

ББК 65.054

С24

Светуньков С. Г. Экономическое прогнозирование с помощью комплекснозначных авторегрессий / С. Г. Светуньков. – СПб.: ПОЛИТЕХ–ПРЕСС, 2021. – 155 с.

Авторегрессионные модели активно используются в моделировании стохастических стационарных процессов и в краткосрочном экономическом прогнозировании. Для моделирования и прогнозирования разнообразных процессов учёные предлагают различные модификации моделей авторегрессий.

В монографии рассматривается новый класс авторегрессий, значительно расширяющий инструментальную базу моделей авторегрессий, а именно комплекснозначные авторегрессии. В основе этих моделей лежат комплексные случайные переменные, оказывающие взаимное влияние друг на друга либо взаимодополняющие друг друга.

Монография предназначена для специалистов, занимающихся моделированием стохастических процессов и их краткосрочным прогнозированием.

Она может быть полезна не только экономистам, но и учёным и практикам других наук, использующим в своей работе модели авторегрессии.

ISBN 978–5–7422–7567–1

© Светуньков С. Г., 2021

© Санкт–Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2021

Введение

Теория функций комплексного переменного активно используется в современной физике и практически во всех инженерных науках. С помощью моделей и методов этого раздела математики удаётся относительно просто описать сложные явления, которые изучаются этими науками.

Экономика является значительно более сложным объектом научного исследования, чем объекты исследования физики или инженерных наук. Это вызвано несколькими свойствами экономики, на которые несведущие в ней учёные не обращают внимания.

Первая особенность, которая делает экономику сложным объектом для исследования, заключается в том, что данные, по которым мы судим о состоянии или изменении состояния экономического объекта, измеряются не только в метрических шкалах, но и в шкалах более низкого уровня – интервальной, порядковой и даже номинальной. А эти шкалы менее всего приспособлены для целей математического моделирования. Поэтому при анализе экономики с помощью методов математического моделирования приходится либо абстрагироваться от влияния подобных факторов и данных о них, измеряемых в неметрических шкалах, либо для их учёта переходить из метрических шкал в шкалы более низкого уровня, что существенно понижает аналитические свойства математических моделей.

Поэтому экономистам приходится одновременно оперировать словесными моделями (в 40 % случаев), графическими моделями (в 30 % случаев), математическими моделями (в 20 % случаев) и аналоговыми моделями в форме различных фокус-групп или кейсов (в 10 % случаев). Получается так, что математические модели не выступают в экономике как высший уровень познания именно потому, что экономические данные не позволяют это сделать. Полностью полагаться на экономико-математические модели для получения каких-либо аналитических выводов не приходится.

Вторая особенность экономики, на которую, как ни странно, не обращают внимания даже многие экономисты, заключается в том, что в ней очень не многие процессы являются чисто стохастическими. Конечно же, случайные процессы преобладают в окружающем нас мире, в том числе и в экономике. Но в экономике помимо детерминированных процессов,

подверженных влиянию случайных факторов, существует множество факторов и явлений, которые определяются необратимым характером экономической динамики.

Вообще все окружающие нас процессы могут быть обратимыми и необратимыми [4].

К обратимым процессам следует отнести те из них, которые не претерпевают во времени качественных изменений. У таких объектов, процессы развития которых наблюдаются по данным, не меняется во времени структура и взаимосвязь между элементами. При этом могут наблюдаться количественные изменения показателей процессов, а могут такие изменения и не наблюдаться. В последнем случае говорят о «стационарных» процессах.

Если объекты, динамика которых обратима, поместить в начальные стартовые значения, при которых осуществлялся сбор данных об их динамике, то эти объекты поведут себя точно также, как и ранее. Если проводить опыт с металлическим стержнем длиной 1 метр, нагревая его от нуля градусов и следить за изменением его длины, то после окончания опытов и остывания стержня до первоначальной нулевой температуры его длина вновь будет равна 1 метру. Эксперименты с этим стержнем можно повторять многократно.

Но поскольку практически на все объекты, в том числе и на экономические, воздействует множество факторов случайной природы, то собираемые данные о динамике обратимого процесса будут отличаться друг от друга на некоторую случайную компоненту. Для того чтобы свести к минимуму её влияние, необходимо многократное повторение наблюдений за объектом в динамике, всё время возвращаясь к начальным условиям. Поскольку учёные могут многократно повторять подобные эксперименты и собирать данные о наблюдаемом объекте в ходе наблюдений за экспериментами, такие процессы можно назвать обратимыми.

Обратимые процессы встречаются и в экономике, но не так часто, как необратимые процессы.

Для живой природы, а экономика относится именно к этому типу явлений, характерна необратимость многих процессов, вызванная эволюционным характером развития объектов живой природы. Живые объекты

получают информацию об изменениях во внешней среде и адаптируются к этим изменениям, трансформируя структуру своих элементов и взаимодействие между ними. В объектах живой природы процесс эволюции вызван самыми разными причинами, в том числе и случайными генетическими изменениями в организмах, позволяющими полезные для организма новые свойства в изменившихся условиях зафиксировать в геномном коде, а бесполезные – отринуть вместе с гибелью организмов, имеющих такие бесполезные изменения. Этот процесс прекрасно описан Ч. Дарвином, и повторять его учение здесь не имеет смысла.

В экономике также происходят эволюционные изменения. Но вызваны они не случайными генетическими изменениями, а целенаправленной человеческой деятельностью – инновациями.

Электрон, движущийся в электромагнитном поле, будет всегда описывать одну и ту же траекторию. Отклонения от неё будут носить случайный характер. Это – обратимый процесс. Кошмаром для физиков было бы эволюционное поведение каждого отдельно взятого электрона, когда изменение траектории его движения вызвано не только воздействием случайных факторов, но и сознательным выбором: «Не хочу каждый раз попадать в одну и ту же точку и погибать в аноде. Хочу двигаться от этого катода к другому аноду для того, чтобы жить дольше и интереснее!» А ведь именно с таким «кошмаром» сталкиваются учёные, изучающие экономику – человек в одних случаях ведёт себя рационально, а в других случаях – нерационально. Вместо ноутбука серого цвета он может купить ноутбук, стоящий в два раза дороже, потому что этот ноутбук – «красненький». Даже экономическая теория обратила, наконец, своё внимание на нерациональность поведения человека и подтвердила научную значимость поведенческой экономики.

Если развивающийся экономический объект мы поместим в первоначальные условия, то он поведёт себя иначе, чем раньше, именно потому, что в ходе своего развития в нём произошли необратимые изменения. Предположим, что современная Россия оказалась в условиях 2000 года. И далее эти условия будут изменяться так, как это происходило, начиная с 2000 года. Разве экономическая динамика страны будет такой же? Конечно же,

нет. В структуре экономики России 2000 года, например, существовало станкостроение, а сегодня этой отрасли в России практически нет. За прошедшие двадцать с лишним лет в экономике России произошли необратимые изменения, и возвращения к прошлому никогда не будет. Из этого следует очевидный вывод: для того чтобы понять экономическую ситуацию в современной России и предвидеть её состояние в будущем, экономистам приходится работать с ограниченным количеством данных.

Любой математик скажет, что для построения экономико–статистической модели нужно собрать как можно больше данных – чем больше, тем лучше. Для обратимых процессов это так. И для построения достоверных статистических оценок однородного обратимого процесса достаточно использовать 120 наблюдений. Но для экономики России в 2020 году 120 наблюдений начинаются с 1900 года. Какую ценность для понимания состояния экономики России в 2021 году имеют данные о ней за 1900 год? Никакой ценности они не представляют, поскольку в 1900 году была совсем другая экономическая система в России, нежели в 2020 году. Это была другая страна, пусть и называвшаяся Россией. Более того – даже данные за последние тридцать лет об экономике страны являются малозначимыми: в 1990 году Россия носила не только другое название (РСФСР), но и её экономика была совсем другой – сельское хозяйство было колхозным и совхозным, рыночных механизмов не было, сфера услуг была слаборазвитой, а цифровой экономики и вовсе не было. Это был другой экономический объект. В современной экономике России, безусловно, многое осталось от экономики Советской России. Но даже то, что осталось, претерпело и количественные, и качественные изменения.

Вот и получается, что для целей математического моделирования экономической динамики можно использовать только несколько последних наблюдений, причём чем дальше уходят в прошлое эти наблюдения, тем менее ценными они становятся. Это свойство экономической динамики и породило появление многочисленных методов адаптивного моделирования экономики.

Эти два основных обстоятельства – разнообразие данных, измеряемых в разных шкалах, и эволюционный характер экономической динамики, –

приводят к тому, что экономика как объект для научного исследования оказывается значительно более сложным, чем большинство объектов естественно-научной или инженерной природы.

Значит ли это, что учёным, признавая эти сложности, придётся опустить руки и прекратить работы в области математического моделирования экономики? Наоборот! Следует расширять арсенал используемых методов и моделей для того, чтобы в каждом конкретном случае из этого богатого арсенала выбрать наиболее подходящий инструмент исследования и моделирования экономического объекта. Эволюция экономических систем столь разнообразна, что трудно встретить один и тот же характер экономической динамики. Поэтому разнообразию экономической природы должно соответствовать разнообразие экономико–математических моделей, описывающих экономическую природу.

Это означает, что развитие методов и моделей в экономике за счёт новых подходов и новых инструментов является важной и вечно актуальной научной задачей.

Существенную помощь в решении этой задачи может оказать комплекснозначная экономика – раздел экономико-математического моделирования, в котором в качестве переменных используются комплексные переменные и комплекснозначные функции.

Из огромного разнообразия направлений использования комплекснозначной экономики в данной работе внимание сосредоточено на моделировании стационарных обратимых процессов, прогнозирование которых может быть осуществлено с помощью моделей авторегрессий. Сегодня модели авторегрессий являются наиболее часто используемыми в задачах краткосрочного экономического прогнозирования. При краткосрочном прогнозировании цен, объёмов спроса, номенклатуры спроса и т. п. есть все основания предполагать о том, что эти объекты прогнозирования представляют собой некоторую реализацию обратимых стационарных или нестационарных процессов – за рассматриваемый промежуток времени они не успевают претерпеть эволюционных преобразований, поскольку эволюция – это процесс постепенного изменения.

Сегодня существует довольно большое разнообразие моделей авторегрессий. И все они используют действительные переменные. Эти модели нам интересны постольку, поскольку они используются в экономической практике и в научных исследованиях.

Объектом исследования, результаты которого изложены в данной монографии, являются другие модели, а именно модели комплексных переменных. И, изучая эти новые модели комплексных авторегрессий, приходится сравнивать их свойства со свойствами существующих авторегрессий действительных переменных для того, чтобы понять – какую научную и практическую значимость представляют модели авторегрессий комплексных переменных.

Комплекснозначные авторегрессии впервые были введены в научный оборот в 2012 году [41]. Тогда о них был написан только один параграф и были показаны основные свойства простой комплекснозначной авторегрессии первого порядка.

В данной монографии описывается множество других различных авторегрессий с комплексными переменными. Часть из таких авторегрессий представляют собой комплекснозначные модели, другая часть – действительные модели комплексного аргумента, третья часть представляет собой либо действительную, либо мнимую части комплекснозначной авторегрессии. А для того, чтобы эти модели авторегрессий могли быть применены в экономической практике или в научных исследованиях на основе статистических данных, необходимо использовать математическую статистику. К сожалению, здесь современной математической статистике похвастать нечем. Раздел «Математическая статистика комплексной случайной величины» является на удивление слаборазвитым и не позволяет использовать его рекомендации на практике.

О трудностях этого процесса и вариантах преодоления этих трудностей рассказывается в первой главе монографии. Здесь же приводится ряд новых научных результатов, полученных автором для возможности статистического наполнения комплекснозначных экономических моделей.

После того как инструменты статистической обработки комплексной случайной переменной изучены и развиты, можно перейти к решению

основной задачи – формированию различных типов комплекснозначных авторегрессий, исследованию их свойств на условных примерах и к построению этих моделей на реальных данных. При этом появляется возможность сравнения точности моделирования и краткосрочного прогнозирования различных процессов с помощью комплекснозначных моделей авторегрессий и с помощью авторегрессий действительных переменных. Как показано во второй главе монографии, в одних случаях лучшими оказываются комплекснозначные модели, в других – авторегрессии действительных переменных.

Тщательно изучить и показать свойства новых типов комплекснозначных авторегрессий в одной монографии невозможно – уж очень большое разнообразие типов авторегрессий получается при этом. Для подобной работы нужен многочисленный коллектив единомышленников, для успешной деятельности которого необходимо привлечь значительно более крупные средства, чем те, которые имеются в нашем распоряжении. Поэтому в монографии показываются только основные свойства новых авторегрессий каждого типа и особенности их применения на практике.

Тем не менее благодаря финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19–010–00610\19 «Теория, методы и методики прогнозирования экономического развития авторегрессионными моделями комплексных переменных») стало возможным выполнить это исследование в общих чертах, сформировав новое научное направление в краткосрочном прогнозировании экономики – комплекснозначные авторегрессии.

Автор благодарен молодым учёным Санкт–Петербургского политехнического университета Петра Великого, которые с энтузиазмом участвовали в этом исследовании, терпеливо проверяя умные и безумные гипотезы автора, помогая в формировании этого нового научного направления. Я с удовольствием называю их имена: Евгений Гольцев, Николай Питухин, Виктория Мацкевич, Юлия Селиванова, Галина Сирук и Назира Шайхлева.

Сама идея исследования комплекснозначных авторегрессий принадлежит Ивану Сергеевичу Светунькову, который настоятельно рекомендовал

мне обратить внимание на это новое направление стохастического моделирования и краткосрочного прогнозирования. Ему я выражаю особую признательность и за эту идею, и за дельные советы, которые я получал от него в ходе данного научного исследования.

Часть первая. Статистика комплексной случайной переменной

Вполне естественное желание сразу же начать изложение в книге комплекснозначных авторегрессионных моделей и их свойств оказывается неосуществимым. И этому есть две веские причины.

Первая причина вызвана тем, что существенная часть экономистов имеет смутное представление о комплексных переменных и методах работы с ними. Вторая причина вызвана более серьёзным обстоятельством – в математической статистике раздел, посвящённый комплексной случайной величине столь незначителен, что не позволяет строить эконометрические модели комплексных переменных, и уж тем более не позволяет строить комплекснозначные авторегрессии.

Поэтому в первой части монографии излагаются материалы из теории функций комплексного переменного, которые позволят экономисту понять, что такое комплексные числа и как с ними работать. А далее приводятся необходимые материалы, позволяющие довести до логичного завершения математическую статистику комплексной случайной переменной.

1.1. Основные понятия теории функций комплексного переменного, применимые в экономике

Мало кто из экономистов знаком со свойствами комплексных переменных и основными правилами действий с ними. Это объясняется тем, что в экономико-математическом моделировании комплексные переменные до последнего времени не использовались как самостоятельные переменные, хотя действия с ними позволяют формировать оригинальные экономико-математические модели.

Для того чтобы экономисту, не знакомому с теорией функции комплексного переменного (ТФКП), можно было разобраться во всех последующих построениях данной монографии, в данном параграфе излагаются основные понятия ТФКП.

Тем читателям, кто знаком с теорией функций комплексного переменного, этот параграф можно будет пропустить.

А началась эта теория в 1572 году в маленьком итальянском городке Кура. Именно в этом городе и именно в этот год была опубликована рукопись скончавшегося в этом же году итальянского математика Рафаэля Бомбелли. Книга называлась «Алгебра». В ней, в частности, Рафаэль Бомбелли показал, как можно решить кубическое уравнение

$$x^3 = 15x + 4. \quad (1.1.1)$$

Корень кубических уравнений в то время находили с помощью формулы Сципиона дель Ферра. Применительно к поставленной задаче, нахождение корня должно было быть осуществлено так:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \quad (1.1.2)$$

Как видно, в этой формуле используются квадратные корни, а из правой части этого равенства следует, что для вычисления корней уравнения (2.1.1) надо извлечь квадратный корень из числа (-121). Это означает, что найти решение этого уравнения не удастся. Это вовсе не означает, что уравнение (2.1.1) не имеет решения. Если изобразить задачу на плоскости, то можно легко убедиться в том, что решение есть. Но найти его арифметически с помощью формулы Сципиона дель Ферра не получается, и именно потому, что в подкоренном выражении в правой части (2.1.2) находится отрицательное число, а квадратный корень из отрицательного числа, как известно любому из школьной программы, не существует.

Математики того времени бились над решением этой задачи, но ничего придумать не могли. А Рафаэль Бомбелли предложил не обращать внимания на знак минус в подкоренном выражении [11, с.12]). Ведь число (-121) можно представить как произведение двух чисел: (-1 · 121). Тогда квадратный корень из этого числа может быть записан как $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$.

То есть, формула (2.1.2) примет вид

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}. \quad (1.1.3)$$

Теперь можно решить задачу. Корень кубического уравнения $x=4$.

Долгое время подход Бомбелли учёные рассматривали как удобный математический фокус. И квадратный корень из минус единицы как только не называли: «волшебная единица», «исчезающая единица» и т.п. В конце

концов относительно неё устоялось такое название: «мнимая единица». А числа, которые помимо вещественной имеют ещё и мнимую составляющую, стали называть «сложными» числами, то есть – комплексными.

Комплексное число, как видно, представляет собой числовую пару, состоящую из двух частей, – вещественной и мнимой:

$$Z = x + iy, \quad (1.1.4)$$

где x – вещественная часть комплексного числа; iy – мнимая часть комплексного числа; x и y – вещественные (действительные) числа; i – мнимая единица, которая удовлетворяет равенству:

$$i = \sqrt{-1}. \quad (1.1.5)$$

С комплексными числами можно выполнять практически все те же действия, что и с вещественными числами. Но, с учётом специфики свойств мнимой единицы, эти действия имеют оригинальный характер, часто не присущий операциям в области действительных чисел.

Основная проблема, с которой сталкивается экономист при представлении некоторого экономического показателя в виде комплексного числа, это – сложность экономической интерпретации мнимой части. Главный вопрос при этом можно сформулировать примерно так: а где в реальной экономической жизни встречаются мнимые числа вообще и мнимая единица в частности? И какой смысл имеет мнимая единица?

