ББК 65.05
С24

Рецензент:

Торопцев Евгений Львович, д-р экон. наук,
профессор Северо-Кавказского федерального университета

Асанович Валерий Яковлевич, д-р хим. наук,
профессор Белорусского государственного экономического университета

Светуньков С. Г. Основы эконометрики комплексных переменных. — СПб.: Медиапапир, 2019. — 106 с.

В научной монографии излагаются основные инструменты регрессионно-корреляционного анализа комплексной случайной величины, разработанные и применённые для случая решения задач эконометрики комплексных случайных переменных.

Монография может быть полезной всем тем учёным, кто занимается исследованием экономики с помощью методов её математического моделирования.

Издание выполнено при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-010-00610\19 «Теория, методы и методики прогнозирования экономического развития авторегрессионными моделями комплексных переменных».

ISBN 978-5-00110-102-4

ВВЕДЕНИЕ

Задачи принятия решений, которые непрерывно возникают в процессе управления экономикой на любом уровне иерархии управления — от рабочего места и производственного участка до мировой экономики, требуют обработки значительных массивов информации для информационного обеспечения процесса принятия решений. И если на нижнем уровне иерархии принятия решений — рабочем месте — чаще всего можно обойтись интуитивными экспертными оценками, поскольку задача принятия решений тривиальна, а количество и состав обрабатываемой информации, касающейся ситуации, представляются элементарными, то с увеличением уровня иерархии задача становится всё более и более сложной. Здесь уже невозможно обойтись без использования математических методов, разнообразие и сложность которых возрастает с ростом сложности самой задачи, изменяющейся при переходе к всё более высокому уровню управления экономикой.

Сегодня арсенал математических методов и моделей, используемых в экономике, весьма обширен. Но это разнообразие отнюдь не гарантирует успешного решения всех задач управления, напротив, можно привести по крайней мере десятки направлений экономико-математического моделирования, когда модели действительных переменных, упираясь в естественные рамки своих возможностей, описывают экономику весьма посредственно. В этих условиях экономисты либо полностью отказываются от применения математических методов, либо переводят экономико-математические модели из области решения практических задач в область теории условных объектов, имеющих мало общего с реальной экономикой. В этом случае учёные вынуждены вводить ограничения и предположения, которые преобразуют эти модели из множества абстрагированных образов во множество образов идеализированных, обладающих свойствами, которые ни один реальный экономический объект не имеет. Взять хотя бы модель «вечно живущего индивида», являющуюся одной из множества идеализированных моделей в анналах различных теоретических разделов экономики. Свойство «вечно» жить, как известно, не присуще ни одному из реально существующих индивидов, более того — оно абсолютно противоречит реальности. Построение подобных моделей и их серьёзное обсуждение в научных кругах является выражением беспомощности современной науки продвинуться дальше в решении некоторых практических задач моделирования экономики.

Ограниченность экономико-математических моделей действительных переменных очевидна. Попытки развить их за счёт включения в модели новых переменных или усложнения вычислительного аппарата посредством всё более производительной вычислительной техники — важное направление совершенствования экономико-математического моделирования, отрицать которое ни в коем случае не стоит. Но сегодня уже ощутима потребность в использовании иных принципов экономико-математического моделирования, и такие принципы представляются теорией функций комплексного переменного (ТФКП).

Следует отметить, что экономисты давно сталкивались с ситуациями, когда в ходе построения и реализации некоторых моделей им приходилось вычислять мнимые корни. Наиболее смелые из них исследовали поведение таких моделей комплексной переменной как одно из интересных явлений в моделировании экономики, но и только. Практических рекомендаций и предложений по широкому использованию комплексной переменной из таких построений не следовало. Вот, например, В. А. Колемаев при рассмотрении однономенклатурной системы управления запасами как колебательным звеном предлагает решать дифференциальные уравнения (*Колемаев*, 2005, с. 27–29), корни которых являются комплексными и сопряжёнными, модель в результате этого становится колебательной, но и только. Комплексные числа в этом примере скорее выступают как демонстрация возможностей математических методов, но не как новый инструмент моделирования и познания экономики.

В экономической литературе известны попытки использования в моделировании экономики преобразования Лапласа, когда для моделирования сложных процессов, описываемых моделями действительных переменных, прибегают к их трансформации в модели комплексной переменной, работать с которыми оказалось проще. После решения этой упрощённой задачи в области комплексных переменных, осуществляется обратное преобразование в область действительных переменных. И. З. Мустаев, например, применяет преобразование Лапласа к моделированию чистой приведённой стоимости денежного потока. В итоге получается комплексная переменная, действительная часть которой, по мнению автора, имеет экономический смысл среднерыночной доходности в пересчёте на один год, а мнимая — смысл частоты экономических процессов (*Мустаев, Гизатуллин*, 2007, с. 93).

Z-преобразования Лорана применительно к задаче прогнозирования социально-экономической динамики как модификацию дискретного преобразования Лапласа предлагает В. К. Семёнычев (*Семёнычев, Семёнычев*, 2006, с. 101). В этом случае модель нелинейного тренда преобразуется с помощью z-преобразования в модель комплексной переменной, с помощью чего достигается перепараметризация исходной модели, что облегчает задачу оценки коэффициентов исходного нелинейного тренда. Здесь аппарат ТФКП используется как инструмент поддержки использования в экономике моделей действительных переменных.

Встречаются и иные отдельные примеры использования комплексных переменных для моделирования частных экономических задач. Но представление экономики как объекта для моделирования с помощью методов ТФКП ни в одной из этих работ не осуществляется. Эта теория используется только как инструмент поддержки моделей действительных переменных, да и только.

Здесь следует отметить, что в естественно-научных и инженерно-технических науках без моделей комплексных переменных сегодня вообще немыслимо что-либо рассчитать. Примерно сотню лет назад учёные начали использовать теорию функций комплексных переменных для описания неравномерных полей, для моделирования сложных потоков, для описания вращающихся полей и стали получать модели комплексных переменных, которые значительно проще описывают сложные объекты и явления, нежели модели действительных переменных.

Поэтому задачи гидродинамики и газовой динамики, теория упругости, расчёт электрических контуров и электрических переходных процессов, физика микро- и макромира, авиастроение, самолётостроение и многие-многие другие разделы современной науки используют комплексные переменные как основной математический инструмент моделирования.

То есть теория функций комплексного переменного дала учёным удобный инструмент моделирования сложных объектов, но экономисты до сих пор игнорируют мощь и богатство инструментария этой теории. Думаю, что вызвано это в первую очередь привычкой использования принципа простоты и бритвы Оккама.

Принцип простоты учит использовать простые модели, если нет необходимости использовать более сложные. Поэтому некоторые учёные считают, что ситуация с инструментарием моделирования экономики является удовлетворительной, и нет оснований «умножать сущности сверх надобности» — достаточно использовать тот математический аппарат, который есть в их распоряжении.

Учёные, занимающиеся экономико-математическим моделированием, проходят мимо очевидного факта — комплексная переменная сама по себе может рассматриваться как модель: модель, которая характеризует свойства объекта более комплексно, поскольку состоит из двух действительных переменных, а не из одной, как это характерно для моделей действительных переменных.

Воспользовавшись теорией функций комплексных переменных, можно связать функциональной зависимостью любую пару действительных чисел. Ситуации, когда в экономике можно поставить в функциональное соответствие друг другу пару значений, встречаются достаточно часто.

Когда мы в экономике рассматриваем такой экономический показатель, как, например, валовая прибыль G, то мы понимаем, что он представляет возможность оценить только одну сторону сложного экономического явления — результата производственного процесса. Не случайно, когда возникает ситуация принятия решений, никто не довольствуется только критерием максимума валовой прибыли, для осмысления ситуации и принятия правильного решения изучают дополнительные показатели результатов производства. Это только в современной экономической теории объясняют поведение фирмы, ориентируясь на критерий максимума валовой прибыли. В реальной экономике в качестве не менее важного экономического показателя рассматривают показатели затрат на производство продукции, или, как чаще выражались в прежние годы — издержки производства C. А потом, соотнеся валовую прибыль с издержками производства, вычисляют, например, рентабельность. Поскольку именно рентабельность является тем экономическим показателем, который отражает и затраты, и результаты, то есть является показателем экономической эффективности производства, его используют как ещё один дополнительный показатель для принятия экономического решения.

В реальной экономической практике, описывая с помощью моделей действительных переменных некоторый производственный процесс, для принятия решения учёные вынуждены моделировать и валовую прибыль, и издержки производства. Поскольку построение двух моделей не очень удобно и более затратно, строят одну модель, складывая валовую прибыль с издержками, в результате чего получают валовой выпуск Q. Именно валовой выпуск Q и рассматривается в экономико-математическом моделировании как основной производственный результат.

Желание одновременного моделирования двух экономических переменных — валовой прибыли и издержек производства легко удовлетворяется, если рассматривать производственный результат как комплексное число. Это комплексное число в таком случае само по себе выступает как модель, отражающая результаты производства. Для рассматриваемого случая она может быть представлена в таком виде:

$$Z = C + iG. \tag{1}$$

Здесь i — мнимая единица, относительно которой известно, что она обладает свойством $i^2=-1$.

Рассматривая и моделируя новое число Z, мы тем самым одновременно учитываем и валовую прибыль G, и издержки производства C, поскольку они являются неотъемлемыми характеристиками комплексного числа. То есть, осуществляя действия с какой-либо одной комплексной переменной, исследователь выполняет тем самым действие с двумя действительными переменными. Следовательно, использование комплексной переменной типа (1) как некоторой модели, связывающей воедино две экономические переменные, позволяет получить значительно более компактную запись, с одной стороны, и включить в экономико-математическую модель более подробную информацию о моделируемом объекте, с другой стороны, и рассматривать их во взаимосвязи — с третьей стороны.

Но если бы только на этом заканчивались новшества, вводимые в экономико-математическое моделирование применением комплексных переменных, то, может быть, этого делать и не стоило. Моделируемые с помощью комплексных переменных экономические показатели и процессы значительно более обширны, чем это кажется на первый взгляд. Действительно, если просто просуммировать вещественную и мнимую части переменной (1), то можно получить известный показатель валовой выручки:

$$Q = C + G, \tag{2}$$

а если найти отношение мнимой части к действительной, то получим арктангенс полярного угла комплексного числа (1) и... рентабельность по себестоимости:

$$r = \frac{G}{C} = arctg\varphi. \tag{3}$$

То есть, моделируя поведение только одной комплексной переменной, исследователь тем самым получает возможность изучать характер изменения не только двух составляющих её переменных, но и ряда дополнительных показателей, являющихся производными от них. В рассматриваемом в качестве примера случае — получается моделирование сразу четырёх важных экономических показателей.

Но и это ещё не всё! Комплексное число может быть представимо не только в арифметической форме, но и в экспоненциальной и тригонометрической. А для этого, рассматривая комплексное число на комплексной плоскости, его представляют в полярных координатах. Оно на такой плоскости характеризуется модулем и полярным углом. Модуль комплексного числа (1), определяемый как

$$R = \sqrt{G^2 + C^2}\,, \tag{4}$$

не имеет аналогов в системе технико-экономического анализа, и представляет собой новый экономический показатель, отражающий масштаб производства. Его использование на практике может расширить диагностический аппарат, например, такого раздела экономики, как анализ хозяйственной деятельности. Отношение валовой выручки Q к масштабу R также может дать дополнительную характеристику производства, свойства которой могут быть полезны при осуществлении экономического анализа. Такие примеры можно продолжать и продолжать. В каждом случае применения моделей комплексных переменных возникают всё новые и новые возможности для более подробного, более детального моделирования экономики.

При осуществлении каких-либо математических действий с двумя действительными переменными, выполняются математические операции только с этими двумя переменными, а, если осуществлять аналогичные действия с двумя комплексными числами, например, умножая одно комплексное число на другое комплексное число, тем самым одновременно выполняется математическая операция сразу с четырьмя действительными числами.

Таким образом, даже простое представление экономических показателей и факторов в форме комплексного числа (1) уже даёт много новых возможностей для исследователя и экономико-математического моделирования. Но математические действия с комплексными числами дают результат, нетривиальный для действий с вещественными числами. Именно поэтому в математике существует раздел под названием «Теория функций комплексного переменного». Использование этого нового для экономики математического аппарата приводит к расширению инструментальной базы моделирования экономики, поскольку модели комплексных переменных иначе описывают взаимосвязь между переменными, нежели модели действительных переменных. Зачастую происходит так, что очень сложные взаимосвязи между действительными переменными проще описать с помощью моделей и методов ТФКП, нежели с помощью моделей действительных переменных.

Конечно, как следует из разделов теории функций комплексного переменного, любая комплекснозначная функция в итоге может быть представлена как система двух функций действительных переменных, но эти функции действительных переменных чаще всего оказываются столь сложными, что их на практике и не применяют — простые модели комплексных переменных имеют очень сложные аналоги в области действительных переменных. В соответствующих разделах этой монографии такие примеры будут приводиться.

Как известно, действительное число представляет собой некоторый отрезок на числовой оси, имеющий нулевую точку и устремляющийся в плюс бесконечность или минус бесконечность (рис. 1, точка Y).

Это действительное число характеризуется расстоянием отрезка от нулевой точки до числа. Если число находится на числовой оси левее нулевой точки, оно будет отрицательным, а если оно находится на числовой оси правее нулевой точки, то оно будет положительным.

Комплексное число представляет собой точку не на оси, а на комплексной плоскости. Поэтому для того, чтобы однозначно определить данную точку на комплексной плоскости, одной характеристики типа отрезка прямой линии не достаточно. Для этого необходимо использовать уже две координаты — отрезок на оси вещественной части и отрезок на оси мнимой части (рис. 1, точка Z).

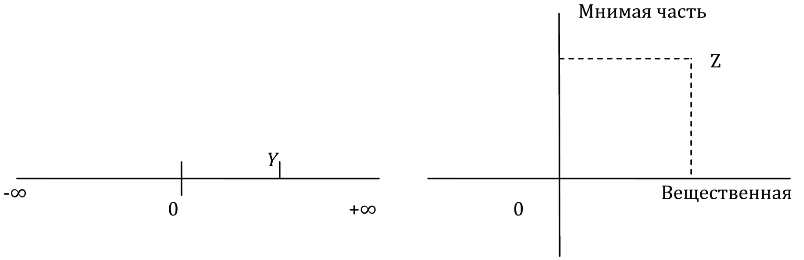


Рис. 1. Геометрическая интерпретация действительного (Y) и комплексного (Z) чисел

Когда я говорю о том, что ТФКП даёт при применении в экономике много новых знаний, то это вовсе не означает, что математические действия с комплексными переменными лучше, чем такие же действия с действительными переменными, а модели комплексных переменных лучше, чем модели действительных переменных. Нет! Всё вышесказанное следует трактовать только так — математические действия с комплексными экономическими переменными дают *другие* результаты. И поэтому математические модели комплексных экономических переменных моделируют *другие* экономические процессы. В некоторых случаях модели комплексных переменных будут лучше описывать экономические процессы, чем модели действительных переменных, а в некоторых — хуже.

Но именно представление пары экономических показателей в форме комплексного числа, как это сделано в случае производственного результата, открывает перед экономистами возможность использования в целях моделирования экономики теорию функций комплексного переменного. В этой теории функции, переменными которых выступают комплексные числа, получили названия «комплекснозначных». *Комплекснозначная экономика — это раздел экономико-математического моделирования, переменными которого выступают комплексные значения экономических показателей*.

Области применения математических методов в экономике самые разнообразные — от экономической теории до актуарных вычислений. И практически в каждом из таких разделов экономики могут использоваться комплекснозначные модели. Когда экономисту приходится строить математические модели на основе имеющихся статистических данных, то чаще всего он имеет дело с эконометрикой.

Почему я сказал «чаще всего», а не «всегда»? Дело в том, что экономист имеет дело с двумя типами объектов:

1) объекты, сведения о которых не меняются во времени, а меняются в пространстве — это так называемая «пространственная экономика»,

2) объекты, сведения о которых меняются во времени — это «экономическая динамика».

В первом случае экономист сталкивается с классической задачей математической статистики, поскольку статистические данные вполне можно рассматривать как выборочные из генеральной совокупности, а сам процесс — как обратимый. Здесь лучшими методами исследования будут эконометрические методы.

Во втором случае чаще всего выборочный метод не применим, так как анализируемые данные не являются выборкой из генеральной совокупности, а сам процесс динамики объекта является необратимым. Эконометрика, применённая в этом случае, будет давать ошибочные результаты.

В данной монографии мы будем рассматривать исключительно задачи, связанные с эконометрическими моделями пространственной экономики, для которой выполняются все основные посылки выборочного метода. Вопросы построения комплекснозначных моделей экономической динамики рассматриваться в этой книге не будут — это отдельная тема, элементы которой опубликованы в 2012 году (*Svetunkov*, 2012).

Я хочу выразить благодарность своим ученикам, которые решали некоторые частные вопросы, связанные с разработкой материалов этой книги и на которые я мог опираться. Даже их неудачные попытки решить сложные проблемы являлись важным научным результатом, поскольку они сужали круг научных гипотез о сути комплекснозначной эконометрики. Среди них, прежде всего, я должен отметить к. э. н., PhD И. С. Светунькова, который не только вместе со мной начал работу по формированию комплекснозначной экономики, но и продолжает эту работу сегодня самостоятельно в области экономического прогнозирования. Его ценные советы при чтении рукописи книги по мере своих сил я учитывал при подготовке данного издания.

Хочу отметить научные исследования к. э. н. А. Ф. Чанышевой, к. э. н. Т. В. Корецкой, к. э. н. Е. В. Сиротиной, А. М. Чуважова, Е. А. Прытковой, Д. В. Барыева, Е. А. Гольцева, В. В. Мацкевич, Н. Н. Питухина, Ю. И. Селивановой, Г. Сирук и Н. И. Шайхлеевой, которые мне очень помогли в решении этой сложной системной задачи — формировании основ эконометрики комплексных переменных.

Конечно же, я с благодарностью должен отметить решающий вклад в поддержку моих исследований со стороны РФФИ, чьи гранты выступали не столько серьёзным финансовым подспорьем, сколько важнейшей моральной помощью, подтверждая научную значимость проводимых исследований в области комплекснозначной экономики. Вот и данное исследование проводится при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-010-00610\19 «Теория, методы и методики прогнозирования экономического развития авторегрессионными моделями комплексных переменных».

Поскольку материалы данной монографии являются новыми, в ней могут быть неточности, описки или даже ошибки. Поэтому я буду признателен за любые критико-конструктивные замечания и предложения.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Поскольку в экономико-математическом моделировании комплексные переменные не использовались как самостоятельные переменные, действия с которыми позволяют формировать оригинальные экономико-математические модели, то мало кто из экономистов знаком со свойствами этих переменных и основными правилами действий с ними. Поэтому в данном параграфе излагаются основные понятия теории функций комплексных переменных, без знания которых неподготовленному читателю комплекснозначная эконометрика будет не понятна. Читателям, знакомым с теорией функций комплексного переменного, этот параграф можно пропустить.

В 1572 году в маленьком итальянском городке Кура была опубликована рукопись скончавшегося в этом же году итальянского математика Рафаэля Бомбелли. Книга называлась «Алгебра». В ней, в частности, Рафаэль Бомбелли показал, как можно решить кубическое уравнение

$$x^3 = 15x + 4\,. \tag{1.1}$$

Корень кубических уравнений в то время находили с помощью формулы Сципиона дель Ферра. Применительно к поставленной задаче нахождение корня должно было быть осуществлено так:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - (\frac{15}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{(\frac{4}{2})^2 - (\frac{15}{3})^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{0 - 121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{0 - 121}}\,. \tag{1.2}$$

Как видно, в формуле в квадратном корне получились отрицательные значения, что приводило к выводу о том, что найти решение этого уравнения не удастся. Из простого геометрического смысла задачи (1.1) следует, что решение есть, но найти его арифметически не получалось, поскольку в подкоренном выражении в правой части (1.2) находится отрицательное число.

Бомбелли предложил не обращать внимания на знак минус и находить решение, используя корень из отрицательного числа. Тогда выражение под кубическим корнем каждого из слагаемых правой части (1.2) может быть записано как пара сопряжённых комплексных чисел (*Bombelli, 12*):

$$(2+\sqrt{0-1});(2-\sqrt{0-1})\,. \tag{1.3}$$

Если их теперь подставить в (1.2) и сложить, то можно получить искомое решение задачи, а именно — корень кубического уравнения, $x = 4$.

Долгое время подход Бомбелли учёные рассматривали как удобный математический фокус, откуда и пошло название «мнимая единица» и «мнимые числа». Число, состоящее из двух частей, в котором есть как действительная (вещественная), так и мнимая части, в последующем получило название «комплексного числа».

Комплексное число, как видно, представляет собой числовую пару, состоящую из двух частей — вещественной и мнимой:

$$Z = x + iy\ , \tag{1.4}$$

где x — вещественная часть комплексного числа, iy — мнимая часть комплексного числа, x и y — вещественные (действительные) числа, i — мнимая единица, которая удовлетворяет равенству:

$$i=\sqrt{-1} \quad \text{или} \quad i^2=-1\,. \tag{1.5}$$

С комплексными числами можно выполнять практически все те же действия, что и с вещественными. Но, с учётом специфики свойств мнимой единицы, эти действия имеют оригинальный характер, часто не присущий операциям в области действительных чисел.

Основная проблема, с которой сталкивается экономист при представлении некоторого экономического показателя в виде комплексного числа, это сложность экономической интерпретации мнимой части. Главный вопрос при этом можно сформулировать примерно так: а где в реальной экономической жизни встречаются мнимые числа вообще и мнимая единица в частности? И какой смысл имеет мнимая единица?