Никакого смысла мнимая единица не имеет – ни экономического, ни физического. Мнимая единица – это математическое правило, только и всего. Где в реальной экономической жизни экономист встречается, например, с десятичным логарифмом? Нигде! Нет в окружающем нас мире ни десятичного логарифма, ни каких-нибудь других логарифмов. Десятичный (или иной) логарифм – это математическое правило, с помощью которого оказалось очень удобно решать прикладные задачи, в том числе и в экономике. Точно так же и с помощью мнимой единицы, которую, как уже сказано, можно рассматривать как математическое правило, оказалось очень удобно решать целый класс прикладных задач в разных областях человеческой деятельности.

С помощью правил, заданных условиями (2.1.4) и (1.5), появляется возможность использовать новые математические действия, получать новые

математические результаты и формировать новые математические модели. Сразу же следует указать, что ни в одной из областей естественно-научного знания нет процессов, в которых появляются мнимые числа или мнимая единица. Мнимые и комплексные числа – это математическая модель, которая может описывать некоторые реально существующие явления, а может их и не описывать. Если учёные решаются использовать комплексные переменные для моделирования реальных процессов, то они заранее устанавливают правила, в соответствии с которыми всегда одну составляющую сложного процесса относят к действительной части, а другую составляющую – к мнимой части комплексной переменной.

Точно так же и в экономике нет явлений, которые по их сути следовало бы отнести к действительной или мнимой частям комплексной переменной, как нет и явлений, в которых явно выделяются действительная и мнимая части. Мы, как и учёные в других областях науки, будем задавать правила, в соответствии с которыми появляется возможность представления экономических явлений в форме комплексных чисел и комплексных переменных. И в том случае, когда такое представление сложного экономического объекта позволит более точно описать его свойства, будем использовать вместо моделей действительных переменных модели комплексной переменной или модели нескольких комплексных переменных.

Как известно, действительное число представляет собой некоторый отрезок на числовой оси, имеющий нулевую точку и устремляющуюся в плюс бесконечность или минус бесконечность. Это действительное число характеризуется расстоянием отрезка от нулевой точки до числа. Если число находится на числовой оси левее нулевой точки, то оно будет отрицательным, а если оно находится на числовой оси правее нулевой точки, то оно будет положительным.

Поскольку в отличие от действительной переменной комплексная переменная состоит из двух частей, то именно эти две части определяют комплексную плоскость. Комплексное число представляет собой точку на комплексной плоскости (рис. 1.1). Для того чтобы однозначно определить данную точку на комплексной плоскости, необходимо использовать две

координаты – отрезок на оси вещественной части и отрезок на оси мнимой части.

На графике рис. 1.1 нанесены эти две оси, которые по определению являются ортогональными. Сразу же оговоримся, что перед нами плоскость декартовой системы координат, на осях которой откладываются вещественные числа x и y . Просто по горизонтальной оси будет откладываться действительная часть комплексной переменной, а по вертикальной – её мнимая часть.

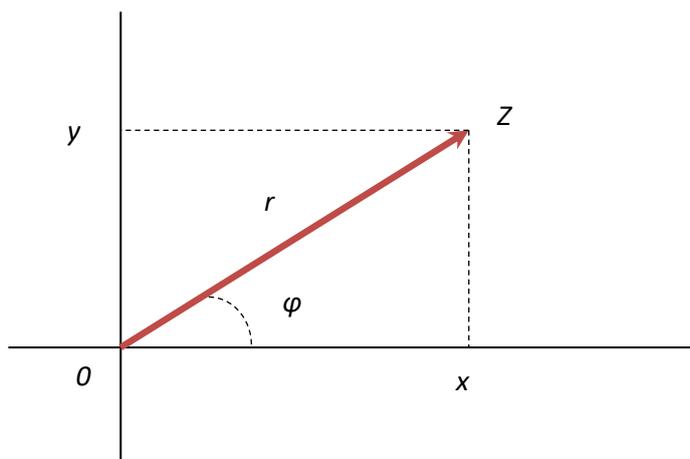


Рис. 1.1. Комплексное число на комплексной плоскости

Любая точка, лежащая на комплексной плоскости, определяемой указанными осями, представляет собой комплексное число, даже если эта точка лежит на оси вещественных чисел. Она в таком случае будет являться комплексным числом с нулевой мнимой частью. Поэтому математики заранее специально оговаривают – в каком поле они работают: действительных или мнимых чисел.

Комплексное число (1.1.4) можно на плоскости декартовой системы координат рассматривать как вектор, который выходит из начала координат и заканчивается в точке (x, y) . Тогда любое комплексное число можно представить в полярных координатах с помощью модуля вектора и его полярного угла:

$$z_1 = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) . \tag{1.1.6}$$

Здесь φ – полярный угол, r – полярный радиус (длина вектора), который получил название модуля комплексного числа. Модуль комплексного числа равен:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} . \quad (1.1.7)$$

Полярный угол может быть также легко найден:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi k , \quad (1.1.8)$$

где k - целое число. Иногда полярный угол называют аргументом комплексного числа. В большинстве случаев принимают условие $k = 0$.

То, что комплексные числа могут рассматриваться и в декартовых координатах, и в полярных координатах, является их существенным преимуществом по сравнению с другими числами.

Два комплексных числа равны друг другу тогда и только тогда, когда равны друг другу их действительные и мнимые части.

А это значит, что, например, такое равенство:

$$y_r + iy_i = F(x_r + ix_i) = f_r(x_r) + if_i(x_i) , \quad (1.1.9)$$

следует рассматривать как более компактную форму записи системы двух уравнений действительных переменных:

$$\begin{cases} y_r = f_r(x_r), \\ y_i = f_i(x_i). \end{cases} \quad (1.1.10)$$

Зачастую это является важным преимуществом – компактность записи сложных систем уравнений действительных переменных.

А из этого следует и другой вывод: любая функция комплексного переменного может быть представлена как система двух функций – отдельно для вещественной части, отдельно для мнимой части. Для удобства действительную часть комплекснозначной функции обозначают как $\operatorname{Re}f(z)$, а мнимую часть – как $\operatorname{Im}f(z)$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа (1.1.6) особенно удобна для умножения комплексных чисел друг на друга. Пусть, например, помимо комплексного числа (1.6) имеется другое комплексное число:

$$z_2 = \rho(\cos \psi + i \sin \psi) . \quad (1.1.11)$$

Вычислим произведение одного комплексного числа z_1 на другое комплексное число z_2 , используя для этого их тригонометрическую форму. Опуская элементарный вывод, приведём итоговый результат:

$$z_1 z_2 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \rho(\cos \psi + i \sin \psi) = r \rho(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) . \quad (1.1.12)$$

Эта формула известна как формула Муавра. Формула Муавра существенно облегчает такие операции с комплексными числами, как возведение в степень или извлечение корня из комплексного числа. Действительно для того, чтобы найти, например, квадрат комплексного числа, необходимо возвести в квадрат его модуль, а полярный угол умножить на два. А для того, чтобы возвести в степень $1/4$, следует модуль возвести в степень $1/4$, а полярный угол умножить на $1/4$.

В 1748 году Л. Эйлер в своей книге «Введение в анализ бесконечно малых» обосновал формулу, носящую сегодня его имя, а именно [16, с. 118 – 119]:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi . \quad (1.1.13)$$

С помощью формулы Эйлера любое комплексное число Z с модулем r и аргументом φ можно записать в следующей показательной (экспоненциальной) форме:

$$z = r e^{i\varphi} . \quad (1.1.14)$$

Эта форма записи оказывается ещё более удобной для выполнения математических операций с комплексными числами. Действительно, воспользовавшись (1.1.14), вновь перемножим комплексное число z_1 на другое комплексное число z_2 :

$$z_1 z_2 = r \rho e^{i(\varphi + \psi)} . \quad (1.1.15)$$

Модуль комплексного числа может быть представлен в экспоненциальной форме:

$$r = e^{\ln r} . \quad (1.1.16)$$

Это даёт возможность представить комплексное число (1.1.4) в таком виде:

$$z = e^{\ln r + i\varphi} . \quad (1.1.17)$$

А такая форма записи позволяет вычислять логарифмы комплексного числа. Действительно, с учётом того, что аргумент комплексного числа (1.1.8) определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π , логарифм комплексного числа z можно вычислить так:

$$\ln z = \ln(e^{\ln r + i\varphi}) = \ln r + i\varphi + 2\pi k \quad (1.1.18)$$

То есть, логарифм комплексного числа – функция периодическая. Обычно на практике используют главное значение логарифма, принимая $k=0$.

Используя экспоненциальную форму записи комплексного числа, можно выполнять с комплексными числами и более сложные действия, например можно возвести комплексное число в действительную степень a :

$$z^a = (re^{i\varphi})^a = r^a e^{ia\varphi} \quad (1.1.19)$$

Более того, можно с комплексными числами выполнять и такое нетривиальное действие, как возведение их в мнимую степень ib :

$$z^{ib} = (re^{i\varphi})^{ib} = r^{ib} e^{(i\varphi)(ib)} = e^{-b\varphi} e^{ib \ln r} = Re^{i\vartheta} \quad (1.1.20)$$

где $R = e^{-b\varphi}$; $\vartheta = b \ln r$.

Очевидно, что теперь возможно и возведение комплексного числа в комплексную степень:

$$z^{a+ib} = (re^{i\varphi})^{a+ib} = (r^a e^{-b\varphi})(e^{ia\varphi} e^{ib \ln r}) = (e^{a \ln r - b\varphi}) e^{i(a\varphi + b \ln r)} \quad (1.1.21)$$

Комплексное число в комплексной степени, как легко заметить, это тоже комплексное число, модуль которого равен

$$R = e^{a \ln r - b\varphi} \quad (1.1.22)$$

а аргумент равен

$$\vartheta = a\varphi + b \ln r \quad (1.1.23)$$

Не стоит особо долго разъяснять, что в области действительных чисел аналогичные действия будут чрезвычайно сложны. То есть мы убеждаемся, что с помощью математических действий с комплексными переменными нам удаётся довольно просто получить результаты, которые в области действительных переменных получить очень сложно. Именно это и предопределило такую популярность комплексных переменных в естественных и инженерных науках.

Функцию комплексного переменного

$$w = f(z) \tag{1.1.24}$$

довольно часто называют комплекснозначной. И мы далее будем использовать это слово для упоминания о том, что имеем дело с функцией комплексного переменного.

Саму функцию (1.1.24) определяют так: это некоторый закон, по которому каждой точке z из множества допустимых значений ставится в соответствие определённая точка или совокупность точек w . Здесь не случайно оговаривается, что одной точке z может соответствовать по правилу (1.1.24) не одна точка, а несколько. Комплекснозначные функции могут быть самыми различными.

Например, комплекснозначной функции

$$y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_r)$$

каждой точке $(x_r + ix_i)$ ставится в соответствие одна и только одна точка $(y_r + iy_i)$. Подобные функции называются однозначными (или однолиственными).

А вот комплекснозначная функция

$$y_r + iy_i = (x_r + ix_r)^2 \tag{1.1.25}$$

будет многозначной (многолистной).

Действительно, двум разным комплексным числам $(0 + i)$ и $(0 - i)$ по закону (1.1.25) соответствует одно и то же число $(-1 + i0)$.

Поэтому, работая с комплекснозначными функциями, необходимо всегда понимать, что они могут быть многолиственными.

Чаще всего в экономике несколько показателей (более двух) зависят от нескольких факторов (более двух). По сути – это векторные регрессии. Но очень хотелось бы промоделировать эту зависимость с помощью комплексных переменных, то есть связать некоторым математическим уравнением совокупность экономических показателей с совокупностью факторов, оказывающих воздействие на них – использовать гиперкомплексные числа. Но попытка ввести систему чисел, содержащую три мнимых единицы, не дала положительных результатов. Удалось построение системы чисел с

четырьмя мнимыми единицами. В этом случае получается так называемая система кватернионов, то есть чисел вида:

$$A = a + ib + jc + kd, \quad (1.1.26)$$

где a, b, c, d – вещественные числа, i, j, k – мнимые единицы.

Действия с кватернионами имеют сложный характер, который не позволяет их активно использовать в каких–либо практических целях. Кватернионы до сих пор остаются областью идеализированных исследований, хотя появились научные работы прикладного характера, в том числе и в области экономики. Почему работать с кватернионами сложно? Потому, например, что в поле кватернионов не выполняется свойство коммутативности умножения. Это приводит к курьёзам. Так, для уравнения

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1.1.27)$$

имеется бесконечное множество корней:

$$X = ip + jq + kr, \text{ где } p^2 + q^2 + r^2 = 1. \quad (1.1.28)$$

Поэтому вполне очевидное желание описать зависимость некоторого комплексного показателя, представленного в виде кватерниона (1.1.26), от другого экономического показателя, представленного в виде другого кватерниона, пока что в полной мере не осуществимо.

1.2. Комплекснозначная экономика

Любое комплексное число можно рассматривать как двумерный вектор. А из (1.1.10) следует, что любая комплекснозначная функция может быть рассмотрена как функция двумерного вектора. Тогда понятно, что комплексные переменные могут использоваться там, где два экономических показателя отражают разные свойства одного явления или где поведение какого–то объекта определяется двумя факторами.

То есть там, где наблюдается зависимость одного двумерного вектора экономических показателей от другого двумерного вектора экономических показателей (или нескольких двумерных показателей), то проще всего такую зависимость описать с помощью моделей и методов теории функций комплексной переменной.

Где в экономике встречаются такие зависимости? Да практически на каждом шагу, ведь очень многие экономические показатели представляют собой агрегированные величины, которые состоят из нескольких, и чаще всего двух основных величин.

Например, валовой выпуск Q складывается из валовых издержек C и валовой прибыли G , что даёт возможность представить результаты в виде комплексной переменной $(C + iG)$.

Капитал, который используется в производстве, также является агрегированной величиной – он может быть производственным K_0 и непроизводственным K_1 . Поэтому его также можно представить как комплексную переменную $(K_0 + iK_1)$.

Труд используемых в производстве также является обобщённой величиной. И учесть разное влияние различных видов труда на результаты производства также можно с помощью комплексной переменной $(L_0 + iL_1)$. Здесь L_0 – труд производственного персонала, а L_1 – труд непромышленного персонала.

На биржах аналитики следят за динамикой продаж акций разных компаний. При этом они используют агрегированную величину объёма сделок по акциям:

$$Q_t = p_t q_t \quad (1.2.1)$$

Дополнительную информацию они получают, если будут использовать комплексную переменную $(p_t + iq_t)$, предварительно приведя цену за единицу акций p_t и объём продаж акций q_t по этой цене к единому масштабу и размерности. Такая возможность продемонстрирована в монографии [42].

Для экономики в целом на мезо- или макроуровне объём производства может быть разделён на товары P и услуги S – и вновь можно для моделирования использовать комплексную переменную $(P + iS)$.

В ритейле это могут быть товары длительного пользования Lo и краткосрочного пользования Sh , и вновь объёмы продаж могут быть описаны с помощью комплексной переменной $(Lo + iSh)$.

Подобные примеры можно продолжать и далее, но в любом случае уже понятно, что область применения комплексных переменных в экономике обширна.

При этом чаще всего не имеет никакого значения – какую переменную отнести к действительной части комплексной переменной, а какую – к мнимой, ведь при формировании вектора такая проблема не стоит.

Но есть при моделировании экономики ситуации, когда порядок следования переменных при их формировании в комплексное число обретает определённый смысл. Так может быть, например, при моделировании зависимости результатов производства от производственных ресурсов, то есть, при построении производственных функций.

В области действительных переменных производственные функции чаще всего принимают вид степенных моделей типа

$$Q = aK^\alpha L^\beta \quad (1.2.2)$$

И их отличие друг от друга заключается в способе задания ограничений на пределы изменения показателей степени α и β .

Комплекснозначные аналоги этой функции могут быть самыми разнообразными, но универсальной является форма комплекснозначной производственной функции с действительными коэффициентами [9]:

$$C + iG = a(L + iK)^\alpha \quad (1.2.3)$$

Здесь C – валовые издержки производства, G – валовая прибыль, L – затраты труда, K – капитал.

Эта функция может быть представлена как система двух действительных уравнений:

$$\begin{cases} C = \operatorname{Re}[a(L + iK)^\alpha] \\ G = \operatorname{Im}[a(L + iK)^\alpha] \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C = a(\sqrt{L^2 + K^2})^\alpha \cos(\alpha(\operatorname{arctg} \frac{K}{L})) \\ G = a(\sqrt{L^2 + K^2})^\alpha \sin(\alpha(\operatorname{arctg} \frac{K}{L})) \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Очевидно, что в области действительных чисел производственные функции такого вида не встречаются.

Из (1.2.4) можно заметить, что именно такой порядок отнесения действительных чисел к вещественной или к мнимой частям комплексных переменных оказывается важным.

Прежде всего отметим, что действительная и мнимая части комплексного производственного результата модели (1.2.3) по-разному реагируют на увеличение каждого из ресурсов. Так, с ростом затрат капитала K при постоянстве затрат трудовых ресурсов L косинус угла ресурсов уменьшается, а синус этого угла увеличивается. Тогда из первого уравнения системы (1.2.4) следует, что с ростом капитала валовые издержки производства уменьшаются, а из второго уравнения системы (1.2.4) следует, что валовая прибыль увеличивается. А именно так и происходит в реальной экономике. То есть комплекснозначная модель (1.2.3) точнее описывает детали производственного процесса, нежели вещественная модель (1.2.2).

Но здесь мы имеем ещё несколько важных с экономических позиций свойств производственной функции. Если представить комплексный производственный результат в экспоненциальной форме записи, то мы получим:

$$C + iG = \sqrt{C^2 + G^2} e^{i \arctg \frac{G}{C}}. \quad (1.2.5)$$

Что характеризует полярный угол комплексного производственного результата? Он характеризует рентабельность производства (отношение валовой прибыли к валовым издержкам). То есть именно такой порядок отнесения валовой прибыли к мнимой части, а валовых издержек к вещественной части имеет экономический смысл. А поскольку полярный угол комплексных производственных ресурсов характеризует капиталовооружённость труда (отношение капитала к труду), то комплекснозначная производственная функция (1.2.3) моделирует влияние капиталовооружённости труда на рентабельность производства. Это свидетельствует в пользу того, что модель (1.2.3) имеет яркий экономический смысл.

Но и это ещё не всё! Поскольку очевиден экономический смысл такого равенства:

$$Q = C + G, \quad (1.2.6)$$

то получается, что комплекснозначная модель (1.2.3) описывает не только влияние ресурсов на валовые издержки C и на валовую прибыль G , но и на валовой выпуск Q .

Так что в некоторых случаях вопрос о том, к какой части отнести тот или иной экономический показатель – к действительной или к мнимой части комплексного числа, является важным.

Для того чтобы использовать аппарат теории функций комплексных переменных в экономике при объединении двух экономических показателей в одну комплексную переменную, должны выполняться следующие условия, определяемые особенностями комплексных чисел:

1. Эти показатели должны быть двумя характеристиками одного и того же процесса или явления, то есть – отражать разные стороны этого явления;
2. Они должны ещё иметь одинаковую размерность. К тому же у них должен быть одинаковый масштаб.

Первое условие следует из таких соображений.

В итоге формирования комплексной переменной из двух действительных переменных, комплексная переменная в дальнейшем рассматривается как самостоятельная единая переменная. Она, образно выражаясь, несёт в себе информацию о двух составляющих её величинах и отражает влияние каждой из этих составляющих на некоторый результат. Эти величины должны отражать разные стороны одного и того же явления, иначе их объединение в одну переменную теряет всякий смысл. Они могут находиться в тесной функциональной зависимости друг с другом, а могут иметь сложную непрямую взаимосвязь, но главное условие – они должны нести в себе информацию о некотором общем для них процессе. Это объясняется тем, что такие характеристики комплексного числа, как его модуль и аргумент, имеют смысл только тогда, когда составляющие комплексного числа отражают общее содержание.

Второе условие, требующее одинаковой размерности составляющих комплексной переменной, определяется особенностью свойств комплексного числа. Действительно, как можно рассчитать модуль комплексного числа, если действительная и мнимая части имеют разные размерности, например рубли и штуки? Возвести в квадрат каждую из них и сложить не

представляется никакой возможности – руб^2 нельзя сложить со шт^2 . Точно так же и при вычислении полярного угла необходимо найти отношение мнимой части к действительной части, а потом найти арктангенс полученного числа. Если действительная и мнимая части разноразмерные, то ничего поделаться нельзя, ведь тангенс угла – величина безразмерная, она не может измеряться в $\text{руб}/\text{шт}$.

В экономике существенная часть показателей может быть приведена к денежным единицам измерения, например затраты труда можно определить не в человеко-часах, а в стоимости оплаты труда – величиной фонда оплаты труда на предприятии или подразделении предприятия. Поэтому условие одинаковой размерности и масштаба в большей части реальных экономических задач вполне выполнимо. Но в том случае, когда это сделать невозможно, каждый из показателей следует привести к относительным безразмерным величинам способом, который окажется наилучшим для выбранной формы модели.

В дальнейшем мы будем полагать, что все эти условия выполнены и мы можем работать с экономическими случайными комплексными переменными.

1.3. Случайная величина на комплексной плоскости

Если в распоряжении исследователя есть несколько наблюдений за комплексной переменной экономических показателей, то их можно рассматривать как случайные переменные, поскольку в экономике всегда действует множество случайных факторов.

Комплексной случайной величиной Y является величина

$$Y = y_r + iy_i, \tag{1.3.1}$$

в которой y_r и y_i – действительные случайные переменные, а i – мнимая единица.

Эта комплексная случайная величина в стационарном процессе представляет собой точку на комплексной плоскости, а множество наблюдений за ней, которое подвержено воздействию случайных факторов, на

комплексной плоскости будет представлять собой некоторое облако рассеивания.

Все случайные процессы, которые изучают экономисты, имеют разнообразные особенности, которые чаще всего могут быть сведены к некоторым типичным ситуациям. Эти типичные ситуации хорошо описаны в математической статистике и получили название «закон распределения вероятностей». Для того чтобы понять, к какому закону распределения вероятностей относится тот или иной процесс, необходимо вычислить его основные характеристики и по ним сделать соответствующий вывод.

Основной характеристикой любой случайной величины, в том числе и комплексной случайной величины, является её математическое ожидание.

Математическим ожиданием комплексной случайной величины (1.3.1) называется комплексное число

$$m_y = m_r + im_i, \quad (1.3.2)$$

где m_r – математическое ожидание действительной части, а m_i – математическое ожидание мнимой части комплексной случайной величины.

Поскольку комплексные случайные числа представляют собой точки на комплексной плоскости, то математическое ожидание комплексной случайной величины тоже представляет собой точку на комплексной плоскости, вокруг которой рассеяны случайные комплексные переменные. Причём для нормального распределения очевидно такое правило – вероятность того, что случайная комплексная переменная окажется ближе к своему математическому ожиданию, больше, чем вероятность того, что она окажется дальше от него.

То, как располагаются точки на комплексной плоскости, обусловлено наличием или отсутствием взаимосвязи между действительной и мнимой частями комплексной случайной величины. Рассмотрим поэтому два возможных случая:

- 1) когда обе части комплексной случайной величины не зависят друг от друга;
- 2) когда действительная и мнимая часть комплексной случайной переменной взаимосвязаны.

Первый случай. Действительная и мнимая части комплексной случайной переменной независимы друг от друга. В современной математической статистике это положение является основным и рассматривается как аксиоматическое [33, 34]. Вполне возможно, что в тех разделах современной науки, где используют статистику комплексной случайной величины, так оно и есть. Как показывает обзор опубликованных работ в этом направлении, в основном комплексную случайную переменную используют в теории сигналов [25, 29, 31, 36, 37, 39, 40, 46, 47] и там независимость двух сигналов друг от друга – вполне естественное явление. А раз современные учёные в основном рассматривают именно этот случай, мы не можем игнорировать его, хотя ранее было показано, что для экономики такие случаи бессмысленны.

Поскольку действительная и мнимая части такой комплексной переменной не зависят друг от друга, то не зависят друг от друга и все статистические характеристики комплексной случайной величины.

Тогда дисперсия действительной части комплексной случайной переменной будет равна

$$\sigma_r^2 = M \left| (y_r - m_{y_r})^2 \right|, \quad (1.3.3)$$

а дисперсия её мнимой части равна

$$\sigma_i^2 = M \left| (y_i - m_{y_i})^2 \right|. \quad (1.3.4)$$

Общая дисперсия комплексной случайной величины с независимыми действительной и мнимой частями будет равна сумме дисперсий её действительной и мнимой частей:

$$\sigma_y^2 = \sigma_r^2 + \sigma_i^2. \quad (1.3.5)$$

Следует отметить, что дисперсия является важной характеристикой, позволяющей описать плотность распределения вероятностей. Мы будем рассматривать исключительно нормальное распределение вероятностей, поскольку с ним приходится иметь дело на практике чаще всего.

Формула Гаусса для действительной части комплексного числа будет иметь такой вид:

$$f(y_r) = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_r - m_{y_r})^2}{2\sigma_r^2}} \quad (1.3.6)$$

Точно так же мы можем записать и формулу плотности распределения вероятностей для мнимой части комплексного числа:

$$f(y_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - m_{y_i})^2}{2\sigma_i^2}} \quad (1.3.7)$$

Тогда в силу независимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной величины её плотность распределения будет равна произведению плотностей распределения действительной и мнимой частей:

$$f(Y) = f(y_r)f(y_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_i} e^{-\frac{(y_r - m_{y_r})^2 \sigma_i^2 + (y_i - m_{y_i})^2 \sigma_r^2}{2\sigma_r^2 \sigma_i^2}} \quad (1.3.8)$$

Вид этого распределения изображён на рис. 1.1, где осями горизонтальной плоскости являются действительная и мнимая части комплексной случайной величины (комплексная плоскость), а по горизонтали откладывается её плотность распределения.

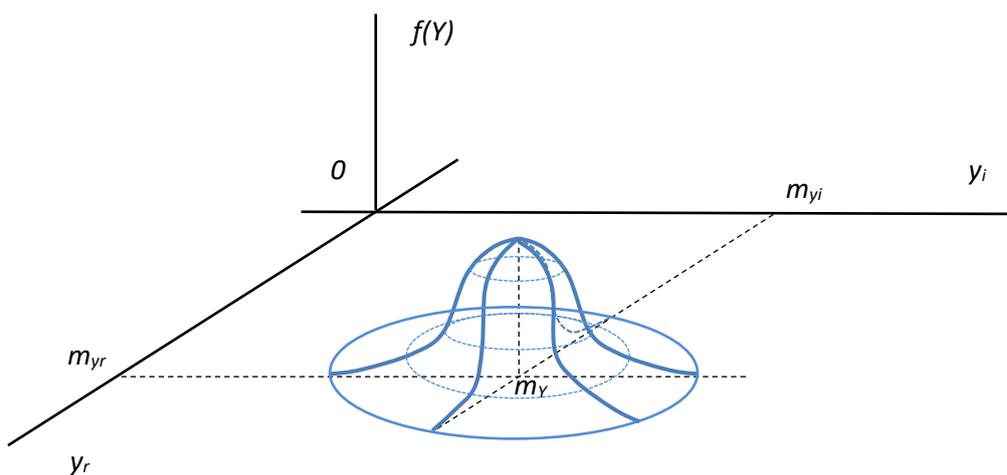


Рис. 1.1. Математическое ожидание комплексной случайной величины при независимых действительной и мнимой частях

Все точки на комплексной плоскости имеют разную вероятность появления – чем дальше от математического ожидания m_y , тем меньше вероятность их появления на комплексной плоскости.

Все точки, лежащие на прямой линии с координатой m_i , имеют разную вероятность появления, и максимальная вероятность появления случайной комплексной переменной приходится на точку математического ожидания m_y . Точно так же и все точки, лежащие на прямой линии с координатой m_r , имеют разную вероятность появления, но максимальная вероятность появления случайной комплексной переменной на этой линии так же приходится на точку математического ожидания m_y .

Из рисунка видно, что сечение поверхности рис. 1.1 плоскостями, параллельными комплексной плоскости, то есть плоскостями равной плотности вероятности, даёт различные эллипсы. В теории вероятностей эти эллипсы получили название «эллипсы рассеивания», уравнение которых в нашем случае определяется дисперсией каждой из частей и их математическим ожиданием:

$$\frac{(y_r - m_{y_r})^2}{\sigma_{y_r}^2} + \frac{(y_i - m_{y_i})^2}{\sigma_{y_i}^2} = const \quad (1.3.9)$$

Эллипсы легко могут быть спроецированы на комплексную плоскость (рис. 1.2).

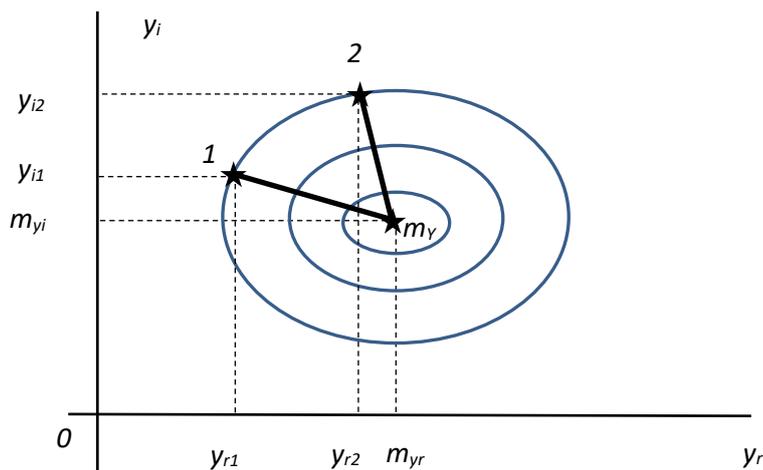


Рис. 1.2. Эллипсы рассеивания для ситуации независимости действительной и мнимой частей комплексной случайной величины

На этом рисунке нанесены две точки – 1 и 2, которые характеризуют два разных случайных комплексных числа $(y_{r1}; y_{i1})$ и $(y_{r2}; y_{i2})$. Если рассчитать расстояния от них до математического ожидания, то получим:

$$r_1 = \sqrt{(y_{r1} - m_{y_r})^2 + (y_{i1} - m_{y_i})^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(y_{r2} - m_{y_r})^2 + (y_{i2} - m_{y_i})^2} . \quad (1.3.10)$$

Известно, что для дискретного случая дисперсия случайной величины x может быть записана так:

$$\sigma_x^2 = \sum_j p_j (x_j - m_x)^2 . \quad (1.3.11)$$

Для комплексной случайной величины (1.3.1) форма записи дисперсии будет такой:

$$\sigma_Y^2 = \sum_j p_j [(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2] . \quad (1.3.12)$$

Как со всей очевидностью следует из (1.3.12), дисперсия комплексной случайной величины с независимыми друг от друга действительной и мнимой частями будет представлять собой сумму квадратов расстояний от лежащих на комплексной плоскости случайных величин до их математического ожидания, помноженных на вероятности появления этих случайных величин.

Если независимые дисперсии действительной и мнимой частей равны друг другу, то эллипсы рис. 2 превращаются в окружности рассеивания.

Второй случай. Действительная и мнимая части комплексной случайной переменной зависимы друг от друга.

Казалось бы, в математической статистике вполне логично было изучить все возможные варианты свойств комплексной случайной величины. И если есть вариант независимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной величины, то должен быть и второй вариант – вариант зависимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной величины. Тогда все варианты будут рассмотрены и учёные получат полное знание о предмете исследования.

Но как раз-таки вариант зависимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной переменной учёные в полном объёме и не рассмотрели. Ко всем таким случаям и статистическим

характеристикам они, с лёгкой руки Н. Harter и М. Lum [22], добавляют приставку «псевдо». И этому есть исторические причины.

Интерес к статистической обработке наблюдений за изменением комплексной переменной возник в 50 – 60-х годах XX века. Впервые эту задачу сформулировал R. Wooding, предложивший подход по представлению комплексной случайной величины с позиций нормального распределения [50]. Этот подход развили в своих работах R. Arens (1957) [10] и I. Reed (1962) [38]. Априорно в этих публикациях предполагалась независимость друг от друга нормально распределённых вещественной и мнимой частей комплексной случайной переменной, но явно об этом не говорилось. В 1963 году N. Goodman сформулировал это предположение в явном виде [20]. Базируясь на нём, учёные в дальнейшем сформулировали основные понятия и характеристики случайной нормально распределённой комплексной переменной: математическое ожидание, моменты (в том числе и корреляционный момент), ковариацию, дисперсию и др. [17].

Современные исследователи, использующие в своих научных работах комплексные случайные величины, всегда используют вариант, когда её обе части независимы друг от друга [43, 44]. Появились, правда, и первые попытки осмыслить ситуацию, когда действительная и мнимая части зависят друг от друга, но учёные, рассматривающие этот вариант, тут же прибавляют «псевдо» – псевдо ковариация или псевдо дисперсия и т.п. [25, 37, 40, 46]. И дальше вычисления псевдо моментов, псевдо дисперсий и псевдо ковариаций они не идут.

Поэтому получилось так, что у нас нет готовых решений, предложенных математической статистикой для случайной комплексной переменной, у которой действительная и мнимая части зависят друг от друга. Нам придётся самостоятельно разобраться с этим вопросом, сверяясь с тем уровнем, который нам предлагает современная математическая статистика в этом вопросе.

Поскольку рассматриваются случайные величины, то взаимосвязь между ними будет корреляционной. Обозначим через r_{ri} коэффициент парной корреляции между действительной y_r и мнимой y_i частью комплексной случайной величины.

Плотность нормального распределения двух случайных взаимосвязанных величин, как известно из теории вероятностей и математической статистики, с учётом принятых нами обозначений, примет вид:

$$f(y_r; y_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}\sqrt{1-r_{y_r y_i}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{y_r y_i}^2)}\left(\frac{(y_r - m_{y_r})^2}{\sigma_{y_r}^2} - 2\frac{r_{y_r y_i}(y_r - m_{y_r})(y_i - m_{y_i})}{\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}} + \frac{(y_i - m_{y_i})^2}{\sigma_{y_i}^2}\right)} \quad (1.3.13)$$

Можно убедиться в том, что при равенстве нулю коэффициента парной корреляции $r_{y_r y_i}$ формула (1.3.13) превращается в формулу (1.3.8).

Эта формула используется в современной математической статистике для описания вероятностных характеристик нормально распределённых случайных комплексных величин [45, с. 40].

Плотность нормального распределения комплексной случайной величины с её взаимосвязанными частями имеет в трёхмерном пространстве примерно такой же вид, что изображён на рис. 1.1, но с небольшим отличием. Как видно из рис. 1.1, при независимости действительной и мнимой частей комплексной случайной величины трёхмерная модель плотности распределения симметрична относительно линий, проходящих через точку математического ожидания и параллельных осям комплексной плоскости.

А в случае зависимости этих друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной переменной модель становится несимметричной этим линиям. Она становится симметричной линиям, не параллельным осям комплексной плоскости (рис. 1.3). В этом случае и эллипсы рассеивания меняют своё положение.

Удобнее рассматривать не трёхмерную фигуру в пространстве, а эллипсы рассеивания. Они для случая имеющейся зависимости между действительной и мнимой частями будут иметь такой вид:

$$\frac{(y_r - m_{y_r})^2}{\sigma_{y_r}^2} - 2\frac{r_{y_r y_i}(y_r - m_{y_r})(y_i - m_{y_i})}{\sigma_{y_r}\sigma_{y_i}} + \frac{(y_i - m_{y_i})^2}{\sigma_{y_i}^2} = const \quad (1.3.14)$$

На рис. 1.4 показан один из подобных эллипсов рассеивания.