Никакого смысла мнимая единица не имеет — ни экономического, ни физического. Мнимая единица — это математическое правило, только и всего. Где в реальной экономической жизни экономист встречается, например, с десятичным логарифмом? Также — нигде! Нет в окружающем нас мире ни десятичного логарифма, ни других логарифмов. Десятичный (или иной) логарифм — это математическое правило, с помощью которого оказалось очень удобно решать прикладные задачи, в том числе и в экономике. Точно так же и с помощью мнимой единицы, которую, как уже сказано, можно рассматривать как математическое правило, оказалось очень удобно решать целый класс прикладных задач в разных областях человеческой деятельности.

С помощью заданных условиями (1.4) и (1.5) правил появляется возможность использовать новые математические действия, получать новые математические результаты и формировать новые математические модели. Сразу же следует указать, что ни в одной из областей естественно-научного знания нет процессов, в которых появляются мнимые числа или мнимая единица. Комплексные числа — это математическая модель, которая может описывать некоторые реально существующие явления, а может их и не описывать. Если учёные решаются использовать комплексные переменные для моделирования реальных процессов, то они заранее устанавливают правила, в соответствии с которыми всегда одну составляющую сложного процесса относят к действительной части, а другую составляющую — к мнимой части комплексной переменной.

Точно так же и в экономике нет явлений, которые бы следовало отнести к действительной или мнимой частям комплексной переменной, как нет и явлений, в которых явно выделяются действительная и мнимая части. Мы, как и учёные в других областях науки, будем задавать правила, в соответствии с которыми появляется возможность представления экономических явлений в форме комплексных чисел и комплексных переменных. И в том случае, когда такое представление сложного социально-экономического объекта позволит более точно описать его свойства, будем использовать вместо моделей действительных переменных модели комплексной переменной или модели нескольких комплексных переменных.

Комплексное число можно представить графически так, как это было сделано на рис. 2. Представление числа на плоскости, а не на числовой оси, даёт ряд новых и весьма важных для дальнейшего использования в теории и на практике свойств комплексного числа, поэтому вновь обратимся к его графической интерпретации.

Поскольку в отличие от действительной переменной комплексная переменная состоит из двух частей, то именно эти две части определяют комплексную плоскость. На графике рис. 2 нанесены эти две оси, которые по определению являются ортогональными — ось действительной части комплексного числа и ось мнимой части комплексного числа. Сразу же оговоримся, что перед нами плоскость декартовой системы координат, на осях которой откладываются вещественные числа x и y. Просто по горизонтальной оси будет откладываться действительная часть комплексной переменной, а по вертикальной — её мнимая часть.

Любая точка, лежащая на комплексной плоскости, определяемой указанными осями, представляет собой комплексное число, даже если эта точка лежит на оси вещественных чисел. Она в таком случае будет являться комплексным числом с нулевой мнимой частью. Поэтому математики заранее специально оговаривают — в каком поле они работают: действительных или мнимых чисел.

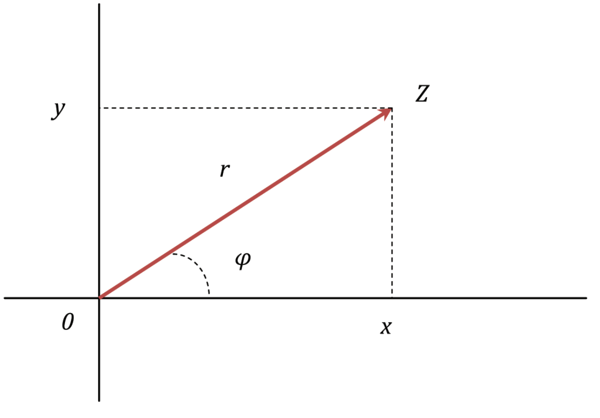


Рис. 2. Комплексное число на комплексной плоскости

Комплексное число (1.4) можно на плоскости декартовой системы координат рассматривать как вектор (рис. 2), который выходит из начала координат и заканчивается в точке (*x, y*). Тогда любое комплексное число можно представить в полярных координатах с помощью модуля вектора и его полярного угла:

$$Z = x + iy = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \tag{1.6}$$

Здесь φ — полярный угол, r — полярный радиус, который в данном случае получил название модуля комплексного числа (длина вектора). Модуль комплексного числа очевидно равен:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{1.7}$$

Полярный угол может быть найден как

$$y_r + iy_i = f_r(x_r) + if_i(x_i)\,, \tag{1.8}$$

где k — целое число. Иногда полярный угол называют аргументом комплексного числа.

Два комплексных числа равны друг другу тогда и только тогда, когда равны друг другу их действительные и мнимые части. А это значит, что, например, такое равенство:

$$y_r + iy_i = f_r(x_r) + if_i(x_i)\,. \tag{1.9}$$

следует рассматривать как более компактную форму записи системы двух уравнений действительных переменных:

$$\begin{cases} y_r = f_r(x_r), \\ y_i = f_i(x_i). \end{cases} \tag{1.10}$$

Тригонометрическая форма записи комплексного переменного особенно удобна для умножения комплексных чисел друг на друга. Пусть, например, помимо комплексного числа (1.6) имеется другое комплексное число:

$$w = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)\,. \tag{1.11}$$

Вычислим произведение одного комплексного числа z на другое комплексное число w, используя для этого их тригонометрическую форму. Опуская элементарный вывод, приведём итоговый результат:

$$zw = r\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\left(\cos\psi + i\sin\psi\right) = r\rho\left(\cos\left(\varphi+\psi\right) + i\sin\left(\varphi+\psi\right)\right). \quad (1.12)$$

Эта формула известна как формула Муавра. Формула Муавра существенно облегчает такие операции с комплексными числами, как возведение в степень или извлечение корня из комплексного числа. Действительно, для того чтобы найти, например, квадрат комплексного числа, необходимо возвести в квадрат его модуль, а полярный угол умножить на два. А для того, чтобы возвести в степень ¼, следует модуль возвести в степень ¼, а полярный угол умножить на ¼.

В 1748 году Л. Эйлер в своей книге «Введение в анализ бесконечно малых» обосновал формулу, носящую сегодня его имя, а именно (*Эйлер,* 1961, с. 118–119):

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad (1.13)$$

С помощью формулы Эйлера любое комплексное число Z с модулем r и аргументом φ можно записать в следующей показательной форме (экспоненциальной форме):

$$z = re^{i\varphi}. \quad (1.14)$$

Эта форма записи оказывается ещё более удобной для выполнения математических операций с комплексными числами. Действительно, воспользовавшись (1.14), вновь перемножим комплексное число z_1 на другое комплексное число z_2:

$$z_1 \times z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \quad (1.15)$$

Модуль комплексного числа может быть представлен в экспоненциальной форме:

$$r = e^{\ln r}. \quad (1.16)$$

Это даёт возможность представить комплексное число (1.4) в таком виде:

$$z = e^{\ln r + i\varphi}. \quad (1.17)$$

А такая форма записи позволяет вычислять логарифмы комплексного числа. Действительно, с учётом того, что аргумент комплексного числа (1.8) определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π, логарифм комплексного числа z можно вычислить так:

$$\ln z = \ln(e^{\ln r + i\varphi}) = \ln r + i\varphi + 2\pi k. \quad (1.18)$$

То есть логарифм комплексного числа — функция периодическая. Обычно на практике используют главное значение логарифма, принимая $k = 0$.

Используя экспоненциальную форму записи комплексного числа, можно выполнять и более сложные действия, например, возвести комплексное число в действительную степень *a*:

$$z^a = (re^{i\varphi})^a = r^a e^{ia\varphi}. \qquad (1.19)$$

Более того, можно с комплексными числами выполнять и такие нетривиальные действия, как возведение их в мнимую степень *ib*:

$$z^{ib} = (re^{i\varphi})^{ib} = r^{ib} e^{(i\varphi)(ib)} = e^{-b\varphi} e^{ib\ln r} = Re^{i\vartheta}, \qquad (1.20)$$

где $R = e^{-b\varphi}; \quad \vartheta = b\ln r$.

Очевидно, что теперь возможно и возведение комплексного числа в комплексную степень:

$$z^{a+ib} = (re^{i\varphi})^{a+ib} = (r^a e^{-b\varphi})(e^{ia\varphi} e^{ib\ln r}) = (e^{a\ln r - b\varphi})e^{i(a\varphi + b\ln r)}. \qquad (1.21)$$

Комплексное число в комплексной степени, как легко заметить, это тоже комплексное число, модуль которого равен

$$R = e^{a\ln r - b\varphi}, \qquad (1.22)$$

а аргумент равен

$$\vartheta = a\varphi + b\ln r. \qquad (1.23)$$

Не стоит особо долго разъяснять, что в области действительных чисел аналогичные действия будут чрезвычайно сложны. То есть мы убеждаемся, что с помощью математических действий с комплексными переменными нам удаётся просто получить результаты, которые в области действительных переменных получить очень сложно.

Для краткости и формализации формулировки математических задач сокращают название действительной части комплексного числа *z*, обозначая её как Re(*z*). Мнимую часть комплексного числа *z* обозначают как Im(*z*). Это бывает очень удобно для краткости математической записи. Например, если нас интересует действительная часть комплексной переменной, возведённой в комплексную степень, мы теперь запишем это так:

$$\mathrm{Re}(z^{a+ib}). \qquad (1.24)$$

Комплексная плоскость состоит из различных областей, на которых может быть определена функция комплексного переменного. Говорят, что задана функция комплексного переменного

$$w = f(z), \tag{1.25}$$

если указан закон, по которому каждой точке z из множества допустимых значений ставится в соответствие определённая точка или совокупность точек w. В первом случае, когда имеется соответствие одной точке, функция (1.25) называется однозначной, во втором случае, когда каждой точке из z соответствует множество точек из w, функция называется многозначной (*Лаврентьев*, 1965, с. 19).

Последнее важное свойство комплексных переменных, о котором здесь следует упомянуть, это понятие бесконечности. Для действительных переменных оно очевидно. Когда числовая ось устремляется неограниченно вправо в области положительных чисел, это означает плюс бесконечность. Если же числовая ось устремляется влево от нулевой точки в область отрицательных чисел, то это означает стремление к минус бесконечности. Если попытаться таким же образом определить бесконечность для комплексной переменной, то мы потерпим фиаско, поскольку комплексное число представляется не на числовой оси, а на комплексной плоскости и в бесконечность уходит каждая из осей, определяющих комплексную плоскость. Причём ось действительных чисел имеет как плюс бесконечность, так и минус бесконечность, точно так же как и ось мнимых чисел. Как же тогда определить бесконечное комплексное число?

Ответ на этот вопрос дал Б. Римман. Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в нулевой точке (*Шабунин*, 2002, с. 19). Обозначим через P точку сферы S, противоположную нулевой точке. Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M, которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P. При этом последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек сферы S, сходящаяся к точке P. Поэтому точке $z = \infty$ ставится в соответствие точка P на сфере Римана.

Работа с Римановыми поверхностями в экономике представляет большой интерес.

Чаще всего в экономике несколько показателей (более двух) зависят от нескольких факторов (более двух). Поэтому очень хотелось бы промоделировать эту зависимость, то есть связать некоторым математическим уравнением совокупность экономических показателей с совокупностью факторов, оказывающих воздействие на них, — использовать гиперкомплексные числа. Но попытка ввести систему чисел, содержащую три единицы, не дала положительных результатов. Удалось построение системы чисел с четырьмя мнимыми единицами. В этом случае получается так называемая система кватернионов, то есть чисел вида:

$$A = a + ib + jc + kd\ , \qquad (1.26)$$

где *a, b, c, d* — вещественные числа, *i, j, k* — мнимые единицы.

Действия с кватернионами имеют сложный характер, который не позволяет их использовать в каких-либо практических целях, и до сих пор остаются областью идеализированных исследований. В поле кватернионов не выполняется, например, свойство коммутативности умножения, что приводит к многочисленным курьёзам. Так, для уравнения:

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (1.27)$$

имеется бесконечное множество корней:

$$X = ip + jq + kr\text{, где } p^2 + q^2 + r^2 = 1\ . \qquad (1.28)$$

Поэтому вполне очевидное желание описать зависимость некоторого комплексного показателя, представленного в виде кватерниона (1.26), от другого экономического показателя, представленного в виде другого кватерниона, пока что не осуществимо, но наука не стоит на месте.

2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Практически все экономические показатели, по которым экономист судит об экономике, представляют собой некоторые обобщённые или агрегированные величины, которые могут быть легко представимы в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых с определённой степенью уверенности можно отнести к «активной части» обобщённой величины либо к «пассивной части» этой же величины. В основе такого представления лежат многочисленные классификации, принятые в экономике.

Например, трудовые ресурсы любого предприятия можно, в соответствии с приведённым принципом классификации, разделить на активную часть (производственный персонал) и пассивную часть (непроизводственный персонал). Или расходы любой семьи можно разделить на активную часть, связанную с непосредственным удовлетворением имеющихся потребностей, и пассивную часть, связанную с удовлетворением будущих потребностей (накопление). То же самое можно сказать и про разделение конечного продукта любой страны, который можно представить в виде двух составляющих — потребления (активная часть) и накопления (пассивная часть).

А поскольку активная и пассивная части некоторого показателя или фактора оказывают различное влияние на другие экономические показатели, то их общее влияние вполне логично представить в виде комплексной переменной, к действительной части которой мы договоримся относить активную составляющую, а пассивную отнесём к мнимой части комплексной переменной.

Не всегда это удаётся сделать, но там, где сомнений не возникает, будем придерживаться этого правила.

Как уже упоминалось ранее, в электроэнергетике, например при описании переменного тока, используют комплексные переменные. Там к действительной части комплексной переменной относят активную часть, а к мнимой — реактивную. Переменные токи возникают в ситуации вращающегося электромагнитного поля, которое наводит в проводнике переменный электрический ток, характеризующийся соответствующим напряжением, мощностью и энергией. Передача электроэнергии по некоторым цепям встречает сопротивление, которое может быть активным (в проводах, например) и реактивным (в катушках, например). Отнесение активной части электроэнергетических показателей к действительной части комплексной переменной, так же как отнесение реактивных составляющих к мнимой части, условно — с таким же успехом их можно поменять местами, а именно — активную мощность отнести к мнимой части, а реактивную — к действительной. Если, например, активный ток отнести к мнимой части комплексной переменной, а его реактивную составляющую — к действительной части, то есть сделать всё наоборот, нежели это принято в электроэнергетике в настоящее время, то вид применяемых математических моделей несколько изменится, а процесс вычислений и, самое главное, их результаты — нисколько не изменятся. Просто в самом начале использования теории функций комплексных переменных применительно к электроэнергетике учёные договорились о том, что и к какой части они отнесут, и с этим *ПРАВИЛОМ* все согласились, и сегодня уже такая интерпретация ни у кого не вызывает сомнений. Да и сами понятия «активная часть» и «реактивная часть» являются некоторым правилом, предварительной договорённостью между учёными.

Мы также договоримся о том, что в комплекснозначной экономике будет действовать *ПРАВИЛО*, в соответствии с которым активную часть экономического показателя будем относить к действительной части комплексной переменной, а пассивную часть — к мнимой.

Для того чтобы использовать аппарат теории функций комплексных переменных в экономике, при объединении двух экономических показателей в одну комплексную переменную должны выполняться следующие очевидные условия, определяемые особенностями комплексных чисел:

1. Эти показатели должны быть двумя характеристиками одного и того же процесса или явления, то есть отражать разные стороны этого явления.

2. Они при этом должны ещё или иметь одинаковую размерность, или быть безразмерными. К тому же у них должен быть одинаковый масштаб.

Первое условие следует из таких соображений.

В итоге формирования комплексной переменной из двух действительных переменных, комплексная переменная в дальнейшем рассматривается как самостоятельная единая переменная. Она, образно выражаясь, несёт в себе информацию о двух составляющих её величинах и отражает влияние каждой из этих составляющих на некоторый результат. Эти величины должны отражать разные стороны одного и того же явления, иначе их объединение в одну переменную теряет всякий смысл. Они могут находиться в тесной функциональной зависимости друг с другом, а могут иметь сложную непрямую взаимосвязь, но главное условие — они должны нести в себе информацию о некотором общем для них процессе. Это объясняется тем, что такие характеристики комплексного числа, как его модуль и аргумент, имеют смысл только тогда, когда составляющие комплексного числа отражают общее содержание.

Второе условие, требующее одинаковой размерности составляющих комплексной переменной, определяется особенностью свойств комплексного числа. Действительно, как можно рассчитать модуль комплексного числа, если действительная и мнимая части имеют разные размерности, например, рубли и штуки? Возвести в квадрат каждую из них и сложить не представляется никакой возможности — руб.^{2} нельзя сложить со шт.^{2}. Точно так же и при вычислении полярного угла необходимо найти отношение мнимой части к действительной части, а потом найти арктангенс полученного числа. Если действительная и мнимая части разноразмерные, то ничего поделать нельзя, ведь тангенс угла — величина безразмерная, она не может измеряться в *руб./шт*.

В экономике существенная часть показателей может быть приведена к денежным единицам измерения, например, затраты труда можно определить не в «человеко-часах», а в стоимости оплаты труда — величиной фонда оплаты труда на предприятии или подразделении предприятия. Поэтому условие одинаковой размерности и масштаба в большей части реальных экономических задач вполне выполнимо. Но в том случае, когда это сделать невозможно, каждый из показателей следует привести к относительным безразмерным величинам способом, который окажется наилучшим для выбранной формы модели.

Если в распоряжении исследователя есть несколько наблюдений за комплексной переменной экономических показателей, то вполне возможно, что они являются случайными переменными.

Комплексной случайной величиной Y является величина

$$Y = y_r + iy_i\ , \tag{2.1}$$

в которой y_r и y_i — действительные случайные переменные, а i — мнимая единица.

Эта комплексная случайная величина представляет собой точку на комплексной плоскости, а наблюдение за ней, которое подвержено воздействию случайных факторов, на комплексной плоскости будет представлять собой некоторое облако.

Все случайные процессы, которые изучают экономисты, имеют разнообразные особенности, которые чаще всего могут быть сведены к некоторым типичным ситуациям. Эти типичные ситуации хорошо описаны в математической статистике и получили название «закон распределения вероятностей». Для того, чтобы понять, к какому закону распределения вероятностей относится тот или иной процесс, необходимо вычислить его основные характеристики и по ним сделать соответствующий вывод.

Основной характеристикой любой случайной величины, в том числе и комплексной случайной величины, является её математическое ожидание.

Математическим ожиданием комплексной случайной величины (2.1) называется комплексное число

$$m_Y = m_{y_r} + im_{y_i}\ , \tag{2.2}$$

где m_{yr} — математическое ожидание действительной части, а m_{yi} — математическое ожидание мнимой части комплексной случайной величины.

Поскольку комплексные случайные числа представляют собой точки на комплексной плоскости, то математическое ожидание комплексной случайной величины тоже представляет собой точку на комплексной плоскости, вокруг которой рассеяны случайные комплексные переменные. Причём очевидно такое правило — вероятность того, что случайная комплексная переменная окажется ближе к своему математическому ожиданию, больше, чем вероятность того, что она окажется дальше от него (рис. 3).

То, как располагаются точки на комплексной плоскости, обусловлено наличием или отсутствием взаимосвязи между действительной и мнимой частями комплексной случайной величины. Рассмотрим поэтому два возможных случая: когда обе части комплексной случайной величины не зависят друг от друга и когда они взаимосвязаны.

1. Действительная и мнимая части комплексной случайной переменной независимы друг от друга.

В современной математической статистике это положение является основным и рассматривается как аксиоматическое. Вполне возможно, что в тех разделах современной науки, где используют

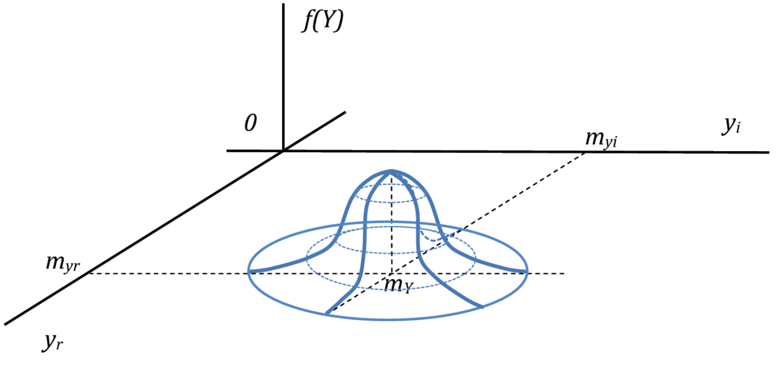


Рис. 3. Математическое ожидание комплексной случайной величины при независимых действительной и мнимой частях

статистику комплексной случайной величины, так оно и есть. Поэтому мы не можем проигнорировать этот случай и не рассматривать его, хотя говорили о том, что для экономики такие случаи практически не встречаются.

Поскольку действительная и мнимая части такой комплексной переменной не зависят друг от друга, то не зависят друг от друга и все статистические характеристики комплексной случайной величины.

Тогда дисперсия действительной части будет равна:

$$\sigma_r^2 = M\left|(y_r - m_{y_r})^2\right| , \tag{2.3}$$

а дисперсия мнимой части:

$$\sigma_i^2 = M\left|(y_i - m_{y_i})^2\right| . \tag{2.4}$$

Общая дисперсия комплексной случайной величины с независимыми действительной и мнимой частями будет равна сумме дисперсий её действительной и мнимой частей:

$$\sigma_Y^2 = \sigma_r^2 + \sigma_i^2 . \tag{2.5}$$

Следует отметить, что дисперсия является важной характеристикой, позволяющей описать плотность распределения вероятностей. Мы договорились о том, что будем рассматривать исключительно нормальное распределение вероятностей, поскольку с ним приходится иметь дело на практике чаще всего. Тогда формула Гаусса для действительной части комплексного числа будет иметь такой вид:

$$f(y_r) = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_r - m_{y_r})^2}{2\sigma_r^2}} . \tag{2.6}$$

Точно так же мы можем записать и формулу плотности распределения вероятностей для мнимой части комплексного числа:

$$f(y_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - m_{y_i})^2}{2\sigma_i^2}} . \tag{2.7}$$

Тогда, в силу независимости действительной и мнимой частей комплексной случайной величины, её плотность распределения будет равна произведению плотностей распределения действительной и мнимой частей:

$$f(Y) = f(y_r)f(y_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_i} e^{-\frac{(y_r - m_{y_r})^2\sigma_i^2 + (y_i - m_{yi})^2\sigma_r^2}{2\sigma_r^2\sigma_i^2}}. \qquad (2.8)$$

Вид этого распределения изображён на рис. 3, где осями горизонтальной плоскости являются действительная и мнимая части комплексной случайной величины (комплексная плоскость), а по горизонтали откладывается её плотность распределения.

Все точки на комплексной плоскости имеют разную вероятность появления — чем дальше от математического ожидания m_Y, тем меньше вероятность их появления на комплексной плоскости.

Все точки, лежащие на прямой линии с координатой m_{yi}, имеют разную вероятность появления, и максимальная вероятность появления случайной комплексной переменной приходится на точку математического ожидания m_y. Точно так же и все точки, лежащие на прямой линии с координатой m_{yr}, имеют разную вероятность появления, но максимальная вероятность появления случайной комплексной переменной на этой линии также приходится на точку математического ожидания m_y.

Из рисунка видно, что сечение поверхности плоскостями, параллельными комплексной плоскости, то есть плоскостями равной плотности вероятности, даёт различные эллипсы. В теории вероятностей эти эллипсы получили название «эллипсы рассеивания» (*Ивановский*, 2008, с. 177), уравнение которых в нашем случае определяется дисперсией каждой из частей и их математическим ожиданием:

$$\frac{(y_r - m_{y_r})^2}{\sigma_{y_r}^2} + \frac{(y_i - m_{y_i})^2}{\sigma_{y_i}^2} = const\,. \qquad (2.9)$$

Эллипсы легко могут быть спроецированы на комплексную плоскость (рис. 4).

На этом рисунке нанесены две точки — 1 и 2, которые характеризуют два разных случайных комплексных числа (y_{r1}; y_{i1}) и (y_{r1}; y_{i1}). Если рассчитать расстояния от них до математического ожидания, то получим:

$$r_1 = \sqrt{(y_{r1} - m_{y_r})^2 + (y_{i1} - m_{y_i})^2} \text{ и } r_2 = \sqrt{(y_{r2} - m_{y_r})^2 + (y_{i2} - m_{y_i})^2}\,. \qquad (2.10)$$

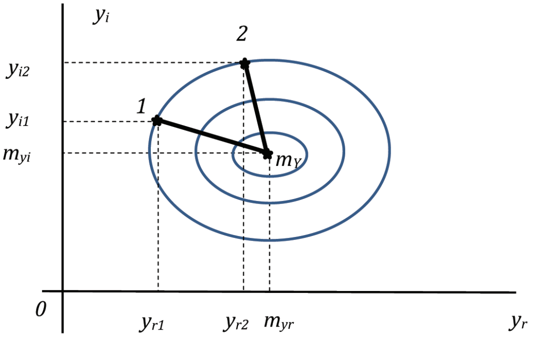


Рис. 4. Эллипсы рассеивания для ситуации независимости действительной и мнимой частей комплексной случайной величины

Известно, что для дискретного случая дисперсия случайной величины x может быть записана так:

$$\sigma_x^2 = \sum_j p_j (x_j - m_x)^2 . \qquad (2.11)$$

Для комплексной случайной величины (2.1) форма записи дисперсии будет такой:

$$\sigma_Y^2 = \sum_j p_j [(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2] . \qquad (2.12).$$

Как со всей очевидностью следует из (2.12), дисперсия комплексной случайной величины с независимыми друг от друга действительной и мнимой частями будет представлять собой сумму квадратов расстояний от лежащих на комплексной плоскости случайных величин до их математического ожидания, помноженных на вероятности появления этих случайных величин.

Если независимые дисперсии действительной и мнимой частей равны друг другу, то эллипсы рис. 4 превращаются в окружности рассеивания.

2. Действительная и мнимая части комплексной случайной переменной зависимы друг от друга

Казалось бы, в математической статистике вполне логично было изучить все возможные варианты свойств комплексной случайной величины. И если есть вариант независимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной величины, то должен быть и второй вариант — вариант зависимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной величины. Тогда все варианты будут рассмотрены и учёные получат полное знание о предмете исследования.

Но как раз таки вариант зависимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной переменной учёные и не рассмотрели. И этому есть исторические причины.

Интерес к статистической обработке наблюдений за изменением комплексной переменной возник в 50–60-х годах XX века. Впервые эту задачу сформулировал Р. Вудинг, предложивший подход по представлению комплексной случайной величины с позиций нормального распределения (*Wooding*, 1956). Этот подход развили в своих работах Р. Аренс (*Arens*, 1957) и И. Рид (*Reed*, 1962). Априорно в этих публикациях предполагалась независимость друг от друга нормально распределённых вещественной и мнимой частей комплексной случайной переменной, но явно об этом не говорилось. В 1963 году Н. Гудман сформулировал это предположение в явном виде (*Goodman,* 1963). Базируясь на нём, учёные в дальнейшем сформулировали основные понятия и характеристики случайной нормально распределённой комплексной переменной: математическое ожидание, моменты (в том числе и корреляционный момент), ковариацию, дисперсию и др. (*Feller*, 1966).

В нашей стране работы в этом направлении велись примерно в то же самое время в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова под руководством И. А. Ибрагимова. Но вероятностные аспекты распределений комплексных наблюдений не оказались востребованными и были прекращены. Поэтому из доступных публикаций на эту тему следует отметить только публикацию А. Л. Рухина (*Рухин*, 1967).

Современные исследователи, использующие в своих научных работах комплексные случайные величины, всегда применяют вариант, когда её обе части независимы друг от друга (*Tavares*, 2006). Появились, правда, и первые попытки осмыслить ситуацию, когда действительная и мнимая части зависят друг от друга (*Tuelay*, 2011; *Kammeyer*, 2002; *Picinbono*, 1997), но учёные, осмелившиеся рассматривать этот вариант, тут же оговариваются, что они исследуют характеристики, к которым следует прибавлять слово «псевдо», например, псевдоковариация или псевдодисперсия (*Soroush*, 2010).

Поэтому получилось так, что у нас нет готовых решений, предложенных математической статистикой для случая зависимых друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной переменной и нам придётся самостоятельно разобраться с этим вопросом, сверяясь с тем, до какого уровня дошла современная математическая статистика в этом вопросе.

Поскольку рассматриваются случайные величины, то взаимосвязь между ними будет корреляционной. Обозначим через r_{ri} коэффициент парной корреляции между действительной y_r *и* мнимой y_i частью комплексной случайной величины.

Плотность нормального распределения двух случайных взаимосвязанных величин, как известно из теории вероятностей и математической статистики, с учётом принятых нами обозначений, имеет вид:

$$f(y_r;y_i)=\frac{1}{2\pi\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}\sqrt{1-r^2_{y_ry_i}}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2_{y_ry_i})}\left(\frac{(y_r-m_{y_r})^2}{\sigma^2_{y_r}}-2\frac{r_{y_ry_i}(y_r-m_{y_r})(y_i-m_{y_i})}{\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}}+\frac{(y_i-m_{y_i})^2}{\sigma^2_{y_i}}\right)}. \quad (2.13)$$

Можно убедиться в том, что при равенстве нулю коэффициента парной корреляции $r_{y_ry_i}$, формула (2.13) превращается в формулу (2.8).

Эта формула используется в современной математической статистике для описания вероятностных характеристик нормально распределённых случайных комплексных величин (*Trampitsch*, 2013, с. 40).

Плотность нормального распределения комплексной случайной величины с её взаимосвязанными частями имеет в трёхмерном пространстве примерно такой же вид, что изображён на рис. 3, но с небольшим отличием. Как видно из рис. 3, при независимости действительной и мнимой частей комплексной случайной величины, трёхмерная фигура плотности распределения симметрична относительно линий, проходящих через точку математического ожидания и параллельных осям комплексной плоскости. Говорят поэтому, что эта фигура симметрична осям комплексной плоскости.

А в случае зависимости этих частей друг от друга, фигура становится несимметричной этим линиям. Она будет симметричной линиям, не параллельным осям комплексной плоскости (рис. 5). В этом случае и эллипсы рассеивания меняют своё положение.

Удобнее рассматривать не трёхмерную фигуру в пространстве, а эллипсы рассеивания. Они, для случая зависимости между действительной и мнимой частями, будут иметь такой вид:

$$\frac{(y_r - m_{y_r})^2}{\sigma_{y_r}^2} - 2\frac{r_{y_r y_i}(y_r - m_{y_r})(y_i - m_{y_i})}{\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}} + \frac{(y_i - m_{y_i})^2}{\sigma_{y_i}^2} = const\,. \quad (2.14)$$

На рис. 6 показан один из подобных эллипсов рассеяния.

И для него характерно то, что расстояния от точек, лежащих на эллипсе до математического ожидания m_Y, равны:

$$r_1 = \sqrt{(y_{r1} - m_{y_r})^2 + (y_{i1} - m_{y_i})^2} \text{ и } r_2 = \sqrt{(y_{r2} - m_{y_r})^2 + (y_{i2} - m_{y_i})^2}\,. \quad (2.15)$$

И дисперсия соответственно равна:

$$\sigma_{Y_{ri}}^2 = \sum_j p_j^{ri}[(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2]\,. \quad (2.16)$$

Здесь — p_j^{ri} вероятность появления комплексной случайной величины, соответствующая (2.13).

Поскольку вероятности в случае независимости действительной и мнимой частей и в случае их зависимости друг от друга имеют

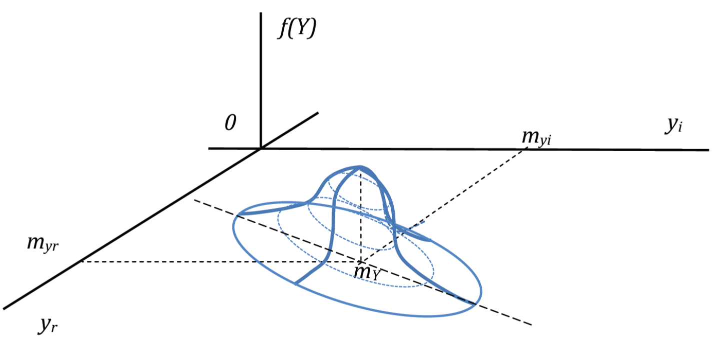


Рис. 5. Математическое ожидание и плотность распределения вероятностей при зависимых друг от друга частях комплексной случайной величины

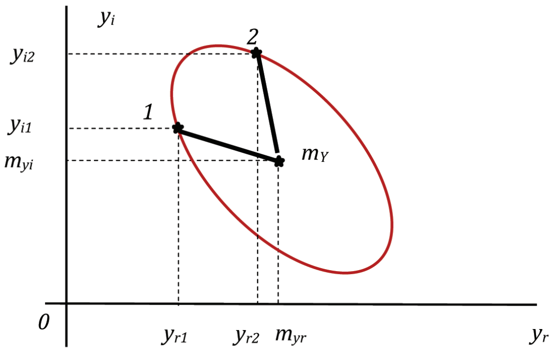


Рис. 6. Эллипс рассеивания на комплексной плоскости при взаимосвязи между действительной и мнимой частями комплексной случайной величины

разный характер и вычисляются по-разному, то это значит, что и дисперсия в последнем случае не может вычисляться как в случае независимости друг от друга частей комплексной случайной величины (2.12), то есть:

$$\sigma_Y^2 = \sum_j p_j[(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2] \neq \sigma_{Y_{ri}}^2 = \sum_j p_j^{ri}[(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2]. \quad (2.17)$$

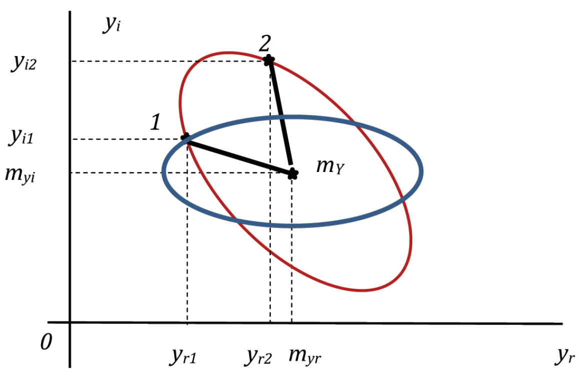


Рис. 7. Эллипсы рассеивания на комплексной плоскости при взаимосвязи между действительной и мнимой частями комплексной случайной величины (красного цвета) и в случае их независимости (синего цвета)

Покажем это. На рис. 7 на комплексную плоскость нанесены два эллипса рассеивания, соответствующие одной и той же величине плотности распределения вероятности. Вероятности появления точек на линиях этих эллипсов одинаковы. Но эллипс рассеивания синего цвета соответствует ситуации независимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной величины, а эллипс красного цвета соответствует второму варианту, когда действительная и мнимая части комплексной случайной величины зависят друг от друга.

Точка 1 лежит и на линии эллипса рассеивания синего цвета, и на линии эллипса рассеивания красного цвета. Вероятность появления этой точки одинакова и в случае зависимости действительной и мнимой частей друг от друга, и в случае независимости их друг от друга. А вот точка 2 лежит только на линии эллипса красного цвета и находится выше эллипса рассеивания синего цвета. Это означает, что вероятность p появления этой точки в случае независимости частей комплексной случайной величины меньше, чем вероятность p^{ri} появления этой точки в случае зависимости составляющих комплексной случайной величины друг от друга: $p < p^{ri}$.

Тогда:

$$p[(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2] < p^{ri}[(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2]\,. \quad (2.18)$$

Поскольку дисперсия комплексной случайной величины при взаимной зависимости действительной и мнимой частей не является простой суммой дисперсий действительной и мнимой частей, следует более подробно изучить её свойства.

3. КОМПЛЕКСНЫЕ МОМЕНТЫ И ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Важнейшими характеристиками любой случайной величины, в том числе и комплексной, являются центральные моменты первого, второго и др. порядков.

Первый центральный момент комплексной случайной величины определяется просто:

$$M[Y] = M[y_r] + iM[y_i]\,. \tag{3.1}$$

Он представляет собой сумму математического ожидания действительной и мнимой частей. Как видно из (3.1), первый центральный момент комплексной случайной величины является комплексным числом. В дальнейшем, говоря о моментах, мы будем понимать, что используем центральные моменты, то есть — центрируем действительную и мнимую части относительно их средних арифметических.

Проблемы с вычислением моментов возникают в том случае, когда заходит разговор о моменте второго порядка (second-order moment). А второй момент очень важен в математической статистике, поскольку он характеризует дисперсию.

Любое комплексное число может быть представлено как пара действительных чисел. Поэтому некоторыми специалистами считается, что комплексное представление случайных функций есть не более чем удобная для анализа математическая форма их отображения. Эта форма всегда может быть переведена в форму вещественных функций. Исходя из этого понимания сути происходящих процессов, функции дисперсии, корреляции и ковариации представляются в математической статистике как однозначные и неслучайные *вещественные* характеристики случайных процессов и функций, независимо от формы их математического представления (*Вентцель,* 2010, с. 460).

Но как видно из (3.1), первый момент комплексной случайной величины является комплексным числом. Это ведь тоже некоторая характеристика случайных процессов! Но тот факт, что первый центральный момент есть комплексная величина, никого не смущает. А напрасно. Ведь если согласиться с мнением о том, что все меры, характеризующие комплексную случайную величину, должны быть вещественными, то и первый момент должен быть действительной, а не комплексной мерой.

Другое дело, что в случае верности гипотезы о независимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной величины, её второй момент можно представить как математическое ожидание квадрата модуля соответствующей центрированной величины (*Goodman*, 1963; *Kammeyer*, 1962; *Picinbono*, 1997; *Trampitsch*, 2013; *Tuelay*, 2011), то есть — действительным числом. Но как получить вещественную характеристику, если возводить комплексную величину в квадрат? Комплексное число, возведённое во вторую степень, в общем случае будет комплексным числом. Тогда нужно придумать какое-то особое действие. И учёные предложили такой вариант — для того, чтобы получить действительную дисперсию комплексной случайной величины, центрированную величину умножают на сопряжённую с ней. Тогда будет получено вещественное число:

$$D(Y) = M[|Y|] = M[|y_r + iy_i|] = M[(y_r + y_i)(y_r - y_i)] = M[y_r^2] + M[y_i^2], \quad (3.2)$$

$$M[y_r^2] = M[(y_r - \overline{y}_r)^2] = D(y_r), \quad (3.3)$$

$$M[y_i^2] = M[(y_i - \overline{y}_i)^2] = D(y_i), \quad (3.4)$$

Отсюда:

$$D(Y) = D(y_r) + D(y_i). \quad (3.5)$$

В предыдущем параграфе было показано, что дисперсия комплексной случайной величины определяется тем — зависят ли друг от друга действительная и мнимая части или не зависят. Если они не зависят друг от друга, то верно (3.5). А если действительная и мнимая части зависят друг от друга, то дисперсию нужно считать с учётом наличия этой зависимости как комплексную меру. Кстати, некоторые современные статистики всё же не могут удержаться и рассматривают комплексную дисперсию как таковую, но оговаривая при этом, что это есть «псевдодисперсия» и что эта псевдодисперсия «даёт более интуитивное представление о том, какой является корреляция между реальными и мнимыми частями» (*Trampitsch*, 2013, с. 25). А свойства самой «псевдодисперсии» они не изучают — если это «псевдо», то какой смысл изучать её свойства?

Но мы понимаем, что есть дисперсия комплексной случайной величины с независимыми друг от друга частями (3.5) и с зависимыми друг от друга частями. Поэтому мы не будем придерживаться термина «псевдодисперсия», поскольку он не верен. Дисперсия является важнейшим элементом статистики комплексной случайной величины, и придавать ей значение псевдовеличины мы не имеем права. Поскольку эта дисперсия является комплексной, то так и будем её называть: «комплексная дисперсия».

Итак, в том случае, когда о независимости действительной и мнимой частей комплексной случайной величины не идёт речи, то следует вычислять комплексную дисперсию. Она может быть записана с помощью момента второго порядка в экспоненциальной (1.14) или тригонометрической (1.6) формах так:

$$D_c(Y) = M[Y^2] = M[|Y|^2 e^{i2\theta}] = M[|Y|^2 \cos 2\theta] + iM[|Y|^2 \sin 2\theta], \quad (3.6)$$

где

$$\theta = arctg\frac{y_i}{y_r} + 2\pi k, \quad k = 0,1,2,... . \quad (3.7)$$

Легко заметить, что дисперсия (3.5) является частным случаем дисперсии (3.5), а именно — когда полярный угол θ между действительной и мнимой частями случайной комплексной переменной равен:

$$\theta = \pi k, \quad k = 0,1,2,..., \quad (3.8)$$

то есть — когда действительная и мнимая части комплексной случайной величины являются независимыми друг от друга. В этом и только в этом случае дисперсия комплексной случайной величины является действительным числом. А во всех остальных случаях, когда между действительной и мнимой частями комплексной переменной существует хоть какая-нибудь зависимость — слабая или сильная, полярный угол не будет равен условиям (3.8) и дисперсия всегда будет комплексной.

Сравнивая друг с другом вещественную дисперсию комплексной переменной (3.5) и комплексную дисперсию комплексной переменной (3.6), можно заметить не только то, что (3.5) является частным случаем (3.6), но и то, что (3.5) по сути является модулем комплексной дисперсии (3.6), то есть — неотъемлемой частью комплексной дисперсии.

Разберём теперь особенности комплексной дисперсии (*Svetunkov*, 2018), поскольку этого до нас пока что никто не делал. Для этого запишем комплексную дисперсию в арифметической форме:

$$D_c(Y) = M[Y^2] = M[y_r^2] - M[y_i^2] + i2M[y_r y_i]\,. \qquad (3.9)$$

Отсюда следует, что комплексная дисперсия в зависимости от того, какой характер принимают её вещественная и мнимая части, может быть комплексной, действительной, а может быть и мнимой величиной — разнообразие её значений соответствует многообразию свойств комплексной случайной величины. При этом действительная часть комплексной дисперсии может быть как положительной, так и отрицательной.

Рассмотрим эти варианты и свойства той комплексной случайной величины, для которой такие варианты комплексной дисперсии имеют место. Прежде всего, обратим внимание на мнимую часть комплексной дисперсии (3.9):

$$\mathrm{Im}[D_c(Y)] = 2M[y_r y_i]\,. \qquad (3.10)$$

Она имеет простой смысл — это удвоенная ковариация между действительной и мнимой частями случайной комплексной переменной. Если между переменными нет корреляции, то ковариация переменных равна нулю. Это значит, что мнимая часть комплексной дисперсии служит основанием для предположения о наличии или отсутствии корреляции между действительной и мнимой частями комплексной случайной переменной.

Не менее информативна для исследователя и действительная часть комплексной дисперсии комплексной случайной величины:

$$\mathrm{Re}[D_c(Y)] = M[y_r^2] - M[y_i^2]\,. \tag{3.11}$$

Как видно, она характеризует степень отличия дисперсии вещественной части комплексной случайной переменной от дисперсии мнимой части этой же переменной. Поэтому в том случае, когда дисперсии действительной и мнимой частей комплексной переменной равны друг другу, действительная часть комплексной дисперсии будет равна нулю. Если же дисперсия действительной части комплексной переменной будет больше дисперсии мнимой части комплексной переменной, то вещественная часть (3.11) комплексной дисперсии будет положительной, а в противоположном случае — отрицательной.