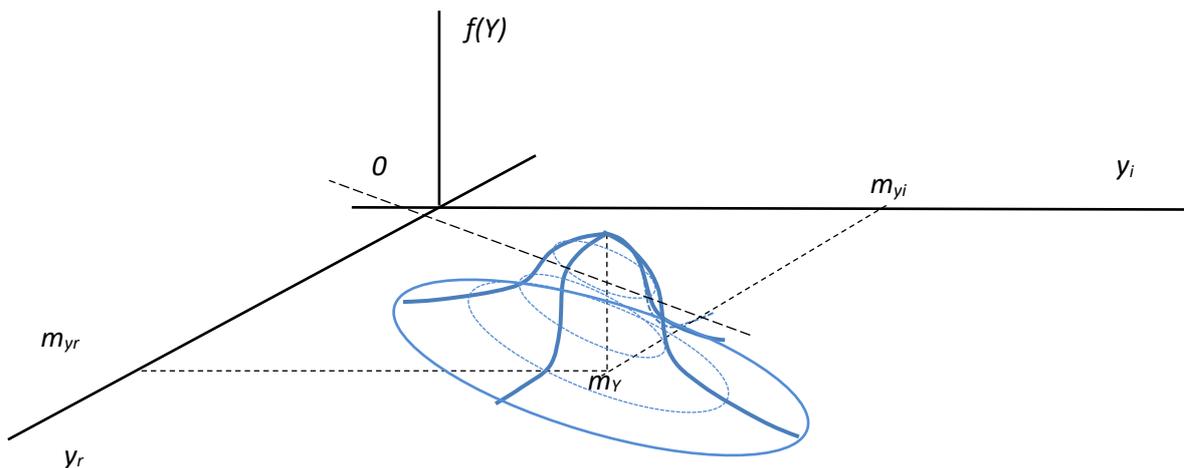


Рис. 1.3. Математическое ожидание и плотность распределения вероятностей при зависимых друг от друга частях комплексной случайной величины

И для него характерно то, что расстояния от точек, лежащих на эллипсе до математического ожидания m_Y равны

$$r_1 = \sqrt{(y_{r1} - m_{y_r})^2 + (y_{i1} - m_{y_i})^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(y_{r2} - m_{y_r})^2 + (y_{i2} - m_{y_i})^2} \quad (1.3.15)$$

И дисперсия соответственно равна:

$$\sigma_{Y_i}^2 = \sum_j p_j^{ri} [(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2] \quad (1.3.16)$$

Здесь – p_j^{ri} вероятность появления комплексной случайной величины, соответствующая (1.3.13).

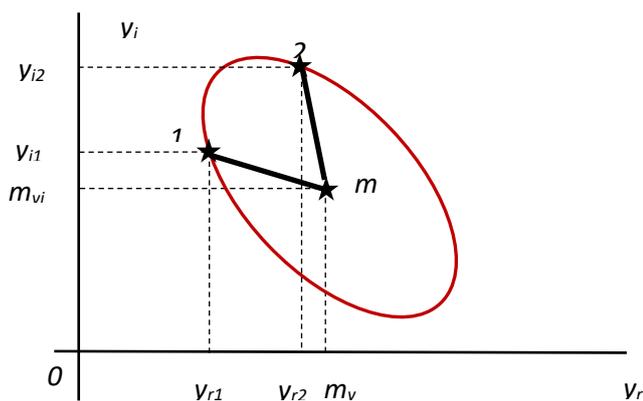


Рис. 1.4. Эллипс рассеивания на комплексной плоскости при взаимосвязи между действительной и мнимой частями комплексной случайной величины

Поскольку вероятности в случае а) независимости действительной и мнимой частей и в случае б) их зависимости друг от друга имеют разный характер и вычисляются по-разному, то это значит, что и дисперсия в последнем случае не может вычисляться как в случае независимости друг от друга частей комплексной случайной величины (1.3.12), то есть

$$\sigma_Y^2 = \sum_j p_j [(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2] \neq \sigma_{Y_{ri}}^2 = \sum_j p_j^{ri} [(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2] \quad (1.3.17)$$

Покажем это.

На рис. 5 на комплексную плоскость нанесены два эллипса рассеивания, соответствующие одной и той же величине плотности распределения вероятности. Вероятности появления точек на линиях этих эллипсов одинаковая. Но эллипс рассеивания синего цвета соответствует ситуации независимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной величины, а эллипс красного цвета соответствует второму варианту, когда действительная и мнимая части комплексной случайной величины зависят друг от друга.

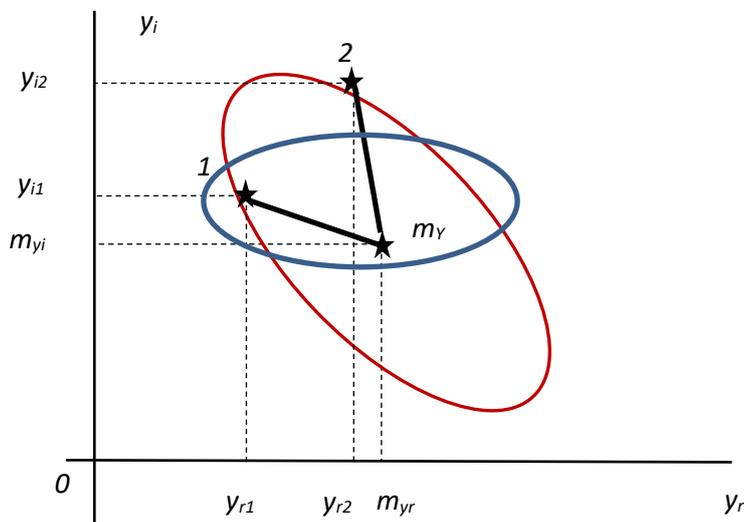


Рис. 1.5. Эллипсы рассеивания на комплексной плоскости при взаимосвязи между действительной и мнимой частями комплексной случайной величины (красного цвета) и в случае их независимости (синего цвета)

Точка 1 лежит и на линии эллипса рассеивания синего цвета, и на линии эллипса рассеивания красного цвета. Вероятность появления этой точки одинакова и в случае зависимости действительной и мнимой частей

друг от друга, и в случае независимости их друг от друга. А вот точка 2 лежит только на линии эллипса красного цвета и находится выше эллипса рассеивания синего цвета. Это означает, что вероятность p появления этой точки в случае независимости друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной величины меньше, чем вероятность p_{ri} появления этой точки в случае зависимости составляющих комплексной случайной величины друг от друга: $p < p_{ri}$.

Тогда

$$p[(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2] < p^{ri}[(y_{rj} - m_{y_r})^2 + (y_{ij} - m_{y_i})^2]. \quad (1.3.18)$$

Поскольку дисперсия комплексной случайной величины при взаимной зависимости действительной и мнимой частей не является простой суммой дисперсий действительной и мнимой частей, следует более подробно изучить её свойства.

1.4. Дисперсия комплексной случайной величины в представлении современной математической статистики

N. R. Goodman (1963) предложил рассматривать распределение комплексной случайной величины как агрегат двух независимых нормально распределённых случайных величин – действительной и мнимой частей [20]. Тогда из этого предположения вытекает очевидное следствие – все статистические характеристики комплексной случайной величины должны быть вещественными. Для получения таких вещественных характеристик комплексных случайных переменных комплексное число перемножают на сопряжённое с ним [11, 29, 33, 39, 46]. Если возникает задача построения регрессий комплексных переменных, то в этом случае для оценки коэффициентов регрессии минимизируют сумму квадратов действительной и мнимой частей [43, 44].

Базовым понятием этого подхода является представление дисперсии в такой форме:

$$D(z) = M[|z|^2] = M[|x_r + ix_i|^2] = M[(x_r + x_i)(x_r - x_i)] = M[x_r^2] + M[x_i^2], \quad (1.4.1)$$

$$\text{где } M[x_r^2] = M[(x_r - \bar{x}_r)^2] = D(x_r), \quad (1.4.2)$$

$$M[x_i^2] = M[(x_i - \bar{x}_i)^2] = D(x_i) . \quad (1.4.3)$$

Оно верно, если действительная и мнимая части комплексной переменной независимы друг от друга, поскольку известно, что дисперсия двух независимых величин равна сумме дисперсий этих величин, что и получается, если использовать запись (1.4.1).

В комплекснозначной экономике, где для решения сложных задач используются модели и методы теории функций комплексной переменной [42], мы встречаемся с другой ситуацией – когда действительная и мнимая части комплексной переменной отражают разные стороны одного и того же процесса. Например, производственные ресурсы могут быть представлены комплексной переменной – затратами привлечённого труда и капитала. Или же сам труд может представлять собой комплексную переменную, включающую в себя труд промышленно–производственного персонала и административно–управленческого персонала и т.п. Такие комплексные переменные допускают наличие случайной взаимосвязи между действительной и мнимой частями комплексной переменной, а потому представление (1.4.1) о характере дисперсии становится неудовлетворительным. Покажем это.

Важнейшей статистической характеристикой, используемой в анализе случайных величин, является коэффициент парной корреляции, который для действительных переменных можно найти с помощью коэффициентов регрессий y на x и x на y [35]:

$$r_{XY} = \pm \sqrt{(b_0 + ib_1)(d_0 + id_1)} . \quad (1.4.4)$$

Здесь $(b_0 + ib_1)$ и $(d_0 + id_1)$ – коэффициенты пропорциональности линейных регрессий:

$$y_{rt} + iy_{it} = F(x_{rt} + ix_{it}) = (a_0 + a_1) + (b_0 + ib_1)(x_{rt} + ix_{it}) , \quad (1.4.5)$$

$$x_{rt} + ix_{it} = f(y_{rt} + iy_{it}) = (c_0 + c_1) + (d_0 + id_1)(y_{rt} + iy_{it}) . \quad (1.4.6)$$

Коэффициент парной корреляции может быть найден и другим путём, через корреляционный момент и дисперсии:

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} . \quad (1.4.7)$$

При этом корреляционный момент вычисляют как вещественную величину, используя одну из переменных в сопряжённой форме, а дисперсию вычисляя в соответствии с (1.4.1) [31, 33]:

Естественно ожидать, что каждый из способов вычисления коэффициента парной корреляции (1.4.1) и (1.4.7) должен дать один и тот же результат.

Для получения формулы коэффициента парной корреляции комплексной случайной переменной первым способом (1.4.4), необходимо рассчитать коэффициенты пропорциональности $(b_0 + ib_1)$ и $(d_0 + id_1)$ с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Исходя из предположения о вещественном характере дисперсии комплексной переменной (1.4.1), легко получить критерий МНК [42]:

$$\Phi = \sum (y_r - \operatorname{Re}[F(x_r + ix_i)])^2 + \sum (y_i - \operatorname{Im} F(x_r + ix_i))^2 \rightarrow \min. \quad (1.4.8)$$

Для случая линейной регрессии (1.4.5), можно получить в итоге такую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)N + (b_0 + ib_1) \sum (x_r + ix_i), \\ \sum (y_r + iy_i)(x_r - ix_i) = (a_0 + ia_1) \sum (x_r - ix_i) + (b_0 + ib_1) \sum (x_r + ix_i)(x_r - ix_i). \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Если, как это и предлагалось К. Пирсоном, использовать центрированные относительно средних ряды случайных переменных, то система уравнений (1.4.10) упрощается и коэффициент регрессии будет равен

$$b_0 + ib_1 = \frac{\sum (y_r + iy_i)(x_r - ix_i)}{\sum (x_r + ix_i)(x_r - ix_i)}. \quad (1.4.11)$$

Точно также можно найти и коэффициент линейной регрессии (1.4.5):

$$d_0 + id_1 = \frac{\sum (y_r - iy_i)(x_r + ix_i)}{\sum (y_r + iy_i)(y_r - iy_i)}. \quad (1.4.12)$$

Здесь и далее будем считать, что дискретный ряд комплексной случайной величины является центрированным относительно её средней арифметической.

Подставляя формулы для расчёта выборочных значений коэффициентов регрессии (1.4.11) и (1.4.12) в исходную формулу для вычисления коэффициента парной корреляции (1.4.4), получим:

$$r_{XY} = \pm \sqrt{(b_0 + ib_1)(d_0 + id_1)} = \frac{\sum (x_r y_r + x_i y_i) + i \sum (x_i y_r - x_r y_i)}{\sqrt{\sum (y_r^2 + y_i^2) \sum (x_r^2 + x_i^2)}}. \quad (1.4.13)$$

Выборочное значение коэффициента парной корреляции двух случайных комплексных переменных оказалось комплексным.

Выведем теперь эту же формулу для вычисления выборочного значения коэффициента парной корреляции через корреляционный момент и дисперсии (1.4.7). Следует при этом обратить внимание на то, что вычисляемый корреляционный момент

$$\mu_{XY} = M[(x_r + ix_i)(y_r - iy_i)] \quad (1.4.14)$$

в общем случае является комплексным числом, поскольку выполняя перемножение и группируя слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} \mu_{XY} &= M[x_r y_r] + M[x_i y_i] + i(M[x_i y_r] - M[x_r y_i]) = \\ &= \mu_{x_r y_r} + \mu_{x_i y_i} + i(\mu_{x_i y_r} - \mu_{x_r y_i}). \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Используя вещественную дисперсию (1.4.1) и корреляционный момент (1.4.15), легко вывести формулу для вычисления выборочного значения комплексного коэффициента парной корреляции [42, с.98]:

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum (y_i y_r + x_i x_r) + i(\sum (x_r y_i - y_r x_i))}{\sqrt{\sum (y_r^2 + y_i^2) \sum (x_r^2 + x_i^2)}}. \quad (1.4.16)$$

Легко убедиться в том, что и этот коэффициент является комплексной величиной.

А теперь сравним друг с другом формулу (1.4.13) и формулу (1.4.16) – ведь это один и тот же коэффициент, вычисленный, исходя из одних и тех же базовых предпосылок, но выведенный разными способами. Легко заметить, что знаменатели формул (1.4.13) и (1.4.16) полностью совпадают, а числители их принципиально отличны друг от друга. Даже если вместо комплексных коэффициентов использовать только их вещественные части, эти коэффициенты всё равно остаются различными.

Таким образом, получен противоречивый результат, а это значит, что принятое предположение о том, что основные показатели, характеризующие случайный процесс (дисперсия, корреляционный момент, ковариация

и т. п.), являются вещественными величинами, не может служить основанием для дальнейшего развития этого направления математической статистики.

1.5. Комплексная дисперсия

Обратим наше внимание на возможность использования комплексных характеристик для анализа случайных процессов комплексных величин, и в первую очередь – на комплексную дисперсию

$$D_c(z) = M[z^2] = M[|z| e^{i2\theta}] = M[|z| \cos 2\theta] + M[|z| \sin 2\theta], \quad (1.5.1)$$

$$\theta = \arctg \frac{x_i}{x_r} + 2\pi k, k = 0, 1, 2, \dots$$

где

,

$$(1.5.2)$$

Для обоснования такой возможности вновь будем использовать два подхода для вывода формулы расчёта коэффициента парной корреляции двух комплексных случайных переменных.

Дисперсия (1.4.1) является частным случаем дисперсии (1.5.1), а именно в том случае, когда полярный угол θ между действительной и мнимой частями случайной комплексной переменной равен $\theta = \pi k, k = 0, 1, 2, \dots$ Во всех остальных случаях дисперсии (1.4.1) и (1.5.1) будут отличны друг от друга.

Найдём формулу для вычисления комплексного коэффициента парной корреляции первым путём как среднее геометрическое выборочных значений коэффициентов регрессии. Для этого сформулируем критерий МНК в терминах комплексной дисперсии (1.5.1) так, как это показано в работе, опубликованной ранее [42, с. 103 – 112]. Применительно к комплексному коэффициенту регрессии X на Y получим с помощью такого комплексного МНК:

$$b_0 + ib_1 = \frac{\sum (y_r + iy_i)(x_r + ix_i)}{\sum (x_r + ix_i)(x_r + ix_i)}. \quad (1.5.3)$$

Комплексный коэффициент пропорциональности обратной регрессии также может быть найден с помощью комплексного МНК:

$$d_0 + id_1 = \frac{\sum (y_r + iy_i)(x_r + ix_i)}{\sum (y_r + iy_i)(y_r + iy_i)} . \quad (1.5.4)$$

Теперь, подставляя эти коэффициенты в формулу для вычисления коэффициента парной корреляции, получим:

$$r_{XY} = \frac{\sum (y_r + iy_i)(x_r + ix_i)}{\sqrt{\sum (x_r + ix_i)^2 \sum (y_r + iy_i)^2}} = \frac{\sum (x_r y_r - x_i y_i) + \sum (x_r y_i + x_i y_r)}{\sqrt{\sum (x_r + ix_i)^2 \sum (y_r + iy_i)^2}} . \quad (1.5.5)$$

Для вычисления искомой формулы вторым путём также необходимо отказаться от идеи представления корреляционного момента двух случайных комплексных переменных, как вещественное число, и согласиться с тем, что это – комплексное число. Тогда комплексный корреляционный момент примет вид:

$$\begin{aligned} \mu_{XY} &= M[x_r y_r] - M[x_i y_i] + i(M[x_i y_r] + M[x_r y_i]) = \\ &= \mu_{x_r y_r} - \mu_{x_i y_i} + i(\mu_{x_i y_r} + \mu_{x_r y_i}) . \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Дисперсию каждой из комплексных случайных величин будем также представлять в комплексном виде в соответствии с (1.5.1). Подставляя эти значения в формулу для расчёта коэффициента парной корреляции, получим:

$$r_{XY} = \frac{\sum (y_r + iy_i)(x_r + ix_i)}{\sqrt{\sum (x_r + ix_i)^2 \sum (y_r + iy_i)^2}} = \frac{\sum (x_r y_r - x_i y_i) + \sum (x_r y_i + x_i y_r)}{\sqrt{\sum (x_r + ix_i)^2 \sum (y_r + iy_i)^2}} . \quad (1.5.7)$$

Легко заметить, что получена та же самая формула комплексного коэффициента парной корреляции, что и в случае вычисления её через комплексные коэффициенты линейной пропорциональности (1.5.5). Это значит, что получен непротиворечивый результат, то есть – исходные предположения о том, что в статистике комплексных случайных переменных следует использовать комплексную дисперсию и другие комплексные характеристики комплексных переменных являются верными.

О свойствах комплексного коэффициента парной корреляции более подробно рассказано в работе 2019 года [6], поэтому останавливаться на анализе свойств этого коэффициента мы не будем.

Обратимся к анализу свойств комплексной дисперсии комплексной случайной величины (1.5.1). Для этого следует записать комплексную дисперсию в арифметическом виде:

$$D_c(z) = M[z^2] = M[x_r^2] - M[x_i^2] + i2M[x_r x_i]. \quad (1.5.8)$$

Теперь понятно, что выборочные значения комплексной дисперсии могут принимать самые разные значения. Она может быть комплексной, действительной, а может быть и мнимой величиной – разнообразие её значений соответствует многообразию свойств комплексной переменной. При этом вещественная часть комплексной дисперсии может быть как положительной, так и отрицательной, а может быть и такой, что её вещественная часть будет равна нулю. Рассмотрим эти варианты и свойства ряда такой комплексной случайной величины, для которой эти характеристики комплексной дисперсии имеют место.

Прежде всего обратим внимание на действительную часть комплексной дисперсии комплексной случайной величины:

$$\operatorname{Re}[D_c(z)] = M[x_r^2] - M[x_i^2] \quad (1.5.9)$$

Как видно, она характеризует степень отличия дисперсии вещественной части комплексной случайной переменной от дисперсии мнимой части этой же переменной. Поэтому в том случае, когда дисперсии действительной и мнимой частей комплексной переменной равны друг другу, действительная часть комплексной дисперсии будет равна нулю.

Поскольку корреляционный момент двух независимых величин равен нулю, то понятен смысл и мнимой части комплексной дисперсии (1.5.1), который наглядно виден из арифметической формы записи (1.5.8). Мнимая часть комплексной дисперсии будет характеризовать степень независимости друг от друга вещественной и мнимой частей комплексной переменной. Если они независимы, мнимая часть комплексной дисперсии будет равна нулю.

Таким образом, вариация комплексной случайной величины может быть охарактеризована комплексной дисперсией (1.5.1), поскольку вещественной эта дисперсия становится автоматически в случае независимости

друг от друга действительной и мнимой частей комплексной случайной переменной.

1.6. Свойства комплексного коэффициента парной корреляции

Определив, как правильно вычислять комплексный коэффициент парной корреляции между двумя случайными комплексными переменными, следует дать интерпретацию тем значениям, которые он может принимать.

Линейная взаимосвязь между двумя комплексными переменными означает, что и вещественная, и мнимая части одной комплексной переменной выступают как двухфакторные линейные зависимости от вещественной и мнимой частей другой комплексной переменной. Поэтому, если одна переменная изменяется нелинейно, то и другая переменная будет меняться нелинейно, причём визуально такую зависимость чаще всего определить сложно. Если изучаемая зависимость не функциональная, а регрессионная, то разброс точек на комплексных плоскостях ещё меньше вызывает ассоциации с какой-либо зависимостью. Поэтому визуальный анализ зависимости между комплексными переменными затруднён и о линейной взаимосвязи двух комплексных переменных можно судить исключительно по расчётным характеристикам. В области действительных переменных эту функцию выполняет коэффициент парной корреляции, а в области комплексных случайных величин – комплексный коэффициент парной корреляции (1.5.11).

Комплексный коэффициент парной корреляции, как это следует из материалов предыдущего параграфа, представляет собой среднее геометрическое двух комплексных коэффициентов регрессии

$$r_{XY} = \pm \sqrt{ab} \quad (1.6.1)$$

Поэтому для строго функциональной линейной комплекснозначной зависимости $Y=aX$ и $X=bY$ будет выполняться очевидное равенство:

$$a = \frac{1}{b}, \quad \text{откуда} \quad ab = \frac{1}{b}b = 1 \quad (1.6.2)$$

То есть, комплексный коэффициент парной корреляции для линейной функциональной зависимости равен:

$$r_{XY} = \pm(1 + i0) \quad (1.6.3)$$

Значит, для линейной функциональной зависимости между двумя комплексными переменными модуль действительной части комплексного коэффициента парной корреляции будет равен единице, а его мнимая составляющая будет равна нулю.

Это означает, что квадрат комплексного коэффициента парной корреляции (комплексный коэффициент детерминации) для линейной зависимости всегда будет равен действительной единице. Но в каких случаях линейной функциональной зависимости между двумя комплексными переменными коэффициент корреляции будет принимать значения «плюс единица», а в каких случаях – «минус единица»?

Для ответа на этот вопрос представим комплексные коэффициенты пропорциональности в экспоненциальной и тригонометрической формах:

$$a = R_a e^{i\alpha} = R_a [\cos \alpha + i \sin \alpha], \quad (1.6.4)$$

$$b = R_b e^{i\beta} = R_b [\cos \beta + i \sin \beta]. \quad (1.6.5)$$

Тогда их произведение будет равно:

$$ab = R_a R_b e^{i(\alpha+\beta)} = R_a R_b [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]. \quad (1.6.6)$$

Поскольку для линейной функциональной зависимости выполняется (1.6.3), то есть мнимая часть комплексного коэффициента парной корреляции равна нулю, то отсюда со всей очевидностью следует, что в этом случае должно выполняться условие

$$\alpha + \beta = 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6.7)$$

Будем рассматривать для простоты случай, когда $k = 0$. Тогда комплексный коэффициент парной корреляции определяется как квадратный корень из такого произведения:

$$r_{cXY} = \pm \sqrt{ab} = \pm \sqrt{R_a R_b \cos(\alpha + \beta)}. \quad (1.6.8)$$

Поскольку модуль каждого коэффициента пропорциональности по определению положителен, то равенство коэффициента парной корреляции

«плюс единице» или «минус единице» полностью определяется косинусом угла α . Нас интересует случай, когда подкоренное выражение может быть таким:

$$\sqrt{(-1)(-1)} \quad (1.6.9)$$

Тогда можно определить характеристики зависимости в случае, когда комплексный коэффициент пропорциональности становится равным минус единице. Из равенства (1.6.7) косинус подкоренного выражения (1.6.8) может быть записан так:

$$\cos(\alpha + (-\alpha)) = \cos \alpha \cos(-\alpha) - \sin \alpha \sin(-\alpha),$$

Теперь легко определить, что интересующий нас случай (1.6.9) определяется полярным углом комплексного коэффициента пропорциональности $a_0 + ia_1$, лежащим в пределах

$$\frac{3}{4}\pi \leq \alpha \leq \frac{5}{4}\pi \quad (1.6.10)$$

Для этого случая вещественная составляющая комплексного коэффициента пропорциональности всегда не положительна:

$$a_0 \leq 0, \quad (1.6.11)$$

а его мнимая часть всегда не меньше вещественной:

$$a_0 \leq a_1 \quad (1.6.12)$$

Этим условиям удовлетворяют, например, такие комплексные коэффициенты пропорциональности:

$$-1+i; \quad -1+0i; \quad -10-i9,999\dots$$

Что представляет собой линейная комплекснозначная взаимосвязь с такими значениями?

Для ответа на этот вопрос представим линейную функциональную комплекснозначную зависимость как систему двух равенств вещественных и мнимых частей:

$$y_r = a_0 x_r - a_1 x_i, \quad (1.6.13)$$

$$y_i = a_1 x_r + a_0 x_i \quad (1.6.14)$$

По условиям (1.6.11) и (1.6.12) коэффициент a_0 всегда не положителен, а мнимая часть a_1 может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Рассматривая ситуацию, когда комплексный аргумент возрастает в первом квадранте комплексной плоскости, то есть, когда x_r и x_i непрерывно растут и являются положительными числами, получим, что при этом вещественная часть комплексного результата Y_r убывает, а мнимая часть Y_i в силу (1.6.12) может как возрастать, так и убывать.

То есть значения, равные «минус единице» комплексный коэффициент парной корреляции принимает только в том случае, когда между переменными имеется обратная зависимость – увеличение значений аргумента X ведёт к уменьшению значений вещественной части Y_r комплексной случайной величины Y .

Итак, действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции r_r свидетельствует о степени приближения зависимости между случайными комплексными переменными к линейной зависимости и интерпретация его значений подобна интерпретации значений коэффициента парной корреляции в области действительных чисел.

Мнимая составляющая комплексного коэффициента парной корреляции r_i , как это со всей очевидностью следует из (1.6.3), в том случае, когда имеется линейная функциональная зависимость между комплексными переменными, будет равна нулю.

Итак, если действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции по модулю близка к единице, а его мнимая часть по модулю близка к нулю, то исследователь может утверждать о том, что зависимость, наличие которой он предполагает между двумя комплексными случайными переменными, близка к линейной.

1.7. Нелинейные корреляции либо отсутствие корреляции

Модели комплексных переменных иначе описывают изучаемые процессы, нежели модели действительных переменных. Поэтому и от комплексного коэффициента парной корреляции следует ожидать наличия

новых свойств, которые не присущи коэффициенту парной корреляции действительных переменных.

В самом начале исследования этих новых свойств обратим внимание на ситуацию, когда действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции равна нулю, а его мнимая часть равна по модулю единице:

$$r_{XY} = \pm(0 + i) \quad (1.7.1)$$

Этот случай, как легко заметить, является противоположным только что рассмотренному случаю линейной корреляции (1.6.3).

Для (1.7.1) должно выполняться такое условие:

$$ab = R_a R_b e^{i(\alpha + \beta)} = R_a R_b [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] = 0 + i \quad (1.7.2)$$

Это в свою очередь означает, что

$$R_a R_b = 1, \quad \alpha + \beta = (2k - 1)\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.7.3)$$

Что показывает полученное равенство, например, при $k = 1$? Оно показывает, что если при комплексном коэффициенте пропорциональности регрессии комплексного аргумента на комплексный результат, равном

$$a_0 + ia_1 = 1 + i0,$$

МНК, применённый к обратной зависимости – аргумента от результата – должен дать такие оценки комплексного коэффициента:

$$b_0 + ib_1 = -1 + i0.$$

Только в таком случае будет выполняться условие (1.7.3).

Это же условие будет выполняться, если при оценке МНК на множестве значений комплексных случайных переменных коэффициенту зависимости результата от аргумента

$$a_0 + ia_1 = 1 + i$$

будет соответствовать коэффициент обратной линейной зависимости, равный

$$b_0 + ib_1 = -1 - i,$$

то есть – вектор, противоположный в комплексной плоскости по направлению к первому.

Теперь можно понять, в каком случае действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции будет равна нулю, а его мнимая часть по модулю будет равна единице.

При нахождении регрессии комплексного аргумента на комплексный результат $y_r + iy_i = (a_0 + ia_1)(x_r + ix_i)$ коэффициент пропорциональности $a_0 + ia_1$, найденный с помощью МНК, будет моделировать некоторую линейную последовательность $\hat{y}_r + i\hat{y}_i$, максимально приближенную к исходному ряду случайной переменной.

При нахождении с помощью МНК на этих же данных обратной зависимости комплексного аргумента от комплексного результата:

$$x_r + ix_i = (b_0 + ib_1)(y_r + iy_i),$$

МНК будет давать такой комплексный коэффициент $b_0 + ib_1$, что его применение для регрессии

$$y_r + iy_i = \frac{x_r + ix_i}{b_0 + ib_1}$$

будет моделировать ряд точек $\hat{y}'_r + i\hat{y}'_i$, повернутых относительно исходного ряда $\hat{y}_r + i\hat{y}_i$ на угол π , то есть – изменяющихся в обратном направлении.

Это возможно только в случае полного отсутствия линейной зависимости и вообще какой-нибудь зависимости между двумя случайными комплексными переменными, то есть – когда две анализируемые случайные комплексные переменные абсолютно независимы друг от друга.

Таким образом мы показали, что означают значения комплексного коэффициента парной корреляции:

– если комплексный коэффициент парной корреляции равен $\pm (1 + i0)$, то это свидетельствует о наличии линейной функциональной взаимосвязи между переменными;

– если комплексный коэффициент парной корреляции равен $\pm (0 + i)$, то это говорит о том, что наблюдается полная независимость друг от друга двух комплексных случайных переменных.

Однако доказанное вовсе не позволяет утверждать о том, что комплексный коэффициент парной корреляции лежит в пределах от $\pm (0 + i)$ до

$\pm(1+i0)$ и в этом промежутке он характеризует разную степень приближения к линейной комплекснозначной зависимости. Второе утверждение в целом верно – чем ближе расчётные значения комплексного коэффициента парной корреляции к $\pm(1+i0)$, тем ближе зависимость между ними к линейной форме. Но вот первое утверждение о пределах изменения комплексного коэффициента парной корреляции верным не является. Поведение комплексного коэффициента парной корреляции куда сложнее его вещественного аналога.

Для того чтобы понять, как может менять свои значения комплексный коэффициент парной корреляции, раскроем числитель этого коэффициента:

$$\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it}) = \sum (y_{rt}x_{rt}) - \sum y_{it}x_{it} + i(\sum y_{it}x_{rt} + \sum y_{rt}x_{it}). \quad (1.7.4)$$

Запишем его через ковариации (ведь все исходные переменные центрированы относительно их средних арифметических). Тогда получим:

$$\sum (y_{rt} + iy_{it})(x_{rt} + ix_{it}) = \text{cov}(y_{rt}x_{rt}) - \text{cov}(x_{it}y_{it}) + i[\text{cov}(y_{it}x_{rt}) + \text{cov}(y_{rt}x_{it})]. \quad (1.7.5)$$

Почему нам важны ковариации? Потому что из математической статистики известно, что ковариация двух независимых случайных переменных равна нулю.

Знаменатель комплексного коэффициента парной корреляции можно записать через комплексные дисперсии, свойства которых нам уже хорошо известны (1.5.2). Тогда комплексный коэффициент парной корреляции в таком более подробном и удобном для анализа виде будет записан так:

$$r_{cXY} = \frac{\text{cov}(y_{rt}x_{rt}) - \text{cov}(x_{it}y_{it}) + i[\text{cov}(y_{it}x_{rt}) + \text{cov}(y_{rt}x_{it})]}{\sqrt{\sigma_{x_{rt}}^2 - \sigma_{x_{it}}^2 + i2\text{cov}(x_{rt}x_{it})} \sqrt{\sigma_{y_{rt}}^2 - \sigma_{y_{it}}^2 + i2\text{cov}(y_{rt}y_{it})}}. \quad (1.7.6)$$

Вот эта форма записи коэффициента корреляции уже позволяет предметно судить о его свойствах.

Когда дисперсии мнимых и действительных частей каждой из исходных переменных равны друг другу, то есть

$$\sigma_{x_{rt}}^2 - \sigma_{x_{it}}^2 = 0, \quad \sigma_{y_{rt}}^2 - \sigma_{y_{it}}^2 = 0, \quad (1.7.7)$$

то для знаменателя получим:

$$i2\sqrt{\text{cov}(x_{rt}, x_{it})\text{cov}(y_{rt}, y_{it})}. \quad (1.7.8)$$

Если при этом ещё случится так, что действительные и мнимые части комплексных переменных независимы друг от друга, то ковариации в подкоренных выражениях (1.7.8) будут равны нулю.

Необходимо заметить, что для выборочных значений они крайне редко будут равны нулю, точно так же, как и (1.7.7), будут строго равны нулю для выборочных значений чрезвычайно редко.

В подавляющем большинстве случаев и (1.7.7), и (1.7.8) будут близки к нулю, но не строго равны ему.

В действительной и мнимой частях числителя (1.7.6) находятся перекрёстные ковариации, которые в выборочном случае ещё реже могут быть равны нулю.

Поэтому деление числителя на величину, близкую к нулевым значениям, будет приводить к ситуации, когда комплексный коэффициент парной корреляции может иметь высокие значения как действительной, так и мнимой частей, причём эти значения могут по модулю существенно превышать единицу.

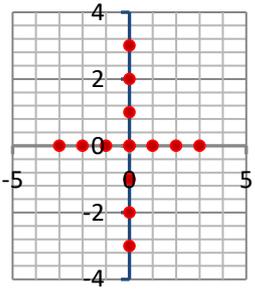
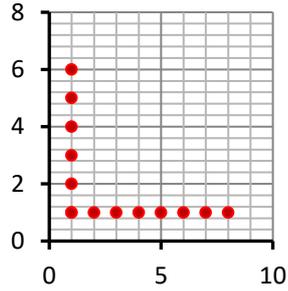
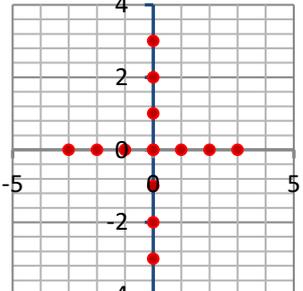
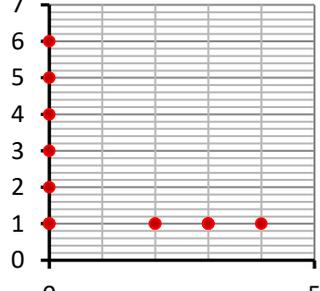
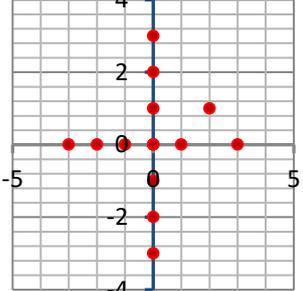
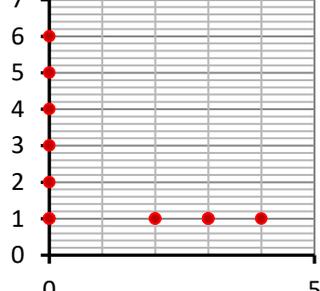
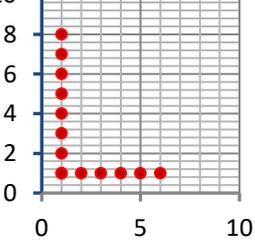
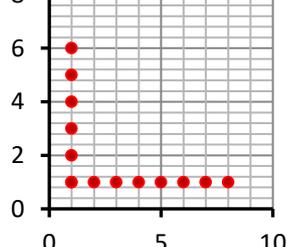
Примеры таких случаев приведены в табл. 1.1.

В реальной практике построения эконометрических моделей ситуация, при которой складываются подобные условия, маловероятна, хотя бы потому, что действительные и мнимые части таких случайных комплексных переменных зависимы друг от друга – а иначе их формирование в экономике лишено всякого смысла!