Комплексный момент третьего, четвёртого и других порядков необходимы для специальных разделов математической статистики, в которых изучается асимметрия распределения. В комплекснозначной эконометрике нам это вряд ли пригодится, поэтому мы рассматривать их не будем, хотя вычисление моментов такого порядков не составляет особого труда.

Дисперсия является важнейшей характеристикой, с помощью которой определяются свойства случайной величины. Одной из производных от дисперсии мерой колеблемости является среднее квадратичное отклонение — квадратный корень из дисперсии. Для рассматриваемого случая среднее квадратичное отклонение (СКО) будет иметь вид:

$$\sigma_c(Y) = \sqrt{D_c(Y)}\,. \tag{3.12}$$

СКО является такой же комплексной характеристикой, как и дисперсия.

4. КОВАРИАЦИЯ ИЛИ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МОМЕНТ

Если Y и X — две комплексные случайные величины, определённые на одном и том же вероятностном пространстве, то их ковариация определяется так:

$$\mathrm{cov}_c(X,Y) = M[(X - M(X))(Y - M(Y))]. \tag{4.1}$$

Естественно, что ковариация (или корреляционный момент) применительно к двум случайным комплексным переменным будет комплексной мерой, поскольку перемножаются друг с другом две комплексные величины. Это вновь смущает современных исследователей — убеждённых сторонников вещественных характеристик комплексных случайных величин. Поэтому в существующем разделе математической статистики, которая базируется на предположении о независимости действительной и мнимой частей, используют другое определение ковариации двух комплексных случайных величин. Здесь также прибегают к перемножению сопряжённых величин, а именно (*Mokeichev*, 2013; *Tuelay*, 2011; *Yanfei*, 2016):

$$\mathrm{cov}(X,Y) = M[(X - M(X))\overline{(Y - M(Y))}], \tag{4.2}$$

где

$$\overline{(Y - M(Y))} = (Y + M(Y)) \tag{4.3}$$

есть величина, сопряжённая с исходной комплексной центрированной величиной.

Легко заметить, что эта уловка не помогает решить проблему устранения комплексного характера ковариации двух комплексных случайных величин. Она будет оставаться комплексной величиной, поскольку

$$\text{cov}(X,Y) = M[x_r y_r] + M[x_i y_i] - i(M[x_r y_i] - M[x_i y_r]) \,. \qquad (4.4)$$

Эта ковариация будет вещественной только в том случае, когда равна нулю её мнимая часть, а это — чрезвычайно редкие случаи, практически не встречающиеся на практике.

Но почему же, несмотря на очевидную неудачу в данном вопросе, статистики всё же используют эту формулу вычисления ковариации?

А вот почему. Если в (4.1) использовать вместо комплексной переменной X комплексную переменную Y, то мнимая часть ковариации (4.4) будет равна нулю, и тем самым будет получена вещественная дисперсия (3.5):

$$\text{cov}(x,y) = M[(x - M(x))(y - M(y)] = M[(y - M(y)(x - M(x))] = \text{cov}(y,x)$$

Это и есть главный аргумент в пользу того, чтобы использовать не нормальную форму вычисления ковариации (4.1), а его модификацию с сопряжёнными величинами (4.3).

Однако специалисты, использующие (4.4), проходят мимо противоречия, на которое нам следует обратить внимание. Для ковариации в области действительных переменных выполняется правило симметричности:

$$\text{cov}(x,y) = M[(x - M(x))(y - M(y)] = M[(y - M(y)(x - M(x))] = \text{cov}(y,x). \qquad (4.5)$$

А вот если воспользоваться существующим подходом (4.2) и переставить умножаемые в ковариации части, получим:

$$\begin{aligned} &\text{cov}(Y,X) = M[(Y - M(Y))\overline{(X - M(X))}] = \\ &= M[x_r y_r] + M[x_i y_i] - i[M[x_i y_r] - M[x_r y_i]]. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Простое сравнение (4.6) с (4.4) показывает, что это — разные ковариации! Действительные части у (4.4) и (4.6) совпадают, а вот мнимые части у них разные. Так что получается, что

$$\text{cov}(X,Y) \neq \text{cov}(Y,X), \qquad (4.7)$$

а это — бессмыслица!

Действительно, если ковариацию рассматривать как корреляционный момент, то между одной и той же парой двух случайных комплексных переменных будут вычисляться разные корреляционные моменты, что должно свидетельствовать о том, что это — две различные пары случайных переменных, а это — одна и та же пара!

Более того, сразу же возникают многочисленные вопросы с корреляцией между двумя комплексными случайными величинами, а именно — как рассчитать, например, коэффициент парной корреляции, если корреляционный момент между двумя одними и теми же случайными переменными может вычисляться по-разному и давать разные значения?

Об этом мы поговорим ниже в разделе, посвящённом корреляции, а пока вернёмся к ковариации. Упорное следование гипотезе о независимости действительной и мнимой частей комплексной случайной величины и необъяснимое желание рассматривать меры колеблемости как вещественные характеристики заводят учёных в тупик. Мы не можем следовать за ними. Поэтому будем рассматривать ковариацию как она получится, если применить к её вычислению стандартную форму (4.1). А она в любом случае будет комплексной. Поэтому так и будем называть её — «комплексная ковариация».

Из (4.1) следует, что комплексная ковариация будет равна

$$\mathrm{cov}_c(X,Y) = M[x_r y_r] - M[x_i y_i] + i[M[x_r y_i] + M[x_i y_r]]. \tag{4.8}$$

Проверим, выполняется ли для такой формы ковариации свойство симметричности. Для этого переставим местами сомножители в ковариации (4.8) и получим ту же самую формулу:

$$\mathrm{cov}_c(Y,X) = M[x_r y_r] - M[x_i y_i] + i[M[x_r y_i] + M[x_i y_r]] = \mathrm{cov}_c(X,Y). \tag{4.9}$$

А насколько комплексная ковариация по своим свойствам пригодна для вычисления дисперсии? Для ответа на этот вопрос в формулу комплексной ковариации (4.8) следует вместо комплексной случайной переменной *X* поставить комплексную случайную переменную *Y*. Сделав это, получим комплексную дисперсию в точно таком же виде, как ранее она была выведена ранее в (3.9), а именно:

$$\mathrm{cov}_c(Y) = M[y_r^2] - M[y_i^2] + i2M[y_r y_i]. \tag{4.10}$$

Таким образом, мы вновь имеем непротиворечивый результат. В дальнейшем будем рассматривать исключительно комплексную ковариацию как основной инструмент эконометрики комплексных переменных.

5. ДРУГИЕ ПОКАЗАТЕЛИ СТАТИСТИКИ КОМПЛЕКСНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Возможно, что при решении некоторых задач эконометрики комплексных случайных величин могут понадобиться такие показатели вариации, как размах вариации, среднее абсолютное (линейное) отклонение, относительный размах вариации, относительное отклонение по модулю, коэффициент вариации. Рассмотрим их применительно к статистике комплексной случайной величины с зависимыми друг от друга действительными и мнимыми частями.

1. Размах вариации

Применительно к действительным случайным величинам размах вариации определяется как разность между максимальным и минимальным значениями ряда:

$$V = x_{\max} - x_{\min} . \tag{5.1}$$

В области комплексных переменных мы сразу же сталкиваемся с проблемой — комплексные числа нельзя сравнивать друг с другом. Сравнивать друг с другом можно по отдельности действительные части, мнимые части, модули или полярные углы (аргументы). Действительно, на вопрос о том, какое из чисел больше, *(1+i)* или *(0,7-i1,5)*, ответа нет, сравнивать их нельзя.

Поэтому размах вариации комплексной случайной величины мы можем представить в таком виде:

$$V_c = (x_{r\max} - x_{r\min}) + i(x_{i\max} - x_{i\min}) . \tag{5.2}$$

Размах вариации является комплексным числом, которое имеет и действительную, и мнимую части, а кроме того, при необходимости может быть представлено в экспоненциальной или тригонометрической форме, поскольку для него могут быть вычислены модуль и полярный угол.

Пусть размах вариации некоторого ряда комплексной случайной величины равен:

$$V_c = (5-3) + i(6-(-2)) = 2 + i8 .$$

Легко убедиться в том, что действительная и мнимая части комплексного размаха вариации есть всегда неотрицательные числа, это во-первых. Во-вторых, любая из частей комплексного размаха вариации будет равна нулю в том и только в том случае, когда у этой части и вовсе нет вариации, а все числа этой части комплексной случайной величины равны друг другу.

2. Относительный размах вариации

В области действительных чисел относительный размах вариации представляет собой размах вариации, делённый на среднюю арифметическую ряда:

$$\nu = \frac{V}{\bar{x}} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\bar{x}} . \tag{5.3}$$

По сути, относительный размах вариации показывает, насколько велика вариация по сравнению с уровнем ряда. Так как в рассматриваемом случае размах вариации является комплексным числом, то относительный размах вариации должен соотносить вариацию каждой части (действительной и мнимой) с уровнем действительной и мнимой частей. Поэтому для относительного размаха вариации получим:

$$\nu_c = \frac{(x_{r\max} - x_{r\min})}{\bar{x}_r} + i\,\frac{(x_{i\max} - x_{i\min})}{\bar{x}_i} . \tag{5.4}$$

Размах вариации комплексной случайной величины является комплексным числом.

3. Среднее абсолютное отклонение

В области действительных случайных переменных среднее абсолютное отклонение представляет собой среднее значение модулей отклонения значений ряда от их средней арифметической:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x - \bar{x}\right| . \tag{5.5}$$

Отклонение комплексной случайной величины от её средней арифметической будет также являться комплексной случайной величиной:

$$\varepsilon_c = (x_r + ix_i) - (\overline{x}_r + i\overline{x}_i) = (x_r - \overline{x}_r) + i(x_i - \overline{x}_i). \tag{5.6}$$

Тогда среднее абсолютное отклонение комплексной случайной величины будет являться комплексной мерой:

$$\varepsilon_{ac} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|(x_{rj} - \overline{x}_r) + i(x_{ij} - \overline{x}_i)\right|. \tag{5.7}$$

Очевидно, что это соответствует такому равенству:

$$\varepsilon_{ac} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{rj} - \overline{x}_r\right| + i\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{ij} - \overline{x}_i\right|. \tag{5.8}$$

Следовательно, среднее абсолютное отклонение комплексной случайной величины представляет собой комплексное число, в действительной части которой находится среднее абсолютное отклонение действительной составляющей, а в мнимой части — среднее абсолютное отклонение мнимой составляющей.

4. Относительное отклонение по модулю

Эта характеристика случайной величины в области действительных чисел вычисляется так:

$$\mu_a = \frac{\varepsilon_a}{\overline{x}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x - \overline{x}\right|}{\overline{x}}. \tag{5.9}$$

Поскольку среднее абсолютное отклонение, полученное только что, является комплексным, комплексным будет и относительное абсолютное отклонение:

$$\mu_{ca} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{rj} - \overline{x}_r\right|}{\overline{x}_r} + i\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_{ij} - \overline{x}_i\right|}{\overline{x}_i}. \tag{5.10}$$

5. Коэффициент вариации

Последней характеристикой колеблемости комплексной случайной величины, которая может понадобиться в эконометрике комплексных переменных, является коэффициент вариации. Он представляет собой отношение среднего квадратичного отклонения к средней арифметической:

$$\gamma = \frac{\sqrt{\sum (x - \overline{x})^2}}{\overline{x}}. \tag{5.11}$$

В нашем случае это будет записано так:

$$\gamma_c = \sqrt{\frac{\sum (x_r - \overline{x}_r)^2 - \sum (x_i - \overline{x}_i)^2}{\overline{x}_r^2} + i\frac{2\sum (x_r - \overline{x}_r)(x_i - \overline{x}_i)}{\overline{x}_i^2}}. \tag{5.12}$$

И вновь мы убеждаемся в том, что перед нами комплексная мера колеблемости.

6. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ: СЛЕДУЯ ПРЕДПОЛОЖЕНИЮ О ВЕЩЕСТВЕННОМ ХАРАКТЕРЕ ДИСПЕРСИИ

На первый взгляд это может показаться странным, но, несмотря на то, что учёные обратились к математической статистике комплексной случайной величины несколько десятилетий тому назад, до сих пор их интерес не был ориентирован на поиск взаимосвязи между двумя случайными факторами и математическим описанием этой взаимосвязи. То есть в математической статистике комплексных переменных не существует таких важнейших разделов, как регрессионный и корреляционный анализ комплексных случайных величин.

Учёные, которые сегодня работают в этом направлении, занимаются исследованием сути комплексного случайного сигнала и законов распределения вероятностей при тех или иных априорно заданных условиях, но совсем не обращают внимания на возможную зависимость этого сигнала от какого-нибудь другого фактора или факторов. И уж тем более не обращают внимания на выявление и описание зависимости одной комплексной случайной величины от другой комплексной случайной величины.

Как было показано выше в предыдущих параграфах, серьёзным ограничением на этом пути является упорное следование учёными гипотезе о независимости действительной и мнимой частей комплексной случайной величины: предполагается, что каждая случайная величина имеет независимые действительные и мнимые компоненты с одинаковой дисперсией (*Tavares*, 2007, p. 1857). Именно это предположение и заводит все попытки создать раздел регрессионно-корреляционного анализа комплексной случайной переменной в тупик.

Рассмотрим, к чему может привести нас следование предположению о независимости действительной и мнимой частей комплексных случайных величин и, следовательно, предположению о вещественном характере дисперсии, в том случае, когда необходимо найти коэффициенты регрессионной зависимости между комплексными случайными переменными.

Будем априорно предполагать, что в данной главе рассматриваются исключительно стационарные случайные процессы, имеющие нормальное распределение. Эти и другие предположения, которые обычно выдвигают при обосновании методов регрессионно-корреляционного анализа, будем считать по умолчанию заданными, и повторять их далее по тексту не будем.

Пусть изменяющиеся во времени значения некоторой случайной комплексной величины обозначены так:

$$x_{rt} + ix_{it} \,. \tag{6.1}$$

Использование времени в качестве индекса упорядочивания пар значений вызвано несколькими причинами.

Первая из них, основная, заключается в том, что чаще всего используемый индекс упорядочивания ряда *i* в нашем случае применить невозможно, поскольку так в теории функций комплексных переменных обозначена мнимая единица. Вторая причина заключается в том, что чаще всего в моделировании экономики приходится иметь дело с упорядоченными во времени данными о некотором экономическом процессе. В том случае, когда принципиально важно показать, что упорядочивание ведётся не по времени наблюдения, а иначе, мы это будем оговаривать отдельно и вводить иные индексы упорядочивания.

Причиной появления динамического ряда комплексной переменной (6.1.) является действие некоторой другой комплексной случайной переменной, которая выступает комплексным аргументом:

$$x_{rt} + ix_{it} \,. \tag{6.2}$$

Такие пары значений в экономике встречаются довольно часто, например, объём и цена приобретённого товара, объединённые в комплексную переменную (6.1), объясняются денежными доходами потребителя и накопленным доходом (имуществом), которые могут быть представлены в виде комплексной переменной (6.2).

Значения динамического ряда (6.1) необходимо аппроксимировать некоторой регрессионной моделью зависимости от (6.2), в результате чего вычисляются расчётные значения этой комплексной переменной:

$$\hat{y}_{rt} + i\hat{y}_{it} = F(x_{rt} + ix_{it}). \tag{6.3}$$

Мерой приближения расчётных значений к фактическим является разность между ними:

$$(y_{rt} + iy_{it}) - (\hat{y}_{rt} + i\,\hat{y}_{it}) = \varepsilon_{rt} + i\varepsilon_{it}\,, \tag{6.4}$$

которая может быть названа как комплексная ошибка аппроксимации. В зависимости от того, какие значения принимают коэффициенты модели, ошибка (6.4) также может быть различной. Понятно желание найти коэффициенты регрессионной модели так, чтобы ошибка (6.4) была в среднем минимальна. Причём это требование должно выполняться на всём множестве значений *t*. Но это общее желание необходимо облечь в строгую форму математического критерия.

Метод наименьших квадратов в области действительных переменных минимизирует дисперсию ошибки аппроксимации фактических значений расчётными. Применительно к комплексной ошибке аппроксимации (6.4) минимум её дисперсии будет определяться таким критерием:

$$\hat{O} = \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_{rt} + i\varepsilon_{it})^2 \to \min. \tag{6.5}$$

То есть минимизации должна быть подвергнута комплекснозначная функция. Этот критерий может быть представлен в экспоненциальной форме так:

$$\hat{O} = \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_{rt}^2 + \varepsilon_{it}^2) e^{i2arctg\frac{\varepsilon_{it}}{\varepsilon_{rt}}} \to \min\,. \tag{6.6}$$

Предположение о том, что дисперсия любых комплексных переменных должна быть вещественной мерой колеблемости, вынуждает привести критерий (6.5) к вещественному виду использованием сопряжённой величины:

$$\hat{O} = \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_{rt} + i\varepsilon_{it})(\varepsilon_{rt} - i\varepsilon_{it}) = \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_{rt}^2 + \varepsilon_{it}^2) \to \min . \qquad (6.7)$$

Сравнивая (6.7) с (6.6), можно заметить, что критерий метода наименьших квадратов (МНК) с вещественной дисперсией (6.7) для оценки коэффициентов регрессионной комплекснозначной модели означает требование минимизации модуля комплексной ошибки аппроксимации. Полярный угол комплексной ошибки аппроксимации, как видно из (6.5), не имеет никакого значения, поскольку мнимая часть критерия (6.6) должна трансформироваться в вещественную единицу:

$$e^{i2arctg\frac{\varepsilon_{it}}{\varepsilon_{rt}}} = 1 \leftrightarrow arctg\frac{\varepsilon_{it}}{\varepsilon_{rt}} = 2\pi k, \quad k = 0,1,2,... , \qquad (6.8)$$

то есть при использовании критерия (6.7), соответствующего стандартной постановке задачи, исходящей из требования вещественности дисперсии как меры колеблемости, теряется часть информации о характере комплексной переменной, её комплексной регрессионной модели и комплексной ошибке аппроксимации.

Очевидно, что величина функции (6.7) определяется тем, какие значения принимают комплексные коэффициенты эконометрической модели. Пусть для определённости рассматривается простая линейная регрессионная модель:

$$\hat{y}_{rt} + i\hat{y}_{it} = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}) . \qquad (6.9)$$

Тогда критерий (6.7) представляет собой функцию от двух комплексных коэффициентов. Критерий МНК в случае, если он является вещественной характеристикой (6.7), для оценки этих коэффициентов комплекснозначной модели будет записан так:

$$\Phi(a_0, a_1, b_0, b_1) = \sum (y_{rt} - \mathrm{Re}[F(x_{rt} + ix_{it})])^2 + \sum (y_{it} - \mathrm{Im}\, F(x_{rt} + ix_{it})])^2 \to \min \qquad (6.10)$$

или:

$$\Phi(a_0, a_1, b_0, b_1) = \sum (y_{rt} - [a_0 + b_0 x_{rt} - b_1 x_{it}])^2 + \sum (y_{it} - [a_1 + b_1 x_{rt} + b_0 x_{it}])^2 \to \min . \qquad (6.11)$$

Для нахождения минимума такой функции вещественных переменных, необходимо вычислить первые частные производные функции по переменным, приравнять их нулю и решить полученную систему уравнений. Если есть сомнения в том, что экстремум — действительно минимум функции, то необходимо построить матрицу Гессе и убедиться в том, что она положительно определена. Опуская выкладки этой задачи, с которыми можно ознакомиться в опубликованных ранее результатах (*Svetunkov*, 2012), сразу же приведём систему уравнений для оценивания коэффициентов линейной комплекснозначной модели:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T}(y_{rt}+iy_{it}) = (a_0+ia_1)T + (b_0+ib_1)\sum_{t=1}^{T}(x_{rt}+ix_{it}), \\ \sum_{t=1}^{T}(y_{rt}+iy_{it})(x_{rt}-ix_{it}) = (a_0+ia_1)\sum_{t=1}^{T}(x_{rt}-ix_{it}) + (b_0+ib_1)\sum_{t=1}^{T}(x_{rt}+ix_{it})(x_{rt}-ix_{it}). \end{cases} \tag{6.12}$$

Это — система двух линейных комплекснозначных уравнений с двумя комплексными коэффициентами, которая имеет простое решение. Но и его можно упростить, ведь для случая, когда все исходные переменные центрированы относительно их средних арифметических, свободный комплексный коэффициент (a_0+ia_1) равен нулю. В этом случае из (6.12) сразу же следует вывод формулы для нахождения комплексного коэффициента пропорциональности:

$$b_0+ib_1 = \frac{\sum(y_{rt}+iy_{it})(x_{rt}-ix_{it})}{\sum(x_{rt}+ix_{it})(x_{rt}-ix_{it})}. \tag{6.13}$$

Вспомнив обозначения, которые мы использовали в предыдущих параграфах монографии, это выражение может быть записано так:

$$b_0+ib_1 = \frac{\mathrm{cov}(Y,X)}{\sigma^2(X)}\ . \tag{6.14}$$

Подставив (6.13) в (6.12), легко найти значения свободного комплексного коэффициента и завершить работу по оценке комплекснозначной линейной модели (6.9) в условиях, когда действительная и мнимая части каждой из комплексных переменных являются независимыми друг от друга, а дисперсия выступает вещественной характеристикой. Очевидно, что для этого метода будет всегда выполняться одно свойство: дисперсия модуля комплексной ошибки (6.4) будет наименьшей из всех возможных.

7. КОЭФФИЦИЕНТ ПАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ: ПРОДОЛЖАЯ СЛЕДОВАТЬ ПРЕДПОЛОЖЕНИЮ О ВЕЩЕСТВЕННОМ ХАРАКТЕРЕ ДИСПЕРСИИ

Известно, что коэффициент парной корреляции для действительных переменных можно найти с помощью ковариации (корреляционного момента) следующим образом:

$$r_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(XY)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{7.1}$$

Этой формулой можно воспользоваться для случая комплексных случайных величин и попытаться с её помощью вычислить коэффициент парной корреляции. И тут мы, следуя стандартному предположению о вещественном характере всех мер колеблемости комплексных случайных величин, сталкиваемся с одной неразрешимой проблемой.

Знаменатель (7.1) в случае его использования применительно к комплексным случайным величинам определяется в соответствии с (4.2) легко:

$$\sigma_X \sigma_Y = \sqrt{\sum_{t=1}^{T}(x_{rt} + ix_{it})(x_{rt} - ix_{it})}\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(y_{rt} + iy_{it})(y_{rt} - iy_{it})}\ . \tag{7.2}$$

Или

$$\sigma_X \sigma_Y = \sqrt{\sum_{t=1}^{T}(x_{rt}^2 + x_{it}^2)}\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(y_{rt}^2 + y_{it}^2)}\ . \tag{7.3}$$

Это, как и должно быть в соответствии со стандартным подходом, вещественное число.

А вот числитель сформировать не так просто. Действительно, как было показано в параграфе 4, ковариация, если следовать стандартному пути, оказывается несимметричной тому, какая комплексная переменная стоит первой — *X* или *Y*:

$$\mathrm{cov}(X,Y) \neq \mathrm{cov}(Y,X)\ .$$

Если использовать ковариацию между *X* и *Y*, то формула для коэффициента парной корреляции будет иметь такой вид:

$$r_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(XY)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_{rt}+ix_{it})(y_{rt}-iy_{it})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(x_{rt}^2+x_{it}^2)}\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(y_{rt}^2+y_{it}^2)}}\ . \tag{7.4}$$

А если использовать ковариацию между *Y* и *X*, то получим другую формулу:

$$r_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(YX)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_{rt}-ix_{it})(y_{rt}+iy_{it})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(x_{rt}^2+x_{it}^2)}\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(y_{rt}^2+y_{it}^2)}}\ . \tag{7.5}$$

И ни одной из них мы не можем отдать предпочтение — для этого нет абсолютно никаких оснований.

Известно, что сам коэффициент парной корреляции между двумя случайными действительными переменными был выведен К. Пирсоном другим способом (*Слуцкий*, 2010), и только потом учёные выяснили, что он может быть представлен и через ковариацию (корреляционный момент) и дисперсии (7.1). Изначально коэффициент парной корреляции определялся через коэффициенты регрессии как среднее геометрическое коэффициентов линейной регрессии *X* на *Y* и *Y* на *X*:

$$r = \pm\sqrt{ab}\ . \tag{7.6}$$

Выведем формулу для коэффициента парной корреляции между двумя случайными комплексными переменными как среднее геометрическое двух комплексных коэффициентов регрессии, следуя предположению о том, что дисперсия комплексной случайной переменной является вещественным числом. Этот случай был рассмотрен в предыдущем параграфе, и в нём была получена формула для вывода коэффициента пропорциональности линейной регрессии X на Y (6.13):

$$b_0 + ib_1 = \frac{\mathrm{cov}(Y, X)}{\sigma_X^2}.$$

Если же рассматривать обратную линейную регрессию Y на X, то для комплексного коэффициента этой пропорциональности получим:

$$a_0 + ia_1 = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_Y^2}.$$

Подставляя эти комплексные коэффициенты линейных регрессий в формулу для вычисления коэффициента парной корреляции между двумя комплексными случайными переменными (7.6), получим:

$$r = \pm\sqrt{ab} = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{cov}(Y, X)}{\sigma_X^2}\frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_Y^2}} = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{cov}(Y, X)\,\mathrm{cov}(X, Y)}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (7.7)$$

Поскольку ковариации в числителе не равны друг другу, то получена третья формула для вычисления коэффициента парной корреляции, которая отличается и от (7.4), и от (7.5). Причём можно заметить, что знаменатели у всех трёх формул одинаковые, а числители разные. И вновь у нас нет никаких оснований для того, чтобы предпочесть формулу (7.7) двум другим формулам (7.4) или (7.3).

Это означает, что коэффициент парной корреляции между двумя комплексными случайными переменными не может быть получен, если следовать стандартному пути, предполагая независимость друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной переменной и используя в результате этого предположения вещественную дисперсию, поскольку при этом предположении разным путём получены три различные формулы для вычисления одного и того же коэффициента.

Таким образом, следование стандартному предположению о том, что дисперсия и прочие статистические характеристики комплексной случайной величины должны быть вещественными числами, заводит математическую статистику в тупик, из которого нет выхода. Нужно решительно отказаться от предположений, не имеющих ничего общего с реальностью применительно к экономическим процессам и ограничивающих инструменты работы с комплексными случайными переменными.

8. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ВАРИАНТА КОМПЛЕКСНОЙ ДИСПЕРСИИ

В регрессионном анализе задача оценивания коэффициентов регрессионных моделей рассматривается применительно к простым линейным однофакторным моделям, после чего усложняют задачу, переходя к нелинейным функциям. Поэтому и в случае эконометрии комплексных переменных начнём решение задачи для простой линейной модели комплексных переменных. Эта модель, чьи параметры необходимо оценить с помощью МНК, в наиболее общем виде может быть представлена так:

$$\hat{y}_{rt} + i\hat{y}_{it} = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it})\,. \qquad (8.1)$$

Задача заключается в том, чтобы найти такие значения комплексных коэффициентов этой модели, которые бы сводили к минимуму сумму квадратов отклонений фактических значений от расчётных:

$$f(z) = \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_{rt} + i\varepsilon_{it})^2 = \sum_{t=1}^{T} (\varepsilon_{rt}^2 + 2i\varepsilon_{rt}\varepsilon_{it} - \varepsilon_{it}^2) \to \min\,. \qquad (8.2)$$

То есть нужно найти минимум комплекснозначной функции в зависимости от значений комплексных коэффициентов, что является нетривиальной задачей. Но тем не менее она имеет решение. Правило Римана — Коши нахождения первой производной комплекснозначной функции (в некоторых работах по ТФКП оно называется правилом Даламбера — Эйлера) гласит, что если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z{=}x{+}iy$, то производная $f'(z)$ может быть найдена так (*Шабунин*, 2002, с. 40):

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}\,. \qquad (8.3)$$

То есть первую производную комплекснозначной функции можно найти, используя либо её действительную часть, либо её мнимую часть.

Поскольку мы ищем непротиворечивый результат, то для полной уверенности в нашей правоте воспользуемся и первым, и вторым способом, после чего сравним друг с другом полученные результаты на предмет того, не противоречат ли они друг другу.

Посмотрим вначале, к чему приведёт применение первого критерия — использование действительной части комплексной дисперсии (8.2) для вычисления первой производной функции. После того, как будет вычислена первая производная действительной части комплексной дисперсии (8.2) по каждой из переменной, то её следует приравнять нулю. Тем самым будет получена система уравнений, решение которой поможет нам найти значения неизвестных коэффициентов модели (8.1), которые соответствуют условию (8.2). Переменными в такой задаче выступают неизвестные значения комплексных коэффициентов.

Прежде всего, подставим (8.1) в (8.2) для того, чтобы получить тот критерий МНК, используя который нам предстоит найти неизвестные коэффициенты:

$$f(z)=\sum_{t=1}^{T}[(y_{rt}+iy_{it})-(a_0+ia_1)-(b_0+ib_1)(x_{rt}+ix_{it})]^2 \to \min\,. \quad (8.4)$$

Для упрощения многочисленных записей примем, что суммирование ведётся по всем t от 1 до T, и не будем указывать далее эти пределы суммирования. С учётом этого получим:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z)}{\partial a_0}=2(a_0T-\sum_t y_{rt}+b_0\sum_t x_{rt}-b_1\sum_t x_{it}),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z)}{\partial a_1}=2(-a_1T+\sum_t y_{it}-b_1\sum_t x_{rt}-b_0\sum_t x_{it}),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z)}{\partial b_0}=2(b_0\sum_t x_{rt}^2-b_0\sum_t x_{it}^2-2b_1\sum_t x_{rt}x_{it}-\sum_t x_{rt}y_{rt}+\sum_t x_{it}y_{it}+a_0\sum_t x_{rt}-a_1\sum_t x_{it}),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z)}{\partial b_1}=2(-b_1\sum_t x_{rt}^2+b_1\sum_t x_{it}^2-2b_0\sum_t x_{rt}x_{it}+\sum_t x_{rt}y_{it}+\sum_t x_{it}y_{rt}-a_0\sum_t x_{it}-a_1\sum_t x_{rt}).$$

Здесь T — количество наблюдений, $t = 1,2,3,...,T$.

Приравнивая к нулю каждую из полученных только что частных производных и группируя их в единую систему уравнений, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \sum_t y_{rt} = Ta_0 + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it}, \\ \sum_t y_{it} = Ta_1 + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it}, \\ \sum_t x_{rt} y_{rt} - \sum_t x_{it} y_{rt} = a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it} + b_0 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it}, \\ \sum_t x_{rt} y_{it} + \sum_t x_{it} y_{rt} = a_0 \sum_t x_{it} + a_1 \sum_t x_{rt} + b_1 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it}. \end{cases} \tag{8.5}$$

Эту систему легко решить, так как перед нами четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Поскольку система этих уравнений была найдена с использованием критерия комплексного МНК, то следует считать эту систему как систему нормальных уравнений МНК.

Проверим теперь, получим ли мы иной результат, если будем использовать другой вариант правила Римана — Коши, а именно — будем минимизировать мнимую часть комплексной дисперсии как комплекснозначной функции от комплексных коэффициентов. Вновь получим четыре уравнения, каждое из которых соответствует четырём частным производным:

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f(z)}{\partial a_0} = 2(a_1 T - \sum_t y_{it} + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it}),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f(z)}{\partial a_1} = 2(a_0 T - \sum_t y_{rt} + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it}),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f(z)}{\partial b_0} = 2(b_1 \sum_t x_{rt}^2 - b_1 \sum_t x_{it}^2 + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} - \sum_t x_{rt} y_{it} - \sum_t x_{it} y_{rt} + a_1 \sum_t x_{rt} + a_0 \sum_t x_{it}),$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(f(z)}{\partial b_1} = 2(b_0 \sum_t x_{rt}^2 - b_0 \sum_t x_{it}^2 - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} - \sum_t x_{rt} y_{rt} + \sum_t x_{it} y_{it} + a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it}).$$

Приравнивая эти частные производные нулю и группируя, получим систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными коэффициентами модели:

$$\begin{cases} \sum_t y_{it} = Ta_1 + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it}, \\ \sum_t y_{rt} = Ta_0 + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it}, \\ \sum_t x_{rt} y_{it} + \sum_t x_{it} y_{rt} = a_0 \sum_t x_{it} + a_1 \sum_t x_{rt} + b_1 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it}, \\ \sum_t x_{rt} y_{rt} - \sum_t x_{it} y_{rt} = a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it} + b_0 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it}. \end{cases} \quad (8.6)$$

Легко убедиться в том, что перед нами та же самая система, что и (8.5), только последовательность уравнений изменилась в соответствии с порядком вычисления первых производных по мнимой части комплекснозначной функции дисперсии (8.2).

Следовательно, любой из критериев вычисления первых производных и приравнивания первых производных нулю — минимума комплекснозначной функции по её действительной или мнимой частей — даёт нам один и тот же результат. То есть получен непротиворечивый вывод.

Поскольку и в первом, и во втором случаях мы использовали критерий минимизации суммы квадратов отклонений, то тем самым нами получены уравнения, соответствующие искомому комплексному методу наименьших квадратов. Минимум комплексной дисперсии (8.2) по комплексным коэффициентам комплекснозначной модели (8.1) соответствует критерию МНК:

$$f(z) \to \min \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(z)}{\partial(a_0 + ia_1)} = 0 \\ \dfrac{\partial f(z)}{\partial(b_0 + ib_1)} = 0 \end{cases}. \quad (8.7)$$

По аналогии с (6.12) приведём полученную систему уравнений (систему (8.5) или аналогичную систему (8.6)) к более компактному виду с использованием комплекснозначного представления задачи. Тогда получим систему двух комплексных уравнений с двумя комплексными коэффициентами:

$$\begin{cases} \sum_t (y_{rt} + iy_{it}) = (a_0 + ia_1)T + (b_0 + ib_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it}), \\ \sum_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it}) = (a_0 + ia_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it}) + (b_0 + ib_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2. \end{cases} \quad (8.8)$$

Если теперь сравнить полученную систему уравнений с аналогичного вида системой (6.12), полученной в параграфе 6 при следовании стандартному подходу, предполагающему, что дисперсия должна быть вещественной мерой, то легко убедиться в их различии.

В том случае, когда исходные комплексные случайные переменные были предварительно центрированы относительно их средних арифметических, то система (8.8) упростится. Действительно, в этом случае все суммы первого уравнения системы (8.8) будут равны нулю, следовательно, и свободный член линейного уравнения также будет равен нулю. Таким образом, получается одно уравнение с одним неизвестным:

$$\sum_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it}) = (b_0 + ib_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2, \quad (8.9)$$

из которого следует формула для нахождения комплексного коэффициента пропорциональности:

$$(b_0 + ib_1) = \frac{\sum_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2}, \quad (8.10)$$

или, используя комплексные ковариации и комплексную дисперсию:

$$(b_0 + ib_1) = \frac{\mathrm{cov}_c(XY)}{\sigma_c^2(X)}. \quad (8.11)$$

Найти значения свободного комплексного члена линейной регрессии можно, подставляя вычисленное значение комплексного коэффициента пропорциональности в первое или второе уравнение системы МНК (8.8) и решая одно уравнение с одним комплексным неизвестным.

Метод наименьших квадратов можно применить и к нелинейным комплекснозначным регрессиям. Такая возможность рассмотрена в параграфе 12 данной монографии.

9. КОМПЛЕКСНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

В седьмом параграфе было показано, что следование стандартному предположению о вещественном характере дисперсии комплексной случайной величины ведёт к противоречивым результатам при любой попытке разработать инструменты для оценки корреляции между двумя комплексными случайными величинами — все варианты вычисления коэффициента парной корреляции между ними приводили к совершенно противоположным результатам.

Поскольку сформировать основы раздела корреляционного анализа комплексных случайных переменных тогда не получилось, предпримем новую попытку, но уже отказавшись от предположения о том, что дисперсия в рассматриваемом случае должна быть вещественной. До сих пор во всех случаях, когда мы делали это, новые инструменты математической статистики получались непротиворечивыми.

Вернёмся к задаче вывода формулы для коэффициента парной корреляции между двумя случайными комплекснозначными рядами. Воспользуемся известной формулой вычисления этого коэффициента через дисперсии и ковариацию:

$$r_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(XY)}{\sigma_X \sigma_Y}\,. \tag{9.1}$$

Подставим в неё значения комплексной ковариации и комплексных дисперсий, которые ранее были получены в третьем и четвёртом параграфах монографии. Получим:

$$r_{c\,XY} = \frac{\operatorname{cov}_c(XY)}{\sigma_{c\,X} \sigma_{cY}}\,. \tag{9.2}$$

Или

$$r_{XY} = \frac{\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sqrt{\sum (x_{rt} + ix_{it})^2 \sum (y_{rt} + iy_{it})^2}} . \tag{9.3}$$

Выведем теперь формулу для расчёта коэффициента парной корреляции комплексных переменных через среднюю геометрическую произведения комплексных коэффициентов регрессий так, как это делал К. Пирсон для варианта двух случайных действительных переменных (7.6).

Как было показано в предыдущем параграфе, коэффициент пропорциональности линейной регрессии *X* на *Y* с помощью МНК можно оценить так (8.10):

$$(b_0 + ib_1) = \frac{\sum_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2} . \tag{9.4}$$

Если теперь рассмотреть комплексную линейную регрессию, обратную данной, то есть *Y* на *X,* которая имеет такой вид:

$$X_t = X_0 + aY , \tag{9. 5}$$

где X_0 и a — комплексные коэффициенты уравнения регрессии, то комплексный коэффициент пропорциональности a также может быть найден с помощью комплексного МНК:

$$(a_0 + ia_1) = \frac{\sum_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sum_t (y_{rt} + iy_{it})^2} . \tag{9. 6}$$

Поскольку коэффициент парной корреляции представляет собой среднее геометрическое коэффициентов регрессии, найдём его таким способом:

$$r_{cXY} = \pm\sqrt{(a_0 + ia_1)(b_0 + ib_1)} = \sqrt{\frac{\sum_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sum_t (y_{rt} + iy_{it})^2} \frac{\sum_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2}} . \tag{9.7}$$

Откуда получаем:

$$r_{cXY} = \frac{\sum_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it})}{\sqrt{\sum_t (y_{rt} + iy_{it})^2 \sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2}}\,. \tag{9.8}$$

Как видно, получилась та же самая формула, что и (9.3), которая была выведена через комплексную ковариацию и комплексные дисперсии переменных. То есть с помощью двух разных подходов по выводу формулы для расчёта комплексного коэффициента парной корреляции между двумя случайными комплексными переменными был получен один и тот же непротиворечивый результат, который и будем использовать в дальнейшем.

10. КОМПЛЕКСНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПАРНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Найдя, как правильно вычислять комплексный коэффициент парной корреляции между двумя случайными комплексными переменными, следует дать интерпретацию тем значениям, которые он может принимать.

Линейная взаимосвязь между двумя комплексными переменными означает в области действительных переменных, что и вещественная, и мнимая части одной комплексной переменной выступают как двухфакторные линейные зависимости от вещественной и мнимой частей другой комплексной переменной. Поэтому, если одна переменная изменяется нелинейно, то и другая переменная будет меняться нелинейно, причём визуально такую зависимость чаще всего определить сложно. Если изучаемая зависимость не функциональная, а регрессионная, то разброс точек на комплексных плоскостях ещё меньше вызывает ассоциации с линейной зависимостью. Поэтому визуальный анализ зависимости между переменными затруднён и о линейной взаимосвязи двух комплексных переменных можно судить исключительно по расчётным характеристикам, то есть по комплексному коэффициенту парной корреляции.

Комплексный коэффициент парной корреляции, как это следует из материалов предыдущего параграфа, представляет собой среднее геометрическое двух комплексных коэффициентов регрессии

$$r_{XY} = \pm\sqrt{ab}\,. \tag{10.1}$$

Поэтому для строго функциональной линейной комплекснозначной зависимости $Y = aX$, $X = bY$ будет выполняться очевидное равенство:

$$a = \frac{1}{b}\text{, откуда: } ab = \frac{1}{b}b = 1\,. \tag{10.2}$$

То есть комплексный коэффициент парной корреляции для линейной функциональной зависимости равен:

$$r_{XY} = \pm(1 + i0)\,. \tag{10.3}$$

Значит, для линейной функциональной зависимости между двумя комплексными переменными модуль действительной части комплексного коэффициента парной корреляции будет равен единице, а его мнимая составляющая будет равна нулю.

Это означает, что квадрат комплексного коэффициента парной корреляции (комплексный коэффициент детерминации) для линейной зависимости всегда будет равен действительной единице. Но в каких случаях линейной функциональной зависимости между двумя комплексными переменными коэффициент корреляции будет принимать значения «плюс единица», а в каких случаях — «минус единица»?

Для ответа на этот вопрос представим комплексные коэффициенты пропорциональности в экспоненциальной и тригонометрической формах:

$$a = R_a e^{i\alpha} = R_a[\cos\alpha + i\cos\alpha]\,, \tag{10.4}$$

$$b = R_b e^{i\beta} = R_b[\cos\beta + i\cos\beta]\,. \tag{10.5}$$

Тогда их произведение будет равно:

$$ab = R_a R_b e^{i(\alpha+\beta)} = R_a R_b[\cos(\alpha+\beta) + i\cos(\alpha+\beta)]\,. \tag{10.6}$$

Поскольку для линейной функциональной зависимости выполняется (10.3), то есть мнимая часть комплексного коэффициента парной корреляции равна нулю, то отсюда со всей очевидностью следует, что в этом случае

$$\alpha + \beta = 2\pi k, \quad k = 0,1,2,\ldots\,. \tag{10.7}$$

Будем рассматривать для простоты случай, когда $k = 0$. Тогда комплексный коэффициент парной корреляции определяется как квадратный корень из такого произведения:

$$r_{cXY} = \pm\sqrt{ab} = \pm\sqrt{R_a R_b \cos(\alpha + \beta)}\,. \tag{10.8}$$

Поскольку модуль каждого коэффициента пропорциональности по определению положителен, то равенство коэффициента парной корреляции «плюс единице» или «минус единице» полностью определяется косинусом угла α. Нас интересует случай, когда подкоренное выражение может быть таким:

$$\sqrt{(-1)(-1)}\,. \tag{10.9}$$

Тогда можно определить характеристики зависимости в случае, когда комплексный коэффициент пропорциональности становится равным минус единице. Из равенства (10.7) косинус подкоренного выражения (10.8) может быть записан так:

$$\cos(\alpha + (-\alpha)) = \cos\alpha\cos(-\alpha) - \sin\alpha\sin(-\alpha)\,.$$

Теперь легко определить, что интересующий нас случай (10.9) определяется полярным углом комплексного коэффициента пропорциональности $a_0 + ia_1$, лежащим в пределах:

$$\frac{3}{4}\pi \le \alpha \le \frac{5}{4}\pi\,. \tag{10.10}$$

Для этого случая вещественная составляющая комплексного коэффициента пропорциональности всегда не положительна:

$$a_0 \le 0,\,, \tag{10.11}$$

а его мнимая часть всегда не меньше вещественной:

$$a_0 \le a_1\,. \tag{10.12}$$

Этим условиям удовлетворяют, например, такие комплексные коэффициенты пропорциональности:

1) $-1+i;\ -1+0i;\ -10-i9{,}999...$

Что представляет собой линейная комплекснозначная взаимосвязь с такими значениями?