Поэтому даже если дисперсии действительной и мнимой части каждой из рассматриваемых комплексных случайных переменных будут равны друг другу (крайне редкий случай для выборочных значений), то знаменатель (1.7.6) будет всё же далёк от нуля.

Таблица 1.1.

Исключительные случаи значений комплексного коэффициента парной корреляции

№	График комплексной переменной X	Дисперсия комплексной переменной X	График комплексной переменной Y	Дисперсия комплексной переменной Y	Комплексный коэффициент парной корреляции
1.		$0-i15,0$		$45,1-i59,9$	$33651969-i11231561$
2.		$0-i15,0$		$-8,6-i36,4$	$-5544718-i643532$
3.		$-0,928+i4,0$		$-8,6-i36,4$	$-0,316-i0,259$
4.		$-45,1-i59,9$		$-45,1-i59,9$	$1,638+i0$

Зная это, можно так интерпретировать значения действительной части комплексного коэффициента парной корреляции: между двумя комплексными случайными переменными может быть линейная корреляционная зависимость, если выполняется условие:

$$|1 - \operatorname{Re}(r_{cXY})| \leq 0,2 \quad (1.7.9)$$

Во всех остальных случаях линейная взаимосвязь будет не столь тесной, и, скорее всего, исследователю необходимо искать другую форму зависимости между двумя случайными комплексными переменными.

1.8. Корреляционная функция

До сих пор в науке, в том числе и в экономике, активно используются корреляционные и автокорреляционные функции. Если имеются две изменяющиеся во времени случайные переменные x_t и y_t , то они могут быть взаимосвязаны друг с другом не только в этот момент времени t . Вполне возможно, что эта взаимосвязь имеет некоторый лаг во времени и переменная y_t зависит не от x_t , а от этой же переменной, которая наблюдалась на τ наблюдений ранее, то есть y_t зависит от $x_{t-\tau}$. Чаще всего величина лага τ является неизвестной исследователю и её следует найти. Для этого, в частности, и используют корреляционную функцию.

Если вычислять коэффициенты парной корреляции r между y_t и x_t , затем – между y_t и x_{t-1} , между y_t и x_{t-2} и т. д., то изменение коэффициента парной корреляции в зависимости от лага и будет представлять собой корреляционную функцию в табличной дискретной форме.

Если исследователь изучает корреляцию не между двумя переменными, а изучает влияние предыдущих значений переменной на её текущие значения, то он вычисляет коэффициенты парной корреляции между y_t и y_{t-1} , между y_t и y_{t-2} , между y_t и y_{t-3} и т. д. Изменение коэффициента парной корреляции от сдвижки ряда во времени называют автокорреляционной функцией.

Считается, что лаги между переменными или лаги авторегрессии выявляются на такой сдвиг τ назад, при котором модуль коэффициента парной корреляции по модулю не меньше, чем 0,8. Поскольку коэффициент парной

корреляции может быть как положительным, так и отрицательным, утверждают, что при положительном значении коэффициента прошлое значение показателя, соответствующее этому лагу, оказывает на текущее значение положительное влияние. В том случае, когда коэффициент парной корреляции для какого-то лага будет отрицательным, это означает обратное влияние прошлых значений с таким лагом на текущую величину переменной.

Мы не будем проводить анализ степени пригодности корреляционных и автокорреляционных функций в задачах экономического прогнозирования. Мы обратим внимание на то, что в случае использования комплексных экономических переменных также возникает возможность построения корреляционных и автокорреляционных функций, но поскольку комплексный коэффициент парной корреляции состоит из действительной и мнимой частей, то необходимо рассматривать комплекснозначные корреляционную и автокорреляционную функции.

Своеобразие комплекснозначной корреляционной (автокорреляционной) функции заключается в том, что этой функции есть действительная и мнимая части. И каждая из них будет представлять собой зависимость от сдвига во времени:

$$\operatorname{Re}(r_{cXY}) = f_r(\tau); \quad \operatorname{Im}(r_{cXY}) = f_i(\tau) \quad (1.8.1)$$

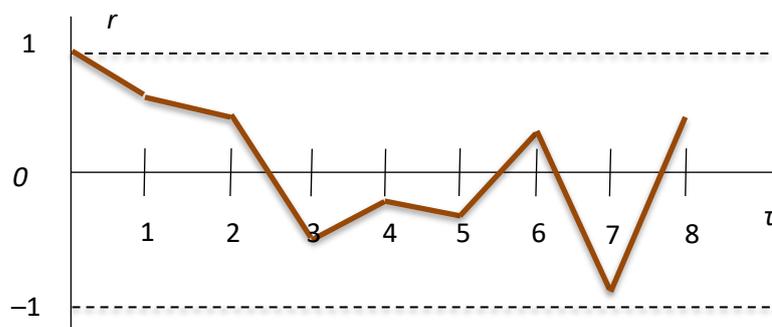


Рис. 1.6. Пример коррелограммы для действительных переменных

Корреляционную функцию удобно изучать, изображая её графически когда по оси абсцисс откладываются сдвиги во времени, а по оси ординат — соответствующие значения коэффициентов парной корреляции. Такая графическая модель получила название «коррелограмма» или

«автокоррелограмма», если рассматривается автокорреляционная функция. На рис. 1.6 приведён примерный график такой коррелограммы.

Применительно к комплексной корреляционной функции возможно несколько вариантов построения коррелограммы.

Первый вариант представляет собой простое развитие коррелограммы действительных переменных, когда графики действительной и мнимой частей располагаются на одном графике. В этом случае по оси абсцисс откладывается временной сдвиг, а действительная $\text{Re}(r_{cXY})$ и мнимая $\text{Im}(r_{cXY})$ части комплексного коэффициента парной корреляции располагаются на этом графике в зависимости от значений, которые они принимают для каждого лага.

Таблица 1.2.

Пример автокорреляционной функции для комплексного ряда, составленного из рядов 2830 и 2831

Лаг, τ	$\text{Re}(r_{cXY})$	$\text{Im}(r_{cXY})$
1	-0,757	0,178
2	-0,554	0,286
3	-0,480	0,267
4	-0,415	0,277
5	-0,377	0,274
6	-0,356	0,257
7	-0,345	0,242
8	-0,335	0,198
9	-0,332	0,196
10	-0,319	0,195
11	-0,288	0,206
12	-0,222	0,193
13	-0,180	0,201
14	-0,139	0,212
15	-0,142	0,193
16	-0,199	0,148
17	-0,251	0,120
18	-0,260	0,120
19	-0,269	0,114

Для того чтобы не выдумывать вид такой «параллельной» коррелограммы, были использованы два ряда (№ 2830 и 2831) из базы Международного института прогнозистов [30]. Эти два ряда, объёмом по 103 наблюдения каждый, были сведены в единую комплексную переменную. Затем

для полученного ряда этой комплексной переменной вычислялась комплексная автокорреляционная функция. Результаты вычислений приведены в табл. 1.2.

Используя данные табл. 1.2, можно изобразить комплексную автокоррелограмму в такой параллельной форме (рис. 1.7).

Автокоррелограмма на рис. 1.7 подобна автокоррелограммам действительных переменных, и её интерпретация не вызывает особых затруднений. Здесь красным цветом изображена мнимая часть комплексного коэффициента корреляции $\text{Im}(r_{cXY})$ – она на всём вычисляемом промежутке положительна, поэтому располагается выше нуля, а синим цветом изображена коррелограмма действительной части $\text{Re}(r_{cXY})$. Она располагается ниже нуля, поскольку все её значения оказались отрицательными.

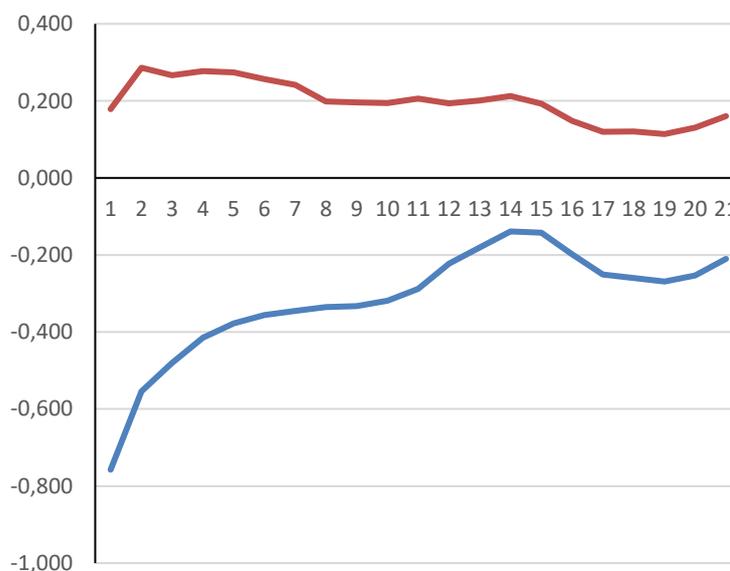


Рис. 1.7. Первый вид автокоррелограммы табл. 1.2

Из предыдущего параграфа известно, что действительная часть комплексного коэффициента парной корреляции характеризует степень приближения комплекснозначной зависимости к линейной форме, а мнимая часть отражает степень разброса вокруг этой линии. Из анализа приведённой комплексной автокоррелограммы следует, что рассматриваемый ряд может быть описан авторегрессией первого порядка, но от этой модели

нельзя ожидать хорошей точности, поскольку действительная часть меньше, чем 0,8, а мнимая часть далека от нуля.

Возможна и другая форма комплексной коррелограммы. Поскольку каждому значению лага соответствует одно значение комплексного коэффициента парной корреляции, состоящего из действительной и мнимой частей, то коррелограмму можно рассматривать как траекторию точки на фазовой плоскости, а саму коррелограмму – как фазовый портрет структуры ряда. На рис. 1.8 приведена коррелограмма на такой фазовой плоскости, осями которой выступают действительная и мнимая части комплексного коэффициента корреляции (в рассматриваемом случае – автокорреляции).

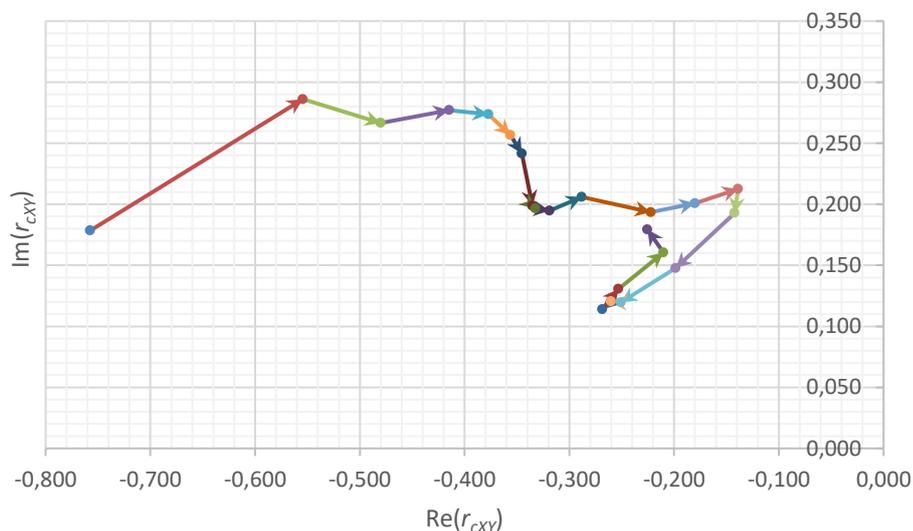


Рис. 1.8. Автокоррелограмма табл. 1.2 как фазовый портрет

Здесь точки на комплексной плоскости коррелограммы соединяются друг с другом не просто отрезками прямых линий, а направленными отрезками (стрелочками), причём направление выдерживается в строгом порядке – от первого значения комплексного коэффициента парной корреляции к последнему так, как это сделано на рисунке.

Это другое представление автокоррелограммы, которое иначе представляет процесс, нежели на рис. 1.7. Здесь возможно получение самых разных фигур, интерпретация которых является отдельной задачей. Фазовые портреты комплексных автокоррелограмм могут иметь самую разную форму и располагаться в разных квадрантах фазовой плоскости. Например,

можно получить замкнутую фигуру типа петли гистерезиса, которая будет соответствовать длине цикла, если процесс развивается циклично, например так, как это изображено на рис. 1.9.

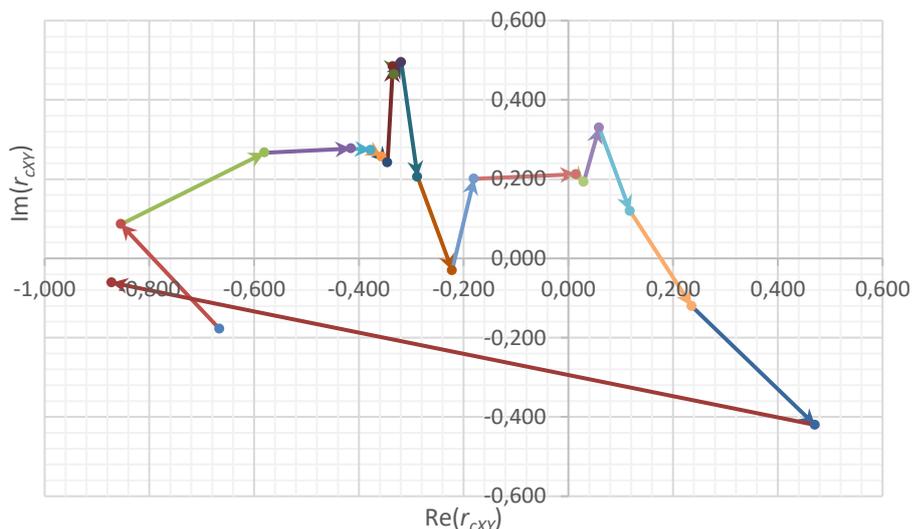


Рис. 1.9. Возможный фазовый портрет коррелограммы

Если рассматривать параллельную комплексную коррелограмму, то наличие такой петли можно и не заметить, как это следует из рис. 1.10. На нём изображена та же самая комплексная коррелограмма, что и на фазовой плоскости рис. 1.9.

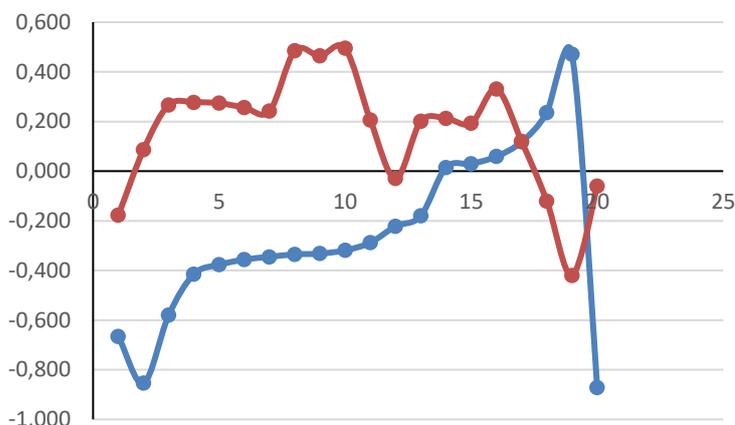


Рис. 1.10. Комплексная коррелограмма, соответствующая случаю рис. 9, но представленная в параллельной форме

Поскольку параллельная форма комплексной коррелограммы и её фазовый портрет дают акценты на разные особенности корреляционной функции, следует при анализе изучаемого комплексного случайного ряда использовать эти две формы.

Более подробное исследование комплексных корреляционных функций и возможностей их практического применения в моделировании стационарных процессов и в краткосрочном прогнозировании будут проведены в последующих научных исследованиях. Здесь приводятся только основы такого исследования.

1.9. Доверительные границы комплексной случайной величины

Мы рассматриваем проблемы и задачи построения эконометрических моделей исключительно к условиям обратимых процессов – случайных и нормально распределённых. А это значит, что исследователь имеет дело с выборочными значениями случайных величин, по которым он судит о генеральной совокупности в целом. Поскольку оцениваются выборочные значения, то необходимо определить – насколько можно доверять этим выборочным значениям, то есть, оценить – насколько они близки к своему истинному значению, а именно – к математическому ожиданию.

Понятно, что если перед исследователем стоит задача изучить простой стационарный процесс случайной действительной переменной, который представлен некоторой выборкой из генеральной совокупности, то, предполагая нормальное распределение этой переменной Y_i , следует вначале рассчитать её среднюю арифметическую:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad (1.9.1)$$

и, вычислив дисперсию отклонений фактических наблюдений от этой средней σ^2 , можно определить тот интервал, в котором находится истинное значение Y :

$$\bar{Y} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq Y \leq \bar{Y} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (1.9.2)$$

Здесь t_α – значение t -статистики Стьюдента.

Как видно из (2.8.2), доверительные границы для действительных одномерных переменных представляют собой отрезок на числовой оси, внутри которого с заданной вероятностью могут находиться случайные величины.

Если вместо вещественного случая рассматривать комплекснозначную переменную, то ход рассуждений не должен, на первый взгляд, нарушаться – высчитываются средние арифметические для комплексной случайной величины (что тождественно вычислению средних арифметических для действительной и мнимой частей по отдельности), для них же определяются дисперсии, после чего с помощью стандартного подхода (1.9.2) определяются доверительные границы. Тогда доверительные границы значений двух составляющих случайной комплексной величины должны определяться так:

$$(\bar{y}_r + i\bar{y}_i) - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}(\sigma_{y_r} + i\sigma_{y_i}) \leq y_r + iy_i \leq \bar{y}_r + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}(\sigma_{y_r} + i\sigma_{y_i}). \quad (1.9.3)$$

Но смысл этого способа определения доверительных границ комплексной случайной величины раскроется, если его записать в виде системы из двух условий изменения доверительных границ отдельно для вещественной и мнимой частей:

$$\begin{cases} \bar{y}_r - t_\alpha \frac{\sigma_{y_r}}{\sqrt{n}} \leq y_r \leq \bar{y}_r + t_\alpha \frac{\sigma_{y_r}}{\sqrt{n}}; \\ \bar{y}_i - t_\alpha \frac{\sigma_{y_i}}{\sqrt{n}} \leq y_i \leq \bar{y}_i + t_\alpha \frac{\sigma_{y_i}}{\sqrt{n}}. \end{cases} \quad (1.9.4)$$

Из этого со всей очевидностью следует, что на комплексной плоскости случайной комплексной переменной доверительная область будет представлять собой прямоугольник, очерченный сторонами, определяемыми доверительными границами (1.9.4), причём стороны этого прямоугольника будут параллельны осям комплексной плоскости. Центром этого прямоугольника, а значит, и доверительной области в форме прямоугольника, будет являться точка на комплексной плоскости, определяемая координатами значений средней арифметической комплексной случайной переменной (\bar{y}_r, \bar{y}_i) .