Для ответа на этот вопрос представим линейную функциональную комплекснозначную зависимость как систему двух равенств вещественных и мнимых частей:

$$y_r = a_0 x_r - a_1 x_i\,, \tag{10.13}$$

$$y_i = a_1 x_r + a_0 x_i \,. \tag{10.14}$$

По условиям (10.11) и (10.12) коэффициент a_0 всегда не положителен, а мнимая часть a_1 может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Рассматривая ситуацию, когда комплексный аргумент возрастает в первом квадранте комплексной плоскости, то есть когда x_r и x_i непрерывно растут и являются положительными числами, получим, что при этом вещественная часть комплексного результата Y_r убывает, а мнимая часть Y_i в силу (10.12) может как возрастать, так и убывать.

То есть значения, равные «минус единице», комплексный коэффициент парной корреляции принимает только в том случае, когда между переменными имеется обратная зависимость — увеличение значений аргумента X ведёт к уменьшению значений вещественной части Y_r комплексной случайной величины Y.

Итак, действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции r_r свидетельствует о степени приближения зависимости между случайными комплексными переменными к линейной зависимости и интерпретация его значений подобна интерпретации значений коэффициента парной корреляции в области действительных чисел.

Мнимая составляющая комплексного коэффициента парной корреляции r_i, как это со всей очевидностью следует из (10.3), в том случае, когда имеется линейная функциональная зависимость между комплексными переменными, будет равна нулю.

Итак, если действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции по модулю близка к единице, а его мнимая часть по модулю близка к нулю, то исследователь может утверждать о том, что зависимость, наличие которой он предполагает между двумя комплексными случайными переменными, близка к линейной.

11. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ЛИБО ОТСУТСТВИЕ КОРРЕЛЯЦИИ

Модели комплексных переменных иначе описывают изучаемые процессы, нежели модели действительных переменных. Поэтому и от комплексного коэффициента парной корреляции следует ожидать наличия новых свойств, которые не присущи коэффициенту парной корреляции действительных переменных.

В самом начале исследования этих новых свойств обратим внимание на ситуацию, когда действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции равна нулю, а его мнимая часть равна по модулю единице:

$$r_{XY} = \pm(0+i)\,. \qquad (11.1)$$

Этот случай, как легко заметить, является противоположным только что рассмотренному случаю линейной корреляции (10.3).

Для рассматриваемого случая выполняется следующее условие:

$$ab = R_a R_b e^{i(\alpha+\beta)} = R_a R_b[\cos(\alpha+\beta) + i\cos(\alpha+\beta)] = 0+i\,. \qquad (11.2)$$

Это в свою очередь означает, что

$$R_a R_b = 1, \quad \alpha+\beta = (2k-1)\pi, \quad k = 1,2,3,\ldots\,. \qquad (11.3)$$

Что означает полученное равенство?

Если рассматривать ситуацию, когда $k = 1$, то, например, для того чтобы комплексный коэффициент парной корреляции принимал значения (11.1) при комплексном коэффициенте пропорциональности

$$a_0 + ia_1 = 1 + i0\,.$$

МНК, применённый к обратной зависимости аргумента от результата, должен дать такие оценки комплексного коэффициента:

$$b_0 + ib_1 = -1 + i0 .$$

Или: коэффициенту

$$a_0 + ia_1 = 1 + i$$

должен соответствовать коэффициент

$$b_0 + ib_1 = -1 - i ,$$

то есть вектор, противоположный в комплексной плоскости по направлению к первому.

Теперь можно понять, в каком случае действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции будет равна нулю, а его мнимая часть по модулю будет равна единице.

При нахождении регрессии комплексного аргумента на комплексный результат

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)$$

коэффициент пропорциональности $\hat{y}_r + i\hat{y}_i$, найденный с помощью МНК, будет моделировать некоторую линейную последовательность $\hat{y}_r + i\hat{y}_i$.

При нахождении обратной регрессии комплексного результата на комплексный аргумент:

$$x_r + ix_i = (b_0 + ib_1)(y_r + iy_i) ,$$

МНК будет давать такой комплексный коэффициент $b_0 + ib_1$, что его применение для регрессии:

$$y_r + iy_i = \frac{x_r + ix_i}{b_0 + ib_1}$$

будет моделировать ряд точек $\hat{y}'_r + i\hat{y}'_i$, повёрнутых относительно исходного ряда $\hat{y}_r + i\hat{y}_i$ на угол π, то есть изменяющихся в обратном направлении.

Это возможно только в случае полного отсутствия линейной зависимости и вообще какой-нибудь зависимости. Точнее говоря, действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции будет равна нулю, а модуль его мнимой части будет равен единице только в том случае, когда две анализируемые случайные комплексные переменные абсолютно независимы друг от друга.

То есть в крайних своих проявлениях — при наличии линейной взаимосвязи и при полном отсутствии какой-либо взаимосвязи — комплексный коэффициент парной корреляции ведёт себя точно так же, как и коэффициент парной корреляции действительных переменных.

Но на этом аналогии заканчиваются. Поведение комплексного коэффициента парной корреляции куда сложнее его вещественного аналога. Для того чтобы понять, как может менять свои значения комплексный коэффициент парной корреляции, раскроем числитель этого коэффициента (9.8):

$$\sum (y_{rt}+iy_{it})(x_{rt}+ix_{it})=\sum (y_{rt}x_{rt})-\sum y_{it}x_{it}+i(\sum y_{it}x_{rt}+\sum y_{rt}x_{it}). \quad (11.4)$$

Запишем его через ковариации (ведь все исходные переменные центрированы относительно их средних арифметических). Тогда получим:

$$\sum (y_{rt}+iy_{it})(x_{rt}+ix_{it})=\operatorname{cov}(y_{rt}x_{rt})-\operatorname{cov}(x_{it}y_{it})+i[\operatorname{cov}(y_{it}x_{rt})+\operatorname{cov}(y_{rt}x_{it})]. \quad (11.5)$$

Почему нам важны ковариации? Потому что из математической статистики известно, что ковариация двух независимых случайных переменных равна нулю.

Числитель комплексного коэффициента парной корреляции (9.8) можно записать через дисперсии, свойства которых нам уже хорошо известны. Тогда комплексный коэффициент парной корреляции в таком более подробном и удобном для анализа виде будет записан так:

$$r_{c\,XY}=\frac{\operatorname{cov}(y_{rt}x_{rt})-\operatorname{cov}(x_{it}y_{it})+i[\operatorname{cov}(y_{it}x_{rt})+\operatorname{cov}(y_{rt}x_{it})]}{\sqrt{\sigma^2_{x_{rt}}-\sigma^2_{x_{it}}+i2\operatorname{cov}(x_{rt}x_{it})}\sqrt{\sigma^2_{y_{rt}}-\sigma^2_{y_{it}}+i2\operatorname{cov}(y_{rt}y_{it})}}. \quad (11.6)$$

Вот эта форма записи коэффициента корреляции уже позволяет предметно судить о его свойствах.

Когда дисперсии мнимых и действительных частей каждой из исходных переменных равны друг другу, то есть:

$$\sigma^2_{x_{rt}}-\sigma^2_{x_{it}}=0,\quad \sigma^2_{y_{rt}}-\sigma^2_{y_{it}}=0, \quad (11.7)$$

то для знаменателя получим:

$$i2\sqrt{\operatorname{cov}(x_{rt}x_{it})\operatorname{cov}(y_{rt}y_{it})}. \quad (11.8)$$

Если при этом ещё случится так, что действительные и мнимые части комплексных переменных независимы друг от друга, то ковариации в подкоренных выражениях (11.8) будут равны нулю. Необходимо заметить, что для выборочных значений они крайне редко будут равны нулю, точно так же как и (11.7) будут строго равны нулю для выборочных значений чрезвычайно редко. В подавляющем большинстве случаев и (11.7), и (11.8) будут близки к нулю, но не строго равны ему.

В действительной и мнимой частях числителя (11.6) находятся перекрёстные ковариации, которые в выборочном случае ещё реже могут быть равны нулю. Поэтому деление числителя на величину, близкую к нулевым значениям, будет приводить к ситуации, когда комплексный коэффициент парной корреляции может иметь высокие значения как действительной, так и мнимой частей, причём эти значения могут по модулю существенно превышать единицу.

Примеры таких случаев приведены в табл. 1.

В реальной практике построения эконометрических моделей ситуации, при которой складываются подобные условия, исключены, хотя бы потому, что действительные и мнимые части таких случайных комплексных переменных зависимы друг от друга — а иначе их формирование лишено всякого смысла! Поэтому даже если дисперсии действительной и мнимой части каждой из рассматриваемых комплексных случайных переменных будут равны друг другу (крайне редкий случай для выборочных значений), то числитель (11.6) будет всё же далёк от нулевой точки.

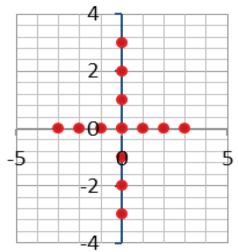
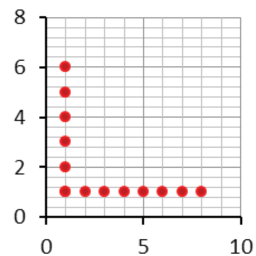
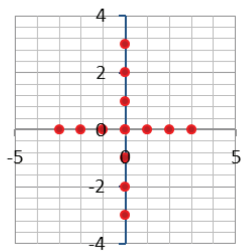
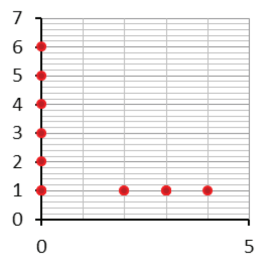
Но в любой ситуации значения действительной части комплексного коэффициента парной корреляции, отстающее от единицы более, чем на 0,3 (как в большую, так и в меньшую стороны), служит основанием отказаться от рассмотрения линейной зависимости между двумя случайными комплексными переменными.

То есть между двумя комплексными случайными переменными может быть линейная корреляционная зависимость, если выполняется условие:

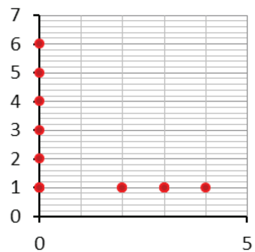
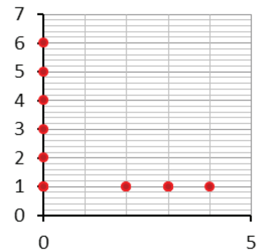
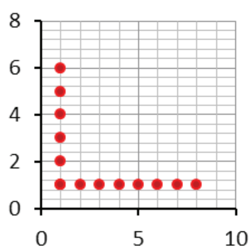
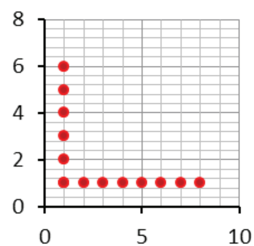
$$\left|1 - \mathrm{Re}(r_{cXY})\right| \leq 0,3 . \tag{11.9}$$

Таблица 1

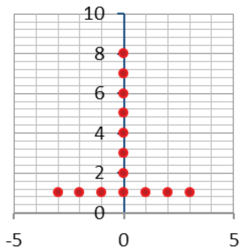
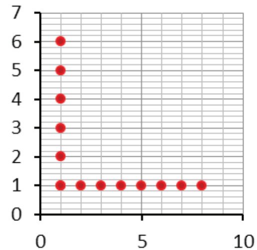
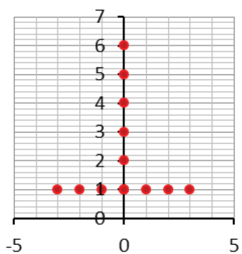
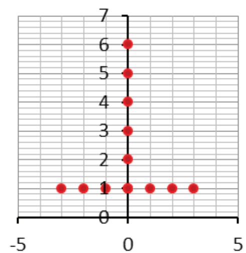
Исключительные случаи значений комплексного коэффициента парной корреляции

№	График комплексной переменной X	Дисперсия комплексной переменной X	График комплексной переменной Y	Дисперсия комплексной переменной Y	Комплексный коэффициент парной корреляции
1.		*0-i15,0*		*45,1-i59,9*	*33651969-i11231561*
2.		*0-i15,0*		*-8,6-i36,4*	-5544718-i643532

Продолжение табл. 1

№	График комплексной переменной X	Дисперсия комплексной переменной X	График комплексной переменной Y	Дисперсия комплексной переменной Y	Комплексный коэффициент парной корреляции
3.		*-0,928+i4,0*		*-8,6-i36,4*	-0,316-i0,259
4.		*-45,1-i59,9*		*-45,1-i59,9*	1,638+i0

Окончание табл. 1

№	График комплексной переменной X	Дисперсия комплексной переменной X	График комплексной переменной Y	Дисперсия комплексной переменной Y	Комплекс-ный коэффи-циент парной корреляции
5.		*-56+i0*		*-45,1-i59,9*	1,669+i0,317
6.		*-56+i0*		*-10,9+i0*	1,213+ i 1,778

Во всех остальных случаях линейная взаимосвязь отвергается.

Вопрос со свойствами мнимой части комплексного коэффициента парной корреляции пока что недостаточно раскрыт. Однако исследования на условных примерах, которые провели Д. В. Барыев, В. В. Мацкевич, Ю. И. Селиванова, Г. Сирук и Н. И. Шайхлеева, показали наличие удивительной закономерности — *если между двумя комплексными переменными имеется функциональная зависимость, мнимая часть комплексного коэффициента парной корреляции близка к нулю*.

12. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Поскольку использование комплексных переменных даёт исследователю более многообразные варианты моделирования, чем модели действительных переменных, только моделью (8.1) семейство линейных комплекснозначных моделей не ограничивается. Возможны варианты, когда вместо комплексного коэффициента используется только действительный коэффициент или только мнимый коэффициент, а возможно, что вместо комплексного аргумента используется действительный аргумент или наоборот — модель комплексного аргумента описывает поведение действительной переменной.

Покажем, как с помощью данного подхода реализовать комплексный МНК для модели комплексного аргумента:

$$y_t = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}) \,. \tag{12.1}$$

Комплекснозначная функция, минимум которой соответствует оценкам МНК коэффициентов данной линейной модели комплексного аргумента, запишется так:

$$f(z) = \sum_t [y_t - (a_0 + ia_1) - (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it})]^2 \to \min \,. \tag{12.2}$$

Вычислим первые частные производные действительной части комплекснозначной функции (12.2) по каждому из коэффициентов a_0, a_1, b_0, b_1. Получим четыре уравнения, соответствующие четырём частным производным и четырём переменным рассматриваемой задачи:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z)}{\partial a_0} = 2(a_0 T - \sum_t y_t + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z)}{\partial a_1} = 2(-a_1 T - b_1 \sum_t x_{rt} - b_0 \sum_t x_{it})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z)}{\partial b_0} = 2(b_0 \sum_t x_{rt}^2 - b_0 \sum_t x_{it}^2 - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it} - \sum_t x_{rt} y_t + a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it})$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(f(z)}{\partial b_1} = 2(-b_1 \sum_t x_{rt}^2 + b_1 \sum_t x_{it}^2 - 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it} + \sum_t x_{rt} y_t - a_0 \sum_t x_{it} - a_1 \sum_t x_{rt})$$

Приравнивая нулю каждую из производных и группируя:

$$\begin{cases} \sum_t y_t = Ta_0 + b_0 \sum_t x_{rt} - b_1 \sum_t x_{it}, \\ 0 = Ta_1 + b_1 \sum_t x_{rt} + b_0 \sum_t x_{it}, \\ \sum_t x_{rt} y_t = a_0 \sum_t x_{rt} - a_1 \sum_t x_{it} + b_0 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1 \sum_t x_{rt} x_{it}, \\ \sum_t x_{it} y_t = a_0 \sum_t x_{it} + a_1 \sum_t x_{rt} + b_1 \sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0 \sum_t x_{rt} x_{it}. \end{cases} \tag{12.3}$$

Аналогичные равенства можно получить, находя частные производные мнимой части комплекснозначной функции (12.2), и приравнивая их нулю.

Если теперь привести систему действительных уравнений к комплексному виду, будет получена такая система:

$$\begin{cases} \sum_t y_t = (a_0 + ia_1)T + (b_0 + ib_1) \sum_t (x_{rt} + ix_{it}), \\ \sum_t y_t (x_{rt} + ix_{it}) = (a_0 + ia_1) \sum_t (x_{rt} + ix_{it}) + (b_0 + ib_1) \sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2. \end{cases} \tag{12.4}$$

Поскольку для удобства вычислений следует использовать центрированные относительно средней арифметической исходные значения всех переменных, то система (12.4) сокращается до одного уравнения:

$$\sum_t y_t (x_{rt} + ix_{it}) = (b_0 + ib_1) \sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2 . \tag{12.5}$$

Из него можно найти значение линейного коэффициента пропорциональности:

$$(b_0 + ib_1) = \frac{\sum_t y_t (x_{rt} + ix_{it})}{\sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2} . \tag{12.6}$$

Поскольку существует возможность построения модели комплексного аргумента, то существует возможность построения и модели обратного вида, а именно — линейной комплекснозначной модели действительного аргумента. В модели можно использовать любые удобные формы записи, но поскольку с помощью этой модели можно поставить и решить новую задачу в области теории корреляции комплексных случайных величин, запишем её как модель, обратную модели комплексного аргумента:

$$(x_{tr} + ix_{ti}) = (c_0 + ic_1) + (d_0 + id_1) y_t . \tag{12.7}$$

Теперь сформулируем критерий МНК применительно к этой модели:

$$f(z) = \sum_t [(x_{rt} + ix_{it}) - (c_0 + ic_1) - (d_0 + id_1) y_t]^2 \to \min . \tag{12.8}$$

Опуская промежуточные выкладки, которые каждый читатель может получить самостоятельно, приведём итоговую систему уравнений МНК в комплексной форме:

$$\begin{cases} \sum_t (x_{rt} + ix_{it}) = (c_0 + ic_1) T + (d_0 + id_1) \sum_t y_t , \\ \sum_t (x_{rt} + ix_{it}) y_t = (c_0 + ic_1) \sum_t y_t + (d_0 + id_1) \sum_t y_t^2 . \end{cases} \tag{12.9}$$

Эта система превратится в одно уравнение с одним неизвестным, если произвести центрирование исходных переменных относительно их средних арифметических. Это уравнение будет записано так:

$$\sum_t y_t (x_{rt} + ix_{it}) = (d_0 + id_1) \sum_t y_t^2 . \tag{12.10}$$

Отсюда легко определить формулу для вычисления коэффициента пропорциональности. Она будет иметь вид:

$$(d_0 + id_1) = \frac{\sum\limits_t y_t(x_{rt} + ix_{it})}{\sum\limits_t y_t^2} . \qquad (12.11)$$

Поскольку (12.6) позволяет оценить с помощью МНК коэффициент регрессии комплексного аргумента на вещественный результат, а формула (12.12) — обратную линейную зависимость, то квадратный корень из произведения этих двух коэффициентов регрессии даст нам в соответствии с подходом Пирсона формулу для определения коэффициента парной корреляции между некоторой случайной комплексной переменной (x_{rt}+ix_{it}) и случайной действительной переменной y_t:

$$r_{y_t(x_{rt}+ix_{it})} = \pm\sqrt{(b_0 + ib_1)(d_0 + id_1)} = \frac{\sum\limits_t y_t(x_{rt} + ix_{it})}{\sqrt{\sum\limits_t y_t^2 \sum\limits_t (x_{rt} + ix_{it})^2}} . \qquad (12.12)$$

В общем случае этот коэффициент парной корреляции будет комплексным. Его свойства будем предполагать такими же, как у комплексного коэффициента парной корреляции (9.8).

13. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Общие принципы МНК, которые были определены для эконометрических комплекснозначных моделей, применённые к задачам оценивания параметров эконометрических моделей, в случае каждой отдельной модели комплексных переменных требуют индивидуального применения. МНК, адаптированный для простой линейной модели комплексных переменных, формирует общие принципы использования МНК применительно к комплекснозначным эконометрическим моделям. На этой основе можно предложить и подход, позволяющий с помощью МНК оценить выборочные значения коэффициентов нелинейных эконометрических моделей комплексных переменных, если их представить в линейной форме.

В области действительных переменных процедура оценивания коэффициентов нелинейных моделей в общем случае не является простой. Для аддитивных нелинейных моделей формирование системы нормальных уравнений не представляет особого труда, например, для нелинейной аддитивной модели вида:

$$y = a_1 x^2 + a_2 \ln x + a_3 \cos x \qquad (13.1)$$

система нормальных уравнений МНК будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum yx^2 = a_1 \sum x^4 + a_2 \sum x^2 \ln x + a_3 \sum x^2 \cos x \\ \sum y \ln x = a_1 \sum x^2 \ln x + a_2 \sum \ln^2 x + a_3 \sum \ln x \cos x \\ \sum y \cos x = a_1 \sum x^2 \cos x + a_2 \sum \ln x \cos x + a_3 \sum \cos^2 x \end{cases} \qquad (13.2)$$

И оценки коэффициентов такой модели будут обладать всеми замечательными свойствами оценок МНК. Но вот при оценивании параметров мультипликативных нелинейных моделей непосредственное использование МНК затруднительно.

Так, для оценивания с помощью МНК параметров простой степенной модели:

$$Y_t = a_0 x_t^{a_1} \tag{13.3}$$

необходимо решить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (Y_t - a_0 x_t^{a_1})^2}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial (Y_t - a_0 x_t^{a_1})^2}{\partial a_1} = 0 \end{cases} \tag{13.4}$$

Вычисляя производные, получим:

$$\begin{cases} \sum_t y_t e^{a_1 x_t} - a_0 \sum_t e^{2a_1 x_t} = 0, \\ a_0 \sum_t y_t x_t e^{a_1 x_t} - a_0^2 \sum_t x_t e^{2a_1 x_t} = 0. \end{cases} \tag{13.5}$$

И хотя сегодня решение такой системы двух нелинейных уравнений не представляет собой каких-либо трудностей — с помощью численных методов и современных программных продуктов это делается просто, но на момент создания эконометрии она была практически неразрешима.

И сегодня многие практикующие экономисты, не владеющие в должной мере математическими методами, испытывают затруднения, сталкиваясь с подобными задачами, если, конечно, в их распоряжении нет готовых прикладных программ, решающих их.

Именно поэтому в своё время и был предложен менее точный, но значительно более простой способ решения поставленной задачи — линеаризация исходной нелинейной модели. Для рассматриваемой в качестве примера степенной функции левую и правую части исходного равенства логарифмируют по любому основанию и получают линейную модель (осуществим логарифмирование по натуральному основанию):

$$\ln Y_t = \ln a_0 + a_1 \ln x_t \Leftrightarrow Y_t' = a_0' + a_1 x_t' . \tag{13.6}$$

Коэффициенты этой линеаризованной модели уже можно легко найти с помощью МНК. После оценивания параметров данной модели обратный переход к степенной модели достаточно прост — нужно только по известному значению a'_0 найти коэффициент a_0:

$$a_0 = e^{a_0'} . \tag{13.7}$$

Давно уже известно, что оценки параметров исходной степенной модели, найденные таким способом, будут смещены — ведь минимизируются квадраты отклонений не степенной модели, а её линеаризованного аналога. Но в подавляющем большинстве случаев это не представляет особой проблемы — модель, чьи параметры найдены подобным образом, достаточно хорошо описывает исходный ряд.

Очевидно, что если для задач оценивания параметров эконометрических моделей действительных переменных с помощью МНК его непосредственное применение приводит к вычислительным сложностям, связанным с необходимостью решения систем нелинейных уравнений, то для случая оценивания параметров нелинейных эконометрических моделей комплексных переменных это обстоятельство усугубляется в ещё большей степени в силу свойств нелинейных комплекснозначных функций, многолистности степенных функций, например.

Поэтому для целей практического применения МНК в эконометрике комплексных переменных возникает необходимость разработки практических методик оценивания параметров каждой из нелинейных эконометрических моделей комплексных переменных. Воспользуемся для этого подходом, аналогичным тому, который используется в эконометрике действительных переменных.

Первой из нелинейных моделей комплексных переменных рассмотрим степенную комплекснозначную функцию с действительными коэффициентами. Она имеет следующий вид:

$$y_{rt} + iy_{it} = a_0 (x_{rt} + ix_{it})^{b_0} . \tag{13.8}$$

Прежде чем показать возможность применения МНК к этой функции, покажем на одну очень интересную особенность этой и подобных ей моделей (*Светуньков, Светуньков*, 2019). Представив каждую из комплексных переменных в экспоненциальном виде, и подставив их в модель (13.8), получим:

$$R_{yt}e^{i\theta_{yt}} = a_0 R_{xt}^{b_0} e^{ib_0\theta_{xt}}. \tag{13.9}$$

Где

$$R_{yt} = \sqrt{y_{rt}^2 + y_{it}^2},\ R_{xt} = \sqrt{x_{rt}^2 + x_{it}^2},\ \theta_{yt} = arctg\frac{y_{it}}{y_{rt}},\ \theta_{xt} = arctg\frac{x_{it}}{x_{rt}}. \tag{13.10}$$

Вспомнив о том, что две комплексные переменные, представленные в экспоненциальной форме, равны друг другу в том и только в том случае, когда равны друг другу их модули и аргументы, получим:

$$R_{yt} = a_0 R_{xt}^{b_0} \quad \text{и} \quad \theta_{yt} = b_0\theta_{xt}. \tag{13.11}$$

Из этого со всей очевидностью следует, что для каждого наблюдения *t* можно найти значение показателя степени b_0:

$$b_{0t} = {\theta_{yt}}\Big/{\theta_{xt}} = \frac{arctg\dfrac{y_{it}}{y_{rt}}}{arctg\dfrac{x_{it}}{x_{rt}}} \tag{13.12}$$

и коэффициента пропорциональности a_0:

$$a_{0t} = \frac{R_{yt}}{R_{xt}^{b_{0t}}} = \frac{R_{yt}}{R_{xt}^{\theta_{yt}/\theta_{xt}}}. \tag{13.13}$$

То есть для оценки значений коэффициентов степенной комплекснозначной функции нет необходимости использовать какое-то множество наблюдений — коэффициенты оцениваются на каждом отдельном наблюдении!

Эта возможность вновь демонстрирует отличие свойств моделей комплексных переменных перед моделями действительных переменных — ведь появляется уникальная возможность оценивания коэффициентов нелинейной модели на каждом наблюдении и давать экономическую интерпретацию моделируемому процессу не в целом за какой-то период, а на конкретном наблюдении, если, конечно, коэффициенты модели несут в себе экономический смысл, а моделируемая зависимость описывается именно этой функцией.

Это свойство даёт возможность анализировать два ряда значений $\{a_{0t}\}$ и $\{b_{0t}\}$, которые в случае обратимого случайного процесса представляют собой выборочные значения коэффициентов из некоторой генеральной совокупности коэффициентов модели (13.8), описывающей математическое ожидание исследуемой взаимосвязи. Так как априорно в эконометрии предполагается, что мы имеем дело с нормальным распределением вероятностей, и выборочные значения коэффициентов a_{0t} и b_{0t}, найденные по (13.12) и (13.13), колеблются вокруг некоторых математических ожиданий a_0 и b_0, то лучшей оценкой искомых параметров модели (13.8) выступают их средние арифметические:

$$b_0 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{arctg\,\dfrac{y_{it}}{y_{rt}}}{arctg\,\dfrac{x_{it}}{x_{rt}}} \tag{13.14}$$

и

$$a_0 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_{rt}^2 + y_{it}^2)^{1/2}}{(x_{rt}^2 + x_{it}^2)^{1/2 \frac{arctg \frac{y_{it}}{y_{rt}}}{arctg \frac{x_{it}}{x_{rt}}}}}\,. \tag{13.15}$$

Для таких оценок легко высчитываются их дисперсия и доверительные границы, поэтому нелинейная модель (13.8) представляется весьма удобной и очень простой для моделирования разнообразных экономических процессов.

Но поскольку задачей данного параграфа является поиск подходов по использованию МНК, применительно к модели (12.1) и ей подобных, покажем её решение. Такая задача может возникнуть, если исследователю необходимо не просто вычислить параметры эконометрической модели, а построить эту модель, чтобы описать некоторую среднюю тенденцию за рассматриваемый промежуток времени. В этом случае необходимо использовать МНК. Прежде всего, в этом случае следует осуществить линеаризацию исходной модели. Тогда получим:

$$\ln(y_{rt} + iy_{it}) = \ln a_0 + b_0 \ln(x_{rt} + ix_{it}) . \qquad (13.16)$$

Так как мы работаем с главными значениями логарифмов, то полученное выражение может быть представлено так:

$$\ln R_{yt} + i\varphi_{yt} = \ln a_0 + b_0(\ln R_{xt} + i\varphi_{xt}) . \qquad (13.17)$$

С учётом этой формы записи, воспользовавшись ранее полученной системой МНК для линейной модели и подставляя эти значения в систему МНК, получим:

$$\begin{cases} \sum_t \ln R_{yt} = T \ln a_0 + b_0 \sum_t \ln R_{xt}, \\ \sum_t \varphi_{yt} = b_0 \sum_t \varphi_{xt}. \end{cases} \qquad (13.18)$$

Откуда:

$$b_0 = \sum_t \varphi_{yt} / \sum_t \varphi_{xt} , \qquad (13.19)$$

$$\ln a_0 = \frac{1}{T}\left(\sum_t \ln R_{yt} - \frac{\sum_t \varphi_{yt}}{\sum_t \varphi_{xt}} \sum_t \ln R_{xt}\right). \qquad (13.20)$$

В общем случае оценки (13.19) и (13.20) будут отличаться от оценок (13.14) и (13.15). В этой работе мы не будем сравнивать их друг с другом и давать соответствующие рекомендации. Отметим лишь, что использование МНК для линеаризованной модели приводит к тому, что оценки (13.19) и (13.20) будут смещёнными, в отличие от оценок (13.14) и (13.15).

Можно найти коэффициенты модели (13.8), используя непосредственно линеаризованную форму (13.16). Тогда следует воспользоваться следующей системой уравнений МНК:

$$\begin{cases} \sum_t \ln(y_{rt} + iy_{it}) = T \ln a_0 + b_0 \sum_t \ln(x_{rt} + ix_{it}) \\ \sum_t \ln(y_{rt} + iy_{it}) \ln(x_{rt} + ix_{it}) = \ln a_0 \sum_t \ln(x_{rt} + ix_{it}) + b_0 \sum_t \ln(x_{rt} + ix_{it})^2 \end{cases} \qquad (13.21)$$

Здесь уместно сказать, что не только рассматриваемая нелинейная комплекснозначная модель обладает интересным свойством, когда её коэффициенты могут быть вычислены на одном наблюдении. Любая комплекснозначная модель с двумя коэффициентами (действительными или мнимыми) может быть построена только по одному наблюдению, что делает их уникальными для целей экономической аналитики. Объясняется это очень просто. Комплекснозначная функция представляет собой не что иное, как систему двух действительных функций. Поэтому если на каком-либо наблюдении t в распоряжении экономиста имеются данные по x_{rt}, x_{it}, y_{rt} и y_{it}, то, подставляя их в функциональную зависимость и приравнивая друг другу действительные и мнимые части равенства, получаем тем самым систему двух уравнений с двумя неизвестными коэффициентами, которые сразу же и вычисляются.

Степенная функция, у которой могут быть два коэффициента, значения которых могут быть вычислено на каждом наблюдении, может принимать, помимо формы (13.8), ещё и такие формы:

$$y_{rt} + iy_{it} = ia_1(x_{rt} + ix_{it})^{b_0},$$

$$y_{rt} + iy_{it} = ia_1(x_{rt} + ix_{it})^{b_0},$$

$$y_{rt} + iy_{it} = ia_1(x_{rt} + ix_{it})^{ib_1}.$$

Теперь покажем, как найти параметры степенной модели комплексных переменных с комплексными коэффициентами, которая представляет собой наиболее общий вид степенных функций комплексных переменных:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)(x_{rt} + ix_{it})^{(b_0 + ib_1)}. \tag{13.22}$$

Для этой функции найти коэффициенты на каждом наблюдении не получится, поскольку модель имеет четыре коэффициента, а не два, как в модели (13.8).

Вновь приведём эту функцию к линейному виду, прологарифмировав левую и правую части равенства по натуральному основанию:

$$\ln(y_{rt} + iy_{it}) = \ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(x_{rt} + ix_{it}). \tag{13.23}$$

Мы, как и прежде, используем главные значения логарифмов. Для комплексного аргумента логарифм будет таким:

$$\ln(x_{rt} + ix_{it}) = \ln R_x + i\varphi_x, \tag{13.24}$$

где R_x — модуль комплексной переменной определяющего фактора, φ_x — её полярный угол. Для комплексной переменной моделируемого результата логарифм запишется так:

$$\ln(y_{rt} + iy_{it}) = \ln R_y + i\varphi_y \ , \tag{13.25}$$

где R_y — модуль комплексной переменной результата, φ_y — её полярный угол. Для комплексного коэффициента пропорциональности модели (13.22) логарифм запишем так:

$$\ln(a_0 + ia_1) = \ln R_a + i\varphi_a \, , \tag{13.26}$$

где R_a — модуль комплексного коэффициента пропорциональности, а φ_a — его полярный угол.

Приводить комплексный коэффициент (b_0+ib_1) в экспоненциальный вид нет особой необходимости.

С учётом этих обозначений, получим для модели степенной функции комплексных переменных с комплексными коэффициентами следующую линеаризованную модель:

$$\ln R_y + i\varphi_y = (\ln R_a + i\varphi_a) + (b_0 + ib_1)(\ln R_x + i\varphi_x) \, . \tag{13.27}$$

Для простоты последующих действий введём обозначения:

$$\ln(a_0 + ia_1) = \ln R_a + i\varphi_a = A_0 + iA_1 \, . \tag{13.28}$$

Полученная модель, как легко убедиться, приведена к виду линейной модели комплексных переменных с комплексными коэффициентами:

$$\ln R_y + i\varphi_y = (A_0 + iA_1) + (b_0 + ib_1)(\ln R_x + i\varphi_x) \, . \tag{13.29}$$

Коэффициенты такой модели могут быть найдены с помощью уже адаптированного применительно к линейным комплекснозначным моделям МНК. Подставляя в систему нормальных уравнений значения модели (13.25), с учётом обозначений (13.26), получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_t \ln R_{yt} = TA_0 + b_0 \sum\limits_t \ln R_{xt} - b_1 \sum\limits_t \varphi_{xt} \\ \sum\limits_t \varphi_{yt} = TA_1 + b_1 \sum\limits_t \ln R_{xt} + b_0 \sum\limits_t \varphi_{xt} \\ \sum\limits_t \ln R_{yt} \ln R_{xt} - \sum\limits_t \varphi_{yt}\varphi_{xt} = A_0 \sum\limits_t \ln R_{xt} - A_1 \sum\limits_t \varphi_{xt} + b_0 \sum\limits_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) - 2b_1 \sum\limits_t \varphi_t \ln R_t \\ \sum\limits_t \varphi_{yt} \ln R_{xt} + \sum\limits_t \varphi_{xt} \ln R_{yt} = A_0 \sum\limits_t \varphi_{xt} + A_1 \sum\limits_t \ln R_{xt} + b_1 \sum\limits_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) + 2b_0 \sum\limits_t \varphi_t \ln R_t \end{cases} \tag{13.30}$$

Решая эту систему, можно найти значения неизвестных коэффициентов A_0, A_1, b_0, b_1. В итоге получим:

$$y_{rt} + iy_{it} = e^{A_0 + iA_1}(x_{rt} + ix_{it})^{(b_0 + ib_1)} \,. \tag{13.31}$$

Теперь остаётся только коэффициент пропорциональности привести из экспоненциальной формы в форму арифметическую. Для этого по имеющимся значениям A_0 и A_1 легко найти a_0 и a_1:

$$a_0 = e^{A_0} \cos A_1, \quad a_1 = e^{A_0} \sin A_1. \tag{13.32}$$

Поскольку в том же MS Excel есть возможность работы с комплексными переменными и их логарифмами, то можно обойтись и без такого трудоёмкого подхода, а, вычисляя логарифмы, непосредственно решить такую систему уравнений МНК:

$$\begin{cases} \sum_t \ln(y_{rt} + iy_{it}) = T\ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\sum_t \ln(x_{rt} + ix_{it}) \\ \sum_t \ln(y_{rt} + iy_{it})\ln(x_{rt} + ix_{it}) = \ln(a_0 + ia_1)\sum_t \ln(x_{rt} + ix_{it}) + (b_0 + ib_1)\sum_t \ln(x_{rt} + ix_{it})^2 \end{cases} \tag{13.33}$$

Одним из подвидов видов степенных функций комплексных переменных является степенная функция комплексного аргумента. В общем виде она может быть представлена следующим образом:

$$y_{rt} = (a_0 + ia_1)(x_{rt} + ix_{it})^{(b_0 + ib_1)} \,. \tag{13.34}$$

Прологарифмировав левую и правую части равенства по натуральному основанию, получим такую линеаризованную модель:

$$\ln y_{rt} = \ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(x_{rt} + ix_{it}) \,. \tag{13.35}$$

С учётом введённых ранее обозначений:

$$\ln y_{rt} = (\ln R_a + i\varphi_a) + (b_0 + ib_1)(\ln R_x + i\varphi_x) = A_0 + iA_1 + (b_0 + ib_1)(\ln R_x + i\varphi_x) \,. \tag{13.36}$$

Отличие этой модели от модели комплексных переменных заключается в том, что в левой части полученного равенства нет мнимой части. Поэтому система уравнений МНК для степенной функции комплексного аргумента может быть представлена в таком виде:

$$\begin{cases} \sum_t \ln y_{rt} = TA_0 + b_0\sum_t \ln R_{xt} - b_1\sum_t \varphi_{xt} \\ 0 = TA_1 + b_1\sum_t \ln R_{xt} + b_0\sum_t \varphi_{xt} \\ \sum_t \ln y_{rt} \ln R_{xt} = A_0\sum_t \ln R_{xt} - A_1\sum_t \varphi_{xt} + b_0\sum_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) - 2b_1\sum_t \varphi_{xt} \ln R_{xt} \\ \sum_t \ln y_{rt}\varphi_{xt} = A_0\sum_t \varphi_{xt} + A_1\sum_t \ln R_{xt} + b_1\sum_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) + 2b_1\sum_t \varphi_{xt} \ln R_{xt} \end{cases} \tag{13.37}$$

Решая эту систему, найдём оценки МНК для степенной функции комплексного аргумента с комплексными коэффициентами.

При непосредственном использовании логарифмов, получим такую систему уравнений МНК для линеаризованной формы (13.35):

$$\begin{cases} \sum_t \ln y_{rt} = T\ln(a_0+ia_1)+(b_0+ib_1)\sum_t \ln(x_{rt}+ix_{it}) \\ \sum_t \ln y_{rt}\ln(x_{rt}+ix_{it}) = \ln(a_0+ia_1)\sum_t \ln(x_{rt}+ix_{it})+(b_0+ib_1)\sum_t \ln^2(x_{rt}+ix_{it}) \end{cases} \quad (13.38)$$

Рассмотрим теперь методику оценивания параметров модели показательной функции комплексных переменных, которую в общем виде запишем так:

$$y_{rt}+iy_{it}=(a_0+ia_1)e^{(b_0+ib_1)(x_{rt}+ix_{it})}. \quad (13.39)$$

Вновь линеаризуем модель, логарифмируя для этого левые и правые части равенства. Получим:

$$\ln R_{yt}+i\varphi_{yt}=A_0+iA_1+(b_0+ib_1)(x_{rt}+ix_{it}). \quad (13.40)$$

С учётом введённых ранее обозначений это равенство можно записать так:

$$\ln R_{yt}+i\varphi_{yt}=A_0+iA_1+(b_0+ib_1)(x_{rt}+ix_{it}). \quad (13.41)$$

Вновь оценка параметров этой модели не представляет особых трудностей, поскольку система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \sum_t \ln R_{yt} = TA_0+b_0\sum_t x_{rt}-b_1\sum_t x_{it} \\ \sum_t \varphi_{yt} = TA_1+b_1\sum_t x_{rt}+b_0\sum_t x_{it} \\ \sum_t \ln R_{yt}x_{rt}-\sum_t \varphi_{yt}x_{it} = A_0\sum_t x_{rt}-A_1\sum_t x_{it}+b_0\sum_t (x_{rt}^2-x_{it}^2)-2b_1\sum_t x_{rt}x_{it} \\ \sum_t \ln R_{yt}x_{it}+\sum_t \varphi_{yt}x_{rt} = A_0\sum_t x_{it}+A_1\sum_t x_{rt}+b_1\sum_t (x_{rt}^2-x_{it}^2)+2b_0\sum_t x_{rt}x_{it} \end{cases} \quad (13.42)$$

Решая эту систему, находим параметры исходной модели.

Если есть возможность непосредственного исчисления комплексных логарифмов, то задачу можно представить в более компактной комплексной форме:

$$\begin{cases} \sum_t \ln(y_{rt} + iy_{it}) = T\ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it}) \\ \sum_t \ln(y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it}) = \ln(a_0 + ia_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it}) + (b_0 + ib_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2 \end{cases} \qquad (13.43)$$

Аналогичным способом можно с помощью МНК оценить параметры более простой показательной модели — модели показательной функции комплексного аргумента:

$$y_{rt} = (a_0 + ia_1)e^{(b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it})}. \qquad (13.44)$$

Логарифмируя и вводя соответствующие обозначения, получим следующую линеаризованную функцию:

$$\ln y_{rt} = A_0 + iA_1 + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}). \qquad (13.45)$$

Тогда система нормальных уравнений для линеаризованной показательной функции комплексного аргумента примет вид:

$$\begin{cases} \sum_t \ln y_{rt} = TA_0 + b_0\sum_t x_{rt} - b_1\sum_t x_{it} \\ 0 = TA_1 + b_1\sum_t x_{rt} + b_0\sum_t x_{it} \\ \sum_t \ln y_{rt}x_{rt} = A_0\sum_t x_{rt} - A_1\sum_t x_{it} + b_0\sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) - 2b_1\sum_t x_{rt}x_{it} \\ \sum_t \ln y_{rt}x_{it} = A_0\sum_t x_{it} + A_1\sum_t x_{rt} + b_1\sum_t (x_{rt}^2 - x_{it}^2) + 2b_0\sum_t x_{rt}x_{it} \end{cases} \qquad (13.46)$$

Её решение даст экономисту искомые значения коэффициентов модели.