Как было показано в параграфе 1.3 этой монографии, доверительная область комплексной случайной величины должна представлять собой некоторое облако рассеяния допустимых значений, а не прямоугольник. К тому же это облако должно иметь форму эллипса, оси которого параллельны осям комплексной плоскости только в том случае, когда действительная и мнимая части комплексной переменной не зависят друг от друга. А в случае зависимости их друг от друга, а именно этот случай мы и рассматриваем, оси эллипса рассеивания не будут параллельными осям комплексной плоскости (рис. 3).

Таким образом, кажущаяся на первый взгляд верной процедура нахождения доверительных границ с помощью правила (1.9.3), оказывается очень грубым приближением к действительности и её можно использовать только с целью нахождения очень приблизительных границ доверительной области.

Поэтому стандартный подход, который кажется таким очевидным, оказывается ошибочным. Для научных и практических исследований необходимо использовать доверительную область, представляющую собой эллипс, внутри которого находятся те точки, которые входят в доверительную область, а за пределами которого находятся точки, выходящие за доверительную область.

Воспользуемся уравнением эллипса рассеяния. Применительно к нашей задаче доверительная область должна находиться внутри этого эллипса, то есть, должно выполняться такое условие:

$$\frac{(y_r - m_{y_r})^2}{\sigma_{y_r}^2} - 2 \frac{r_{y_r y_i} (y_r - m_{y_r})(y_i - m_{y_i})}{\sigma_{y_r} \sigma_{y_i}} + \frac{(y_i - m_{y_i})^2}{\sigma_{y_i}^2} \leq s_{\alpha, n} \quad (1.9.5)$$

Здесь $s_{\alpha, n}$ – некоторое число, определяющее границу доверительной области. Это число зависит от уровня доверительной вероятности α и числа степеней свободы n .

Для выборочных значений, когда вместо математических ожиданий нам известна их оценка, – средние арифметические и выборочные значения дисперсий, уравнение эллипса доверительной области комплексной случайной переменной будет выглядеть так:

$$\frac{(y_r - \bar{y}_r)^2}{\sigma_{y_r}^2} - 2 \frac{r_{y_r y_i} (y_r - \bar{y}_r)(y_i - \bar{y}_i)}{\sigma_{y_r} \sigma_{y_i}} + \frac{(y_i - \bar{y}_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} \leq s_{\alpha, n} \quad (1.9.6)$$

Найти аналитическую взаимосвязь между $s_{\alpha, n}$ и t_α нам не удалось, и это будет являться задачей наших дальнейших научных исследований. Но, поскольку современная вычислительная техника позволяет выполнять многочисленные модельные эксперименты и компьютерные опыты, то найти табличную зависимость между ними с помощью этого подхода оказывается возможно.

В табл. 1.4 приведены рекомендуемые значения величины $s_{\alpha, n}$ в зависимости от уровня доверительной вероятности α и числа степеней свободы n , которые были получены в ходе таких машинных экспериментов.

Покажем, как воспользоваться этой таблицей и условиями (1.9.6) на конкретном примере.

В нашем распоряжении имеются данные о результатах ежедневных котировок на мировых товарных биржах двух товаров – нефти марки Brent и природного газа с 4 января 2010 года по 9 августа 2013 года. Поскольку эти два товара отражают ситуацию на мировом рынке органического топлива, то их вполне можно представить как одну случайную комплексную переменную:

$$Z_t = y_{rt} + iy_{it} \quad (1.9.7)$$

где y_{rt} – цена барреля нефти марки Brent, а y_{it} – цена кубометра природного газа.

Поскольку размерности и масштаб этих переменных различны, их необходимо привести к одной размерности и к одному масштабу.

Проще всего это сделать, если каждую величину ряда значений цены барреля нефти разделить на величину первого наблюдения этого показателя от 4 января 2010 года, а каждую величину ряда значений цены газа разделить на первое значение цены газа от 4 января 2010 года.

Тогда будут получены безразмерные величины, сопоставимые друг с другом и по масштабу.

Таблица 1.4.
Критические точки распределения $s_{\alpha, n}$

Число степе- ней сво- боды, n	уровень значимости, α			
	0,10	0,05	0,02	0,01
1	19,908	80,645	506,256	2028,846
2	2,842	6,163	16,194	32,802
3	1,381	2,528	5,153	8,526
4	0,907	1,546	2,812	4,233
5	0,673	1,100	1,536	2,707
6	0,538	0,857	1,409	1,966
7	0,477	0,696	1,125	1,531
8	0,384	0,593	0,935	1,254
9	0,335	0,511	0,795	1,056
10	0,298	0,452	0,692	0,914
11	0,270	0,403	0,617	0,806
12	0,244	0,366	0,552	0,716
13	0,224	0,333	0,502	0,647
14	0,207	0,305	0,458	0,592
15	0,191	0,284	0,423	0,544
16	0,180	0,264	0,392	0,502
17	0,168	0,247	0,367	0,467
18	0,158	0,232	0,342	0,437
19	0,150	0,218	0,323	0,409
20	0,143	0,208	0,305	0,387
21	0,134	0,197	0,289	0,364
22	0,129	0,186	0,274	0,346
23	0,122	0,177	0,260	0,329
24	0,117	0,170	0,248	0,314
25	0,112	0,163	0,238	0,299
26	0,108	0,157	0,228	0,286
27	0,104	0,150	0,218	0,274
28	0,100	0,145	0,209	0,263
29	0,096	0,140	0,202	0,254
30	0,095	0,138	0,199	0,250
40	0,094	0,136	0,195	0,243
60	0,093	0,133	0,190	0,236
120	0,092	0,131	0,186	0,229

Для полученного ряда из более чем 900 наблюдений было найдено среднее арифметическое, которое равно

$$\bar{y}_r + i\bar{y}_i = 1,259 + i0,643 \quad (1.9.8)$$

Для этого же ряда были вычислены дисперсии и их СКО, которые равны: $\sigma_r = 0,00616$ и $\sigma_i = 0,00427$. Также был вычислен парный коэффициент корреляции между действительной и мнимой частями комплексной случайной величины, который оказался равным $r = -0,57001$. Это, кстати, в очередной раз повторяет нашу убежденность в том, что подобные экономические показатели, сведенные в одну комплексную переменную, ни в коем случае нельзя рассматривать как независимые друг от друга и дисперсию такой комплексной случайной величины надо рассматривать как комплексную величину.

Теперь можно подставить эти значения в условие (1.9.6) и определить область доверительных границ для величин этого ряда комплексной случайной величины:

$$26334,55(y_r - 1,259)^2 + 43293,6(y_r - 1,259)(y_i - 0,643) + 54765,12(y_i - 0,643)^2 \leq s_{\alpha,n}$$

Найдём ответ на такой вопрос: попадает ли с вероятностью в 0,95 число $(1,40 + i0,80)$ в область доверительных значений?

Для ответа на поставленный вопрос следует подставить в неравенство указанные значения комплексной случайной величины и вычислить значение левой части неравенства. Сделаем это. В результате вычислений было получено число $s = 2831,366$. Оно существенно выше критического, которое, как видно из табл. 1.4, для более чем 900 наблюдений и уровне значимости $\alpha=0,05$ равно $s_{\alpha,n}=0,131$. Следовательно, указанное число $(1,40 + i0,80)$ выходит за область доверительных значений.

Найдём теперь ответ на другой вопрос: а попадает ли число $(1,26 + i0,64)$ в область доверительных значений при той же вероятности 0,95?

Подставляя значения этого комплексного числа в (1.9.6) и вычисляя значение s (левую часть неравенства (1.9.6)), получим $s = 0,018$. Как видно, вычисленное значение левой части неравенства меньше критического и неравенство выполняется: $s < s_{\alpha,n} = 0,131$. Следовательно, рассматриваемое число $(1,26 + i0,64)$ находится внутри доверительной области.

Таким образом, предлагаемая процедура определения доверительных границ для комплексной случайной величины может быть использована для научных и практических исследований в области комплекснозначной эконометрики.

Её же можно использовать для оценки доверительных границ других выборочных комплексных переменных, например, комплексных коэффициентов регрессионных моделей. Вопрос оценки доверительных границ для комплексного коэффициента парной корреляции здесь рассматривать не будем, понимая, что рассмотренный в данном параграфе подход по оценке доверительных границ комплексной случайной величины является универсальным, и он может помочь и для оценки доверительных границ выборочных значений комплексного коэффициента парной корреляции.

Часть вторая. Комплекснозначные авторегрессии

В первой части монографии были сформированы и сведены воедино те положения математической статистики, которые относятся к комплексным случайным переменным. Особое разнообразие эти инструменты получают в случае, когда предположение о независимости друг от друга действительной и мнимой частей этой случайной переменной не выполняется. Тогда появляется возможность развития непротиворечивой инструментальной базы математической статистики комплексной случайной переменной.

Теперь, будучи вооружёнными этим мощным инструментом научного исследования, обратим внимание на использование этого аппарата для формирования одного частного раздела комплекснозначной экономики – на разработку и практическое использование комплекснозначных моделей авторегрессий, которые можно использовать для анализа изучаемых процессов и для краткосрочного экономического прогнозирования.

2.1. Авторегрессии в экономическом прогнозировании

Исторически логика формирования моделей авторегрессий была такова.

Перед исследователями стояли две отличающиеся друг от друга задачи экономического прогнозирования:

- 1) прогнозирование на перспективу показателя как продолжение некоторой тенденции во времени или как некоторой факторной зависимости;
- 2) прогнозирование показателя, который не имеет тенденцию к росту, а колеблется под воздействием случайных факторов в некотором диапазоне.

Эти две задачи отличались разными методами и разными временными периодами прогнозирования. Первая задача решалась с помощью регрессионно–корреляционного анализа и позволяла выполнять средне– и долгосрочные экономические прогнозы. Вторая задача решалась с помощью расчётов разных вариантов средней величины показателя и позволяла выполнять краткосрочные экономические прогнозы. И сегодня эти две задачи

представляют собой два самостоятельных направления в экономическом прогнозировании.

По сути, задача средне– и долгосрочного экономического прогнозирования заключается в выявлении, описании и прогнозировании тенденций и взаимосвязей. Задачей краткосрочного прогнозирования является прогнозирование отклонений от этой общей тенденции или взаимосвязей.

Объектом нашего научного исследования выступает именно второе направление – краткосрочное прогнозирование.

Поскольку изначально изучаемые и прогнозируемые в этом случае процессы не имели тенденций к росту или снижению, их стали называть «стационарными». Доминирующую точку зрения на то, как сегодня понимают «стационарный процесс», наиболее ярко отражает такое определение: «На практике часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причём ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются стационарными» [1, с. 479]. Чаще всего такие процессы имеют нормальное распределение вероятностей. А поскольку колебания в стационарном процессе происходят относительно «некоторого среднего значения», то естественной моделью краткосрочного прогнозирования является это самое среднее значение.

Самой простой является средняя арифметическая последних p наблюдений:

$$\bar{y} = \frac{1}{p} \sum_{\tau=0}^{p-1} y_{t-\tau} . \quad (2.1.1)$$

Здесь y_t – значения ряда, изменяющегося во времени t . Эти будущие значения ряда и являются объектом прогнозирования. Логично считать, что следующее наблюдаемое значение рассматриваемого ряда y_{t+1} будет близко к этой средней арифметической, то есть средняя арифметическая выступает прогнозом на следующий шаг наблюдения:

$$\hat{y}_{t+1} = \bar{y} . \quad (2.1.2)$$

Основная проблема, с которой столкнулись прогнозисты при использовании средней арифметической как модели прогнозирования, заключалась в выборе периода усреднения p . Особенно это оказалось важным для малых выборок. При выборе разных периодов усреднения получаются разные средние арифметические, которые по-разному прогнозировали ряды. Поэтому для разных рядов исследователи опытным путём выбирали разные периоды усреднения p . А выбрав этот период усреднения и получив новые значения, пересчитывали среднюю (2.1.1) с учётом новых значений, но сохраняя неизменным период усреднения p . Поскольку такая средняя «перемещалась» по ряду, её стали называть «скользящей средней».

Следующим этапом развития моделей краткосрочного прогнозирования стало понимание того, что лучше средней арифметической может быть средняя взвешенная:

$$\hat{y}_{t+1} = \sum_{\tau=0}^{p-1} b_{\tau} y_{t-\tau}, \quad \sum_{\tau=0}^{p-1} b_{\tau} = 1 \quad (2.1.3)$$

Здесь веса b_t отражают разный вклад наблюдений на прогнозируемое значение показателя. Важное требование – равенство единице суммы этих весов. Только тогда можно говорить о средней. Если это правило будет нарушено, то сумма не будет являться средней. Поскольку это – взвешенная скользящая средняя, её обозначают $MA(p)$.

Веса b_{τ} можно задавать самыми разными способами. Учёные использовали для этого самые разные процедуры, в том числе и взвешивание вперёд, назад и в середину отрезка усреднения. Меняя эти центры усреднения, можно получать разные варианты описания ряда и менять точность его прогнозирования. Для сглаживания графика и устранения влияния сильных случайных отклонений на общее представление о ряде можно использовать усреднение по центру выборки. А для экономического прогнозирования более точными оказались модели, у которых веса уменьшались с убыванием показателей в прошлое, то есть тогда, когда помимо (2.1.3) выполнялось ещё и такое условие:

$$b_0 > b_1 > \dots > b_{p-1} \quad (2.1.4)$$

В экономическом краткосрочном прогнозировании с успехом стали использоваться модели скользящей взвешенной средней. Но в этом случае

была одна проблема, которая вставала перед прогнозистом каждый раз, когда он сталкивался с необходимостью прогнозирования нового ряда – как подобрать веса в скользящей средней (2.1.3) так, чтобы получить наилучший по точности прогноз? Ведь задавать веса можно как угодно! Учёным важен был такой способ задания весов, чтобы он стал универсальным. Таким способом стал метод расчёта весов наблюдений как членов ряда бесконечной геометрической прогрессии [14, 23]:

$$b_t = \alpha(1 - \alpha)^t \quad (2.1.5)$$

Здесь не надо задумываться о том, какие значения принимает каждый вес – они рассчитываются по этой формуле. Поэтому достаточно только задать величину α и все веса b_t легко рассчитываются.

Важно так задать постоянную сглаживания α , чтобы сумма членов ряда (2.1.4), вычисляемых с помощью (2.1.5), была равна единице. Для бесконечной геометрической прогрессии это означает, что должно выполняться условие:

$$|1 - \alpha| < 1 \quad (2.1.6)$$

Отсюда понятны границы, в которых должны лежать значения постоянной сглаживания [3]:

$$0 < \alpha < 2 \quad (2.1.7)$$

Если подставить в (2.1.3) веса b_t , которые вычисляются с помощью правила (2.1.5) при выполнении условия (2.1.7), и предположить, что ряд наблюдений является бесконечным, то средняя примет такой вид:

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_t \quad (2.1.8)$$

Эта модель прогнозирования, получившая название экспоненциального сглаживания, оказалась удобной для вычислений в силу своей простоты и в силу того, что, меняя значения постоянной сглаживания в диапазоне (2.1.7), можно найти такое значение α , при котором модель будет давать наименьшую ошибку в краткосрочном экономическом прогнозировании.

Исторически сложилось так, что прогнозисты вместо диапазона значений (2.1.7) стали использовать его усечённый диапазон:

$$0 < \alpha \leq 1. \quad (2.1.9)$$

Им было не понятно – какой смысл модель приобретает за этими пределами. А вот если модель работает в пределах (2.1.9), то её смысл понятен – модель в разной степени адаптивна к текущей информации, а постоянная сглаживания α характеризует степень этой адаптации – при $\alpha = 0$ модель абсолютно не адаптивна к текущей информации, а при $\alpha = 1$ – она полностью учитывает текущую информацию, игнорируя прошлую информацию.

Довольно часто, находя оптимальное значение постоянной сглаживания α , учёные и практикующие экономисты убеждались в том, что это оптимальное значение равно единице. Это означает, что

$$\hat{y}_{t+1} = 1y_t + (1-1)\hat{y}_t = y_t. \quad (2.1.10)$$

То есть – лучшим прогнозным значением оказывалось текущее значение показателя. Такую ситуацию прогнозисты стали называть моделью *NAÏVE*. На самом деле ситуации, когда оптимальное значение постоянной сглаживания равна единице ($\alpha = 1$) почти не встречаются. Просто в таких случаях постоянная сглаживания выходит за пределы (2.1.9) и её оптимальное значение лежит в диапазоне

$$1 < \alpha < 2. \quad (2.1.11)$$

В этом диапазоне модель экспоненциального сглаживания приобретает особые свойства. Для того чтобы их понять, представим при условиях (2.1.9) модель (2.1.8) в таком виде:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t) = \hat{y}_t + \alpha\varepsilon_t. \quad (2.1.12)$$

Из этой формы представления модели видно, что она работает так: прогнозное значение вычисляется как предыдущее расчётное значение показателя, откорректированное с учётом текущей ошибки ε_t . Степень этой коррекции определяется величиной постоянной сглаживания α . Если она равна единице, получается модель *NAÏVE*.

В запредельном множестве постоянной сглаживания (2.1.11), когда постоянная сглаживания больше единицы, модель ведёт себя иначе:

$$\hat{y}_{t+1} = y_t + (\alpha - 1)(y_t - \hat{y}_t) = y_t + \alpha\varepsilon_t. \quad (2.1.13)$$

То есть – не расчётное, а фактическое значение прогнозируемого показателя корректируется на текущую ошибку прогноза ε_t . Модель приобретает свойство самообучаемости.