Непосредственно для линеаризованной формы (13.45) имеем систему двух комплексных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_t \ln y_{rt} = T\ln(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it}) \\ \sum_t \ln y_{rt}(x_{rt} + ix_{it}) = \ln(a_0 + ia_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it}) + (b_0 + ib_1)\sum_t (x_{rt} + ix_{it})^2 \end{cases} \qquad (13.47)$$

Так же просто найти параметры модели логарифмической функции комплексных переменных, которая в общем виде записывается так:

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1)\ln(x_{rt} + ix_{it}). \qquad (13.48)$$

Применительно к этой модели следует сразу же отметить, что модель представлена в аддитивной форме и её, в отличие от всех нелинейных моделей, рассмотренных выше, не надо линеаризовать. Разве что следует найти главное значение логарифма комплексного аргумента. Это обстоятельство свидетельствует о том, что оценки комплексных коэффициентов этой модели будут несмещёнными, поскольку минимизируется сумма квадратов комплекснозначных отклонений модели (13.48) от фактических значений, а не её линеаризованного аналога.

Система нормальных уравнений для этой модели, с учётом обозначений, уместных для логарифмируемого фактора, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_t y_{rt} = Ta_0 + b_0 \sum\limits_t \ln R_{xt} - b_1 \sum\limits_t \varphi_{xt} \\ \sum\limits_t y_{it} = Ta_1 + b_1 \sum\limits_t \ln R_{xt} + b_0 \sum\limits_t \varphi_{xt} \\ \sum\limits_t y_{rt} \ln R_{xt} - \sum\limits_t y_{it}\varphi_{xt} = a_0 \sum\limits_t \ln R_{xt} - a_1 \sum\limits_t \varphi_{xt} + b_0 \sum\limits_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) - 2b_1 \sum\limits_t \varphi_{xt} \ln R_{xt} \\ \sum\limits_t y_{rt}\varphi_{xt} + \sum\limits_t y_{it} \ln R_{xt} = a_0 \sum\limits_t \varphi_{xt} + a_1 \sum\limits_t \ln R_{xt} + b_1 \sum\limits_t (\ln^2 R_{xt} - \varphi_{xt}^2) + 2b_0 \sum\limits_t \varphi_{xt} \ln R_{xt} \end{cases} \quad (13.49)$$

Её решение даст экономисту искомые значения оценок коэффициентов модели.

Непосредственно в комплексной форме система уравнений МНК будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \sum\limits_t (y_{rt} + iy_{it}) = T(a_0 + ia_1) + (b_0 + ib_1) \sum\limits_t \ln(x_{rt} + ix_{it}) \\ \sum\limits_t (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it}) = (a_0 + ia_1) \sum\limits_t \ln(x_{rt} + ix_{it}) + (b_0 + ib_1) \sum\limits_t \ln^2(x_{rt} + ix_{it}) \end{cases} \quad (13.50)$$

Итак, теперь можно использовать различные комплекснозначные функции для решения разнообразных задач современной эконометрии, находя значения коэффициентов эконометрических моделей с помощью МНК так, как это показано в данном параграфе.

14. ОЦЕНКА ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ВЫБОРОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Мы рассматриваем проблемы и задачи построения эконометрических моделей исключительно к условиям обратимых процессов — случайных и нормально распределённых. А это значит, что исследователь имеет дело с выборочными значениями случайных величин, по которым он судит о генеральной совокупности в целом. Поскольку вычисляются выборочные значения, то необходимо определить — насколько можно доверять этим выборочным значениям, то есть оценить — насколько они близки к своему истинному значению, а именно — к математическому ожиданию.

Понятно, что если перед исследователем стоит задача изучить простой стационарный процесс случайной действительной переменной, который представлен некоторой выборкой из генеральной совокупности, то, предполагая нормальное распределение этой переменной Y_i, следует вначале рассчитать её среднюю арифметическую:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{14.1}$$

и, вычислив дисперсию отклонений фактических наблюдений от этой средней σ^2, можно определить тот интервал, в котором находится истинное значение Y:

$$\overline{Y} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le Y \le \overline{Y} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ . \tag{14.2}$$

Здесь t_α — значение t-статистики Стьюдента.

Как видно из (14.2), доверительные границы для действительных одномерных переменных представляют собой отрезок на числовой оси, внутри которого с заданной вероятностью могут находиться случайные величины.

Если вместо вещественного случая рассматривать комплекснозначную переменную, то ход рассуждений не должен, на первый взгляд, нарушаться — высчитываются средние арифметические для комплексной случайной величины (что тождественно вычислению средних арифметических для действительной и мнимой частей по отдельности), для них же определяются дисперсии, после чего с помощью стандартного подхода (14.2) определяются доверительные границы. Тогда доверительные границы значений двух составляющих случайной комплексной величины должны определяться так:

$$(\overline{y}_r + i\overline{y}_i) - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}(\sigma_{y_r} + i\sigma_{y_i}) \le y_r + iy_i \le \overline{y}_r + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}(\sigma_{y_r} + i\sigma_{y_i}). \qquad (14.3)$$

Но смысл этого способа определения доверительных границ комплексной случайной величины раскроется, если его записать в виде системы из двух условий изменения доверительных границ отдельно для вещественной и мнимой частей:

$$\begin{cases} \overline{y}_r - t_\alpha \dfrac{\sigma_{y_r}}{\sqrt{n}} \le y_r \le \overline{y}_r + t_\alpha \dfrac{\sigma_{y_r}}{\sqrt{n}}, \\ \overline{y}_i - t_\alpha \dfrac{\sigma_{y_i}}{\sqrt{n}} \le y_i \le \overline{y}_i + t_\alpha \dfrac{\sigma_{y_i}}{\sqrt{n}}. \end{cases} \qquad (14.4)$$

Из этого со всей очевидностью следует, что на комплексной плоскости случайной комплексной переменной доверительная область будет представлять собой прямоугольник, очерченный сторонами, определяемыми доверительными границами (14.4), причём стороны этого прямоугольника будут параллельны осям комплексной плоскости. Центром этого прямоугольника, а значит, и доверительной области в форме прямоугольника будет являться точка на комплексной плоскости, определяемая координатами средней арифметической комплексной случайной переменной $(\overline{y}_r, \overline{y}_i)$.

Как было показано во втором параграфе монографии, доверительная область комплексной случайной величины должна представлять собой некоторое облако рассеяния допустимых значений, а не прямоугольник. К тому же это облако должно иметь форму эллипса, оси которого параллельны осям комплексной плоскости только в том случае, когда действительная и мнимая части комплексной переменной не зависят друг от друга. А в случае зависимости их друг от друга, а именно этот случай мы и рассматриваем, оси эллипса рассеивания не будут параллельными осям комплексной плоскости.

Таким образом, кажущаяся на первый взгляд верной процедура нахождения доверительных границ с помощью процедуры (14.3), оказывается очень грубым приближением к действительности и её можно использовать только с целью нахождения очень приблизительных границ доверительной области.

Поэтому стандартный подход, который кажется таким очевидным, оказывается ошибочным. Для научных и практических исследований необходимо использовать доверительную область, представляющую собой эллипс, внутри которого находятся те точки, которые входят в доверительную область, а за пределами которого находятся точки, выходящие за доверительную область.

Воспользуемся уравнением эллипса рассеяния, которое было приведено во втором параграфе, а именно — уравнением (2.14). Применительно к нашей задаче доверительная область должна находиться внутри эллипса, то есть должно выполняться такое условие:

$$\frac{(y_r - m_{y_r})^2}{\sigma_{y_r}^2} - 2\frac{r_{y_r y_i}(y_r - m_{y_r})(y_i - m_{y_i})}{\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}} + \frac{(y_i - m_{y_i})^2}{\sigma_{y_i}^2} \le s_{\alpha,n} \ . \qquad (14.5)$$

Здесь $s_{\alpha,n}$ — некоторое число, определяющее границу доверительной области. Это число зависит от уровня доверительной вероятности α и числа степеней свободы n.

Для выборочных значений, когда вместо математических ожиданий нам известны их оценка — средние арифметические и выборочные значения дисперсий, уравнение эллипса доверительной области комплексной случайной переменной будет выглядеть так:

$$\frac{(y_r-\overline{y}_r)^2}{\sigma_{y_r}^2}-2\frac{r_{y_r y_i}(y_r-\overline{y}_r)(y_i-\overline{y}_i)}{\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}}+\frac{(y_i-\overline{y}_i)^2}{\sigma_{y_i}^2}\le s_{\alpha,n}\,. \qquad (14.6)$$

Найти аналитическую взаимосвязь между $s_{\alpha,n}$ и t_α нам не удалось, и это будет являться задачей наших дальнейших научных исследований. Но поскольку современная вычислительная техника позволяет выполнять многочисленные модельные эксперименты и компьютерные опыты, то найти табличную зависимость между ними с помощью этого подхода оказывается возможно. В табл. 2 приведены рекомендуемые значения величины $s_{\alpha,n}$ в зависимости от уровня доверительной вероятности α и числа степеней свободы n, которые были получены в ходе таких машинных экспериментов.

Покажем, как воспользоваться этой таблицей и условиями (14.6) на конкретном примере.

В нашем распоряжении имеются данные о результатах ежедневных котировок на мировых товарных биржах двух товаров — нефти марки *Brent* и природного газа с 4 января 2010 года по 9 августа 2013 года.

Поскольку эти два товара отражают ситуацию на мировом рынке органического топлива, то их вполне можно представить как одну случайную комплексную переменную:

$$Z_t = y_{rt} + iy_{it}\,. \qquad (14.7)$$

где y_{rt} — цена барреля нефти марки *Brent*, а y_{it} _ цена кубометра природного газа.

Поскольку размерности и масштаб этих переменных различны, их необходимо привести к одной размерности и к одному масштабу. Проще всего это сделать, если каждую величину ряда значений цены барреля нефти разделить на величину первого наблюдения этого показателя от 4 января 2010 года, а каждую величину ряда значений цены газа разделить на первое значение цены газа от 4 января 2010 года.

Для полученного ряда из более чем 900 наблюдений было найдено среднее арифметическое, которое равно:

$$\overline{y}_{rt} + i\overline{y}_{it} = 1,259 + i0,643\,. \qquad (14.8)$$

Таблица 2

Критические точки распределения $s_{\alpha,n}$

Число степеней свободы n	Уровень значимости α			
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	19,908	80,645	506,256	2028,846
2	2,842	6,163	16,194	32,802
3	1,381	2,528	5,153	8,526
4	0,907	1,546	2,812	4,233
5	0,673	1,100	1,536	2,707
6	0,538	0,857	1,409	1,966
7	0,477	0,696	1,125	1,531
8	0,384	0,593	0,935	1,254
9	0,335	0,511	0,795	1,056
10	0,298	0,452	0,692	0,914
11	0,270	0,403	0,617	0,806
12	0,244	0,366	0,552	0,716
13	0,224	0,333	0,502	0,647
14	0,207	0,305	0,458	0,592
15	0,191	0,284	0,423	0,544
16	0,180	0,264	0,392	0,502
17	0,168	0,247	0,367	0,467
18	0,158	0,232	0,342	0,437
19	0,150	0,218	0,323	0,409
20	0,143	0,208	0,305	0,387
21	0,134	0,197	0,289	0,364
22	0,129	0,186	0,274	0,346
23	0,122	0,177	0,260	0,329
24	0,117	0,170	0,248	0,314
25	0,112	0,163	0,238	0,299
26	0,108	0,157	0,228	0,286
27	0,104	0,150	0,218	0,274
28	0,100	0,145	0,209	0,263
29	0,096	0,140	0,202	0,254
30	0,095	0,138	0,199	0,250
40	0,094	0,136	0,195	0,243
60	0,093	0,133	0,190	0,236
120	0,092	0,131	0,186	0,229

Для этого же ряда были вычислены дисперсии и их СКО, которые равны: $\sigma_r = 0{,}00616$ и $\sigma_r = 0{,}00427$. Также был вычислен парный коэффициент корреляции между действительной и мнимой частями комплексной случайной величины, который оказался равным $r = -0{,}57001$. Это, кстати, в очередной раз повторяет нашу убеждённость в том, что подобные экономические показатели, сведённые в одну комплексную переменную, ни в коем случае нельзя рассматривать как независимые друг от друга и дисперсию такой комплексной случайной величины надо рассматривать как комплексную величину.

Теперь можно подставить эти значения в условие (14.6) и определить область доверительных границ для величин этого ряда комплексной случайной величины:

$$26334{,}55(y_r - 1{,}259)^2 + 43293{,}6(y_r - 1{,}259)(y_i - 0{,}643) + 54765{,}12(y_i - 0{,}643)^2 \leq s_{\alpha,n}. \quad (14.9)$$

Найдём ответ на такой вопрос: попадает ли с вероятностью в 0,95 число $(1{,}40 + i0{,}80)$ в область доверительных значений?

Для ответа на поставленный вопрос следует подставить в (14.9) указанные значения комплексной случайной величины и вычислить значение левой части неравенства. Сделаем это. В результате вычислений было получено число $s = 2831{,}366$. Оно существенно выше критического, которое, как видно из табл. 2, для более чем 900 наблюдений и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ равно $s_{\alpha,n} = 0{,}131$. Следовательно, указанное число $(1{,}40 + i0{,}80)$ выходит за область доверительных значений.

Найдём теперь ответ на другой вопрос: а попадает ли число $(1{,}26 + i0{,}64)$ в область доверительных значений при той же вероятности 0,95?

Подставляя значения этого комплексного числа в (14.6) и вычисляя значение s (левую часть неравенства (14.6)), получим $s = 0{,}018$. Как видно, вычисленное значение левой части неравенства меньше критического и неравенство выполняется: $s < s_{\alpha,n} = 0{,}131$. Следовательно, рассматриваемое число $(1{,}26 + i0{,}64)$ находится внутри доверительной области.

Таким образом, предлагаемая процедура определения доверительных границ для комплексной случайной величины может быть использована для научных и практических исследований в области комплекснозначной эконометрики.

Её же можно использовать для оценки доверительных границ других выборочных комплексных переменных, например, комплексных коэффициентов регрессионных моделей. Вопрос вычисления доверительных границ для комплексного коэффициента парной корреляции здесь рассматривать не будем, понимая, что изложенный в данном параграфе подход по оценке доверительных границ комплексной случайной величины является универсальным, и он может помочь и для определения доверительных границ выборочных значений комплексного коэффициента парной корреляции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Комплекснозначная экономика с трудом пробивает дорогу в область экономической науки, преодолевая на каждом шагу принцип «бритвы Оккама», который используют некоторые её критики.

Важным препятствием на этом пути являлось отсутствие в математической статистике внятного раздела, посвящённого регрессионно-корреляционному анализу комплексной случайной величины. В монографии показана причина этого удивительного явления — изначальное предположение о независимости друг от друга вещественной и мнимой частей комплексной случайной переменной.

В случае комплекснозначной эконометрики это предположение не выполняется, а потому первые исследования в области практического применения комплекснозначной экономики сталкивались со сложностями при эконометрических построениях — математическая статистика не дала соответствующего инструментария.

Обзор научных исследований в прошлом и настоящем показал, что те учёные, которые работали и работают с обработкой комплексных случайных переменных, не сталкивались с ситуацией зависимости друг от друга действительной и мнимой частей. То есть у этих учёных не было потребностей в развитии аппарата математической статистики в данном направлении. С ситуациями, подобным тем, которые возникают в комплекснозначной экономике, они не встречались.

Поэтому группа учёных, работающих над развитием комплекснозначной экономики, была вынуждена заняться решением этих вопросов.

Данная монография является первым научным трудом, в котором сформированы основы регрессионно-корреляционного анализа комплексных случайных переменных применительно к задачам эконометрики. Теперь, опираясь на эту базу, экономист может без труда построить самые разнообразные эконометрические модели комплексных переменных и с их помощью проводить более тщательное исследование экономики, нежели те, которые проводятся сегодня с помощью моделей действительных переменных.

Мой личный опыт показывает, что всегда модели комплексных переменных лучше описывают сложные экономические процессы, нежели аналогичные им модели действительных переменных. Но это ни в коем случае не подвигает меня сделать вывод о превосходстве комплекснозначной экономики над экономикой, оперирующей исключительно действительными переменными. Я глубоко убеждён в том, что методы и модели комплекснозначной экономики, в том числе и комплекснозначной эконометрики, дополняют имеющийся в распоряжении экономиста математический инструментарий исследования экономики, а не заменяют его. Делая инструменты исследования экономики более многообразными, комплекснозначная экономика тем самым расширяет арсенал тех средств, с помощью которых наука познаёт экономику.

Конечно, приведённые в монографии результаты не являются самодостаточными. И ни в коей мере нельзя утверждать о том, что все вопросы комплекснозначной эконометрики здесь решены. Но в ней изложены те основы, опираясь на которые, можно решить эту сложную задачу — построить комплекснозначную эконометрику.

ЛИТЕРАТУРА

Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — 11-е изд., стер. — М.:КНОРУС, 2010. — 664 с.

Ивановский Р. И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 528 с.

Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.

Мустаев И. З., Гизатуллин Х. Н. Экономико-математические основы управления конкурентоспособностью регионов. — М.: ЗАО «Издательство “Экономика”», 2007.

Рухин А. Л. Комплексный нормальный закон и допустимость выборочного среднего как оценки параметра сдвига // ТВП. — 1967. — Т. 12, вып. 4. — С. 762–764.

Светуньков С. Г., Чанышева А. Ф., Чанцалмаа Бавуу. Динамическое исследование эффективности промышленного предприятия // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). — 2015. — № 1. — С. 355–360.

Светуньков С. Г., Светуньков И. С. Производственные функции комплексных переменных: Экономико-математическое моделирование производственной динамики. — Изд. 2-е, доп. — М.: Ленанд, 2019. — 170 с.

Семёнычев В. К., Семёнычев Е. В. Информационные системы в экономике. Эконометрическое моделирование инноваций. Часть 1. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006.

Слуцкий Е. Е. Экономические и статистические произведения: Избранное. — М.: Эксмо, 2010 — С. 642–792.

Чанышева А. Ф. Нахождение интервальной оценки комплексного уравнения регрессии // Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы Международной научно-практической конференции. 5–6 апреля 2009 г.: в 2ч. / под ред. В. В. Давниса. — Воронеж.: Изд-во ВГУ, 2009.

Шабунин М. И. Теория функций комплексного переменного. — М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. — 248 с.

Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. Т. 1. — М: Госиздат физико-математической литературы, 1961.

Arens R. Complex processes for envelopes of normal noise // IRE Trans. Inform. Theory. — Sept. 1957. — Vol. IT-3. — P. 204–207.

Bombelli R. L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. — Bologna, Coop. Tipografica Azzoguidi, IX 1929. — 303 p.

Hotelling H. Multivariate quality control // Techniques of Statistical analysis. — N.Y.: McGraw-Hill, 1947. — P. 11–84.

Goodman N. R. Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution // Ann. Math. Statist. — 1963. — Vol. 34. — P. 152–176.

Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II. — New York: Wiley, 1966.

Kammeyer K.-D., Kroschel K. Digitale Signalverarbeitung, volume 5. — Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2002.

Mokeichev A., Ben-Shahar O. Second Order Statistics of Stationary Complex Valued Time Series and of Real-Complex Valued Mixtures. Department of Computer Science and the Zlotowski Center for Neuroscience, Ben-Gurion University, Beer Sheva, Israel. URL: https://www.cs.bgu.ac.il/~frankel/TechnicalReports/2013/14-01.pdf.

Pedzisz M., Mandic D. P. Augmented Complex Statistics for Signal Prediction. Technical Report: TR-ICU-EPSRC-08-07-TR002, 2007. — 16 p.

Picinbono B., Bondon P. l. Second-order statistics of complex signals // IEEE Transactions on Signal Processing. — 1997. — Vol. 45 (2). — P. 411–420.

Reed I. S. On a moment theorem for complex Gaussian processes // IRE Trans. Inform. Theory. — Apr. 1962. — Vol. IT-8. — P. 194–195.

Svetunkov S. Complex-Valued Modeling in Economics and Finance. — New York: Springer Science + Business Media, 2012. — 318 p.

Svetunkov S. G. Complex-valued variance in modern econometrics // Problems of economics. — 2018. — №4. — P. 371–379.

Soroush J. Adaptive Signal Processing Algorithms for Noncircular Complex Data. PhD thesis. — Imperial College London, August 2010.

Tavares G. N., Tavares L. M. Statistical Characterization of the Sum of Squared Complex Gaussian Random Variables. Instituto Superior Tecnico. Internal Report # 3036/2006. — 23 p.

Tavares G. N., Tavares L. M. On the Statistics of the Sum of Squared Complex Gaussian Random Variables // IEEE Transactions on Communications. — 2007. — 55 (10). — P. 1857–1862.

Trampitsch S. Complex-Valued Data Estimation Second-Order Statistics and Widely Linear Estimators. Masterarbeit. — Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, 2013. — 123 p.

Tuelay Adili, Schreier P. J., Scharf L. L. Complex-valued signal processing: The proper way to deal with impropriety // IEEE Transactions on Signal Processing. — 2011. — Vol. 59 (11). P. 5101–5125.

Wooding R. A. The multivariate distribution of complex normal variables // Biometrika. — 1956. — Vol. 43. — P. 212–215.

Yanfei Jia, Xiaodong Yang. Adaptive Complex-Valued Independent Component Analysis Based on Second-Order Statistics // Journal of Electrical and Computer Engineering. — Volume 2016, Article ID 2467198. URL: http://dx.doi.org/10.1155/2016/2467198.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

СВЕТУНЬКОВ СЕРГЕЙ ГЕННАДЬЕВИЧ

ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Корректор *А. Ю. Яковлева*
Компьютерная верстка, дизайн обложки *М. А. Ивановой*

Подписано в печать 05.12.2019. Формат 60×90/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 6,63. Тираж 100. Заказ 123.

Выпущено ООО «Медиапапир»
194021, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 24, лит. В,
пом. 11-Н № 25, 26.
Тел.: (812) 987-75-26
mediapapir@gmail.com www.mediapapir.com www.mediapapir.ru