Успех модели экспоненциального сглаживания в краткосрочном экономическом прогнозировании несколько затуманивался тем обстоятельством, что сумма весов (2.1.5) будет равна единице только в том случае, когда число наблюдений n , значит, число весовых коэффициентов равно бесконечности. То есть, строго говоря, модель (2.1.8) не является средней на малых и средних выборках. Но при большом числе наблюдений сумма ряда (2.1.5) отличается от единицы на столь малые значения, что этим недостатком можно пренебречь.

То обстоятельство, что стационарный ряд можно успешно прогнозировать с помощью модели, у которой сумма весовых коэффициентов не равна единице и эта модель не является какой-то формой средней, было известно довольно давно. Ещё в 1907 году А. А. Марков положил начало формированию обширного класса стохастических процессов с дискретной временной компонентой, которые в последующем были названы его именем. Марковские процессы описывают следующее вероятностное состояние процесса в зависимости от текущего состояния. Это были первые модели авторегрессии, которые получили с тех пор существенное развитие. Для того чтобы избежать сложностей с индексами, вычисляемое и прогнозируемое значение показателя относят к текущему времени t и записывают так:

$$\hat{y}_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} + \dots + a_p y_{t-p} = \sum_{\tau=1}^p a_\tau y_{t-\tau} \quad (2.1.14)$$

Такую модель принято обозначать как $AR(p)$, где p – порядок авторегрессии.

Легко заметить, что в том случае, когда $p \rightarrow \infty$, а коэффициенты a_τ принимают значения членов ряда геометрической прогрессии (2.1.5), модель $AR(p)$ превращается в модель экспоненциального сглаживания. Следовательно, авторегрессионная модель (2.1.14) является общей моделью краткосрочного прогнозирования, частными случаями которой являются и модель экспоненциального сглаживания, и модель *NAÏVE*.

Фактические значения прогнозируемого показателя отличаются от расчётных значений на некоторую ошибку:

$$y_t - \hat{y}_t = \varepsilon_t \quad (2.1.15)$$

Из этого следует, что эта ошибка, в свою очередь, может рассматриваться как некоторый временной ряд, не имеющий тенденцию к росту или к снижению своих показателей, но имеющий отношение к прогнозируемому показателю. Следовательно, ряд значений y_t может быть спрогнозирован, например, с помощью скользящей средней этой ошибки:

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^q v_{\tau} \varepsilon_{t-\tau}, \quad \sum_{\tau=1}^q b_{\tau} = 1 \quad (2.1.16)$$

Порядок усреднения q этой скользящей средней не обязательно должен совпадать с порядком авторегрессии p , поскольку ошибки аппроксимации ведут себя иначе, чем моделируемый ряд. Такая модель скользящей средней ошибки аппроксимации стала называться $MA(q)$. Если снять ограничения на равенство единице суммы коэффициентов в модели $MA(q)$, то скользящая средняя перестанет быть средней, а станет авторегрессией. А авторегрессия является более общей и более точной моделью прогнозирования, нежели модель скользящей средней. Сегодня используют не скользящую взвешенную среднюю (2.1.16), а именно авторегрессию ошибки, когда сумма коэффициентов b_{τ} не равна единице. Но до сих пор авторегрессию, в которой факторами выступают ошибки ε_t , продолжают называть моделью $MA(q)$.

Модель $MA(q)$ будет давать другие прогнозные значения показателя y_t , нежели модель (2.1.14). Для того чтобы использовать преимущества каждой модели – $AR(p)$ и $MA(q)$ – их объединили в одну модель $ARMA(p, q)$:

$$\hat{y}_t + \hat{\varepsilon}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{\tau} y_{t-\tau} + \sum_{\tau=1}^q b_{\tau} \varepsilon_{t-\tau} \quad (2.1.17)$$

Исследованию свойств этих моделей посвящено множество учебной и научной литературы. Для нас важно то, что в этой литературе показывается взаимосвязь между коэффициентами a_{τ} и b_{τ} также, как и взаимозависимость порядка p от порядка q . С помощью этого свойства была разработана процедура выявления лагов и оценки коэффициентов модели (2.1.17) [13], которые называют методологией Бокса–Дженкинса.

Основная сложность практического применения модели $ARMA(p, q)$ заключается в том, чтобы определить порядок авторегрессии p и порядок q . В простых случаях полезными могут быть исследования автокорреляционных и частных автокорреляционных функций. Но в тех случаях, когда порядки p и q в исходном ряде больше 3, такие исследования оказываются малоэффективными.

Сегодня имеется несколько общепринятых методов построения моделей (2.1.17), которые можно разделить на две группы:

1) одновременная оценка коэффициентов a_t и b_t модели (2.1.17), когда, постепенно увеличивая порядки модели p и q и вычисляя один из информационных критериев, выбирается лучшая модель по этому критерию;

2) оценивается лаг модели $AR(p)$ и вычисляются коэффициенты a_t , после чего вычисляются ошибки ε_t и на их основе строится модель $MA(q)$. Затем на основе модели $MA(q)$ уточняются коэффициенты модели $AR(p)$. Поскольку не всегда полученная на втором шаге модель $AR(p)$ будет соответствовать первоначальной модели, осуществляется многоитеративная процедура «отладки» модели – это и есть реализация на практике методологии Бокса–Дженкинса.

На практике не каждый экономический процесс может быть отнесён к стационарному. Поэтому модель $ARMA(p, q)$ не всегда может быть использована непосредственно для экономического прогнозирования. В таких нестационарных случаях исследователи преобразуют исходный ряд значений так, чтобы полученный ряд не возрастал и не убывал. Чаще всего этого добиваются с помощью исчисления конечных разностей исходного ряда. Номер этой конечной разности обозначают как d , и он включается в наименование модели, которая с учётом таких преобразований называется $ARIMA(p, d, q)$.

Базовая модель $ARIMA(p, d, q)$ сегодня является основанием для дальнейшего развития моделей краткосрочного прогнозирования, которые используются для решения различных частных задач. К модели прибавляют экзогенные переменные и обозначают эту модель как $ARIMAX(p, d, q, b)$, делают авторегрессию нелинейной и обозначают их как $NARMA(p, q)$,

включают в модель фактор сезонности, и такую модель называют $SARMA(p,q)$ и т.п.

2.2. Векторные авторегрессии

Ни один экономический показатель не развивается автономно. На его динамику оказывает влияние множество различных факторов. Встречаются в экономике и случаи, когда некоторые показатели изменяются, воздействуя друг с другом. Такая совместная взаимообусловленная динамика некоторое время описывалась системой одновременных уравнений, а в последующем её стали вытеснять векторные регрессии.

В том случае, когда вектор показателей в момент времени t определяется значениями этого же вектора в предыдущие моменты времени, уместно говорить о том, что такие процессы описываются векторными авторегрессиями.

Векторная авторегрессия порядка p , обозначаемая как $VAR(p)$, может быть представлена в таком виде [28, p.13]:

$$\hat{Y}_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} \quad (2.3.1)$$

Здесь Y_t – k -мерный вектор переменных;

A_0 – k -мерный вектор коэффициентов;

A_t – $k \times k$ -мерные постоянные вещественные матрицы.

В двумерном случае $VAR(1)$ примет вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} \quad (2.3.2)$$

$VAR(1)$ в трёхмерном случае будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

$VAR(1)$ для четырёхмерного случая будет такой:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \\ \hat{y}_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \\ y_{3t-1} \\ y_{4t-1} \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Легко заметить, что количество коэффициентов, которые необходимо оценить для векторной авторегрессии первого порядка, равно k^2 , где k – размер используемого вектора. И вообще, количество коэффициентов, которые необходимо оценить для $VAR(p)$, будет равно $(k^2 \cdot p)$. Например, для $VAR(3)$ при $k=5$ необходимо оценить $(5^2 \cdot 3=75)$ неизвестных коэффициентов. То есть, необходимо решить систему 75 линейных уравнений с 75 неизвестными. Очевидно, что решение подобных задач в экономической практике сегодня является экзотикой.

Если сравнить друг с другом модель одномерной авторегрессии и модель векторной авторегрессии, то можно заметить, что сложность моделей авторегрессии $AR(p)$ определяется порядком лага p , а сложность векторной авторегрессии определяется в первую очередь размером вектора k , а уж затем – его лагом p . Теория векторных авторегрессий в целом разработана, но эти авторегрессии не нашли широкого применения на практике, поскольку необходимо оценивать большое количество коэффициентов и в публикациях, посвящённых построению $VAR(p)$ на практике, редко когда встречаются векторы размерностью выше четырёх и лагом больше двух. Поэтому на размерность вектора в обозначениях модели нигде не указывается, а именно размерность вектора, как видно из предыдущих рассуждений, оказывает решающее влияние на сложность модели. Поэтому, используя ту или иную модель векторной авторегрессии, необходимо в обязательном порядке указывать размерность её вектора. Исходя из этих соображений, в дальнейшем мы, обращаясь к векторным авторегрессиям, будем указывать в обозначении модели размерность вектора символом k . Следовательно, аббревиатурой $VAR(k, p)$ мы будем обозначать авторегрессию порядка p k -мерного вектора, сразу же представляя, что для практического пользования этой моделью необходимо будет оценить $(k^2 \cdot p)$ коэффициентов.

2.3. Комплекснозначная авторегрессия как конкурент модели $VAR^k(p)$

При моделировании многих экономических процессов использование моделей и методов теории функций комплексного переменного оказывается не хуже, а в некоторых случаях, лучше моделей действительных переменных. Так, например, при моделировании производственных процессов производственные функции комплексных переменных более подробно описывают эти процессы и демонстрируют в ряде случаев большую точность в прогнозировании, чем производственные функции действительных переменных [9].

Это породило желание проверить возможность использования комплекснозначной экономики применительно к задачам экономического прогнозирования, в частности применительно к задачам краткосрочного экономического прогнозирования с помощью моделей авторегрессии.

В общем случае модель комплексной авторегрессии может быть записана так:

$$y_{1t} + iy_{2t} = \sum_{\tau=1}^p F(y_{1(t-\tau)} + iy_{2(t-\tau)}) + (\varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}) \quad (2.3.1)$$

Здесь y_{1t} и y_{2t} – прогнозируемые на момент времени t действительные переменные; i – мнимая единица, $i = \sqrt{-1}$; F – некоторая комплекснозначная функция; τ – лаг авторегрессии; p – порядок авторегрессии; ε_{1t} и ε_{2t} – ошибки аппроксимации первой и второй переменных в момент времени t .

В зависимости от вида комплекснозначной функции F комплексные авторегрессии (2.3.1) могут быть линейными и нелинейными. Нелинейные авторегрессионные модели действительных переменных не часто встречаются как в практическом применении, так и в теоретических исследованиях. Поэтому и в нашем исследовании мы сконцентрируем наше внимание на линейных авторегрессиях и в дальнейшем будем понимать под комплексными авторегрессиями (*complex autoregression*) линейные формы модели (2.3.1) и будем обозначать эти модели как $CAR(p)$.

Таким образом, рассматриваемые комплекснозначные авторегрессионные модели $CAR(p)$ в общем виде будут представлены в такой форме:

$$y_{1t} + iy_{2t} = (b_0 + ib_1) + \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{1(t-\tau)} + iy_{2(t-\tau)}) + (\varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}) \quad (2.3.2)$$

где b_0 и b_1 – коэффициенты (свободные члены), отражающие начальное значение комплексного ряда; $a_{0\tau}$ и $a_{0\tau}$ – коэффициенты пропорциональности.

Обычно при представлении моделей авторегрессии опускают свободные члены, поскольку от них можно избавиться, осуществив центрирование исходных переменных относительно их средних арифметических. Поэтому и мы в дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты b_0 и b_1 модели $CAR(p)$ равны нулю.

Тогда комплексная авторегрессия первого порядка $CAR(1)$ может быть представлена так:

$$\hat{y}_{1t} + i\hat{y}_{2t} = (a_{01} + ia_{11})(y_{1(t-1)} + iy_{2(t-1)})$$

или в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} & -a_{11} \\ a_{11} & a_{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix}. \quad (2.3.3)$$

Сравнивая (2.3.3) с (2.3.2), можно убедиться в том, что перед нами частный случай 2–мерной векторной авторегрессии $VAR^2(1)$. При этом для практического применения модели $VAR^2(1)$ необходимо оценить четыре неизвестных коэффициента, а для практического применения модели $CAR^2(1)$ – всего только два коэффициента. Это означает, что модель $VAR^2(1)$ с помощью двух дополнительных коэффициентов учтёт некоторые нюансы, и поэтому она точнее опишет исходный процесс, чем комплексная авторегрессия. Возможно, это приведёт и к большей прогнозной точности этой модели по сравнению с моделью $CAR(1)$. Но неоспоримым преимуществом модели $CAR(1)$ является то, что для её применения на практике необходимо оценить только два коэффициента, а не четыре.

Может ли $CAR(p)$ применяться в случае, когда используются k –мерные векторы порядка больше трёх? Такая возможность имеется. Например, для $k=3$ и $p=1$ следует использовать такую модель $CAR^3(1)$:

$$\begin{cases} \hat{y}_{1t} + i\hat{y}_{2t} = (a_{11} + ia_{12})(y_{1t-1} + iy_{2t-1}) + (b_{11} + ib_{12})y_{3t-1}; \\ \hat{y}_{3t} = a_{31}y_{1t-1} + a_{32}y_{2t-1} + a_{33}y_{3t-1}. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Или в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & b_{11} \\ a_{12} & a_{11} & b_{12} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

В данном случае необходимо оценить семь неизвестных коэффициентов, а в 3-мерной модели $VAR^3(1)$ (2.3.3) необходимо оценить девять неизвестных коэффициентов. Экономия усилий по оценке коэффициентов очевидна.

Эта экономия ещё более очевидна, если сравнить 4-х мерный вектор $VAR^4(1)$ (2.3.4) и модель $CAR^4(1)$. В классической векторной авторегрессии $VAR^4(1)$ необходимо оценить 16 неизвестных коэффициентов. А модель $CAR^4(1)$ будет записана так:

$$\begin{pmatrix} y_{1t} + iy_{2t} \\ y_{3t} + iy_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + ia_{12} & b_{11} + ib_{12} \\ a_{21} + ia_{22} & b_{21} + ib_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} + iy_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} + iy_{4,t-1} \end{pmatrix} \quad (2.3.6)$$

Откуда видно, что для использования на практике этой модели, необходимо оценить 8 коэффициентов, а не 16 коэффициентов. Это в два раза меньше, чем у модели $VAR^4(1)$. Если привести модель $CAR^k(p)$ к векторной форме и сравнивать её с моделью векторной авторегрессии, то можно определить количество коэффициентов моделей $VAR^k(1)$ и $CAR^k(1)$ разной размерности k и понять их различие. В табл. 2.1 это сделано.

В таблице показаны коэффициенты двух моделей для векторов размерностью до $k=7$. Продолжать эту таблицу не имеет смысла, поскольку закономерность уже очевидна – для построения модели комплексной векторной авторегрессии всегда необходимо оценивать меньшее количество коэффициентов, чем для классической модели векторной авторегрессии. И уже понятно, что, например, при $k=8$, для использования модели $VAR^8(1)$ потребуется оценить 64 неизвестных коэффициента, а для модели $CAR^8(1)$ – всего 32 неизвестных коэффициента. Для векторных авторегрессий с чётной размерностью вектора для построения комплексной авторегрессии необходимо оценить в два раза меньше коэффициентов, чем для классической векторной авторегрессии.

Таблица 2.1.
Коэффициенты моделей $VAR^k(1)$ и $CAR^k(1)$ для разных размерностей вектора k

k	$VAR^k(p)$	$CAR^k(p)$	Количество ко- эффициентов	
			$VAR^k(p)$)	$CAR^k(p)$)
2	$a_{11} \ a_{12}$ $a_{21} \ a_{22}$	$a_{11} \ -a_{12}$ $a_{12} \ a_{11}$	4	2
3	$a_{11} \ a_{12} \ a_{13}$ $a_{21} \ a_{22} \ a_{23}$ $a_{31} \ a_{32} \ a_{33}$	$a_{11} \ -a_{12} \ a_{13}$ $a_{12} \ a_{11} \ a_{22}$ $a_{31} \ a_{32} \ a_{33}$	9	7
4	$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14}$ $a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24}$ $a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34}$ $a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ a_{44}$	$a_{11} \ -a_{12} \ a_{13} \ -a_{14}$ $a_{12} \ a_{11} \ a_{14} \ a_{13}$ $a_{31} \ -a_{32} \ a_{33} \ -a_{34}$ $a_{32} \ a_{31} \ a_{34} \ a_{33}$	16	8
5	$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15}$ $a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ a_{25}$ $a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34} \ a_{35}$ $a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ a_{44} \ a_{45}$ $a_{51} \ a_{52} \ a_{53} \ a_{54} \ a_{55}$	$a_{11} \ -a_{12} \ a_{13} \ -a_{14} \ a_{15}$ $a_{12} \ a_{11} \ a_{14} \ a_{13} \ a_{25}$ $a_{31} \ -a_{32} \ a_{33} \ -a_{34} \ a_{35}$ $a_{32} \ a_{31} \ a_{34} \ a_{33} \ a_{45}$ $a_{51} \ a_{52} \ a_{53} \ a_{54} \ a_{55}$	25	17
6	$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16}$ $a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ a_{25} \ a_{26}$ $a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34} \ a_{35} \ a_{36}$ $a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ a_{44} \ a_{45} \ a_{46}$ $a_{51} \ a_{52} \ a_{53} \ a_{54} \ a_{55} \ a_{56}$ $a_{61} \ a_{62} \ a_{63} \ a_{64} \ a_{65} \ a_{66}$	$a_{11} \ -a_{12} \ a_{13} \ -a_{14} \ a_{15} \ -a_{16}$ $a_{12} \ a_{11} \ a_{14} \ a_{13} \ a_{16} \ a_{15}$ $a_{31} \ -a_{32} \ a_{33} \ -a_{34} \ a_{35} \ -a_{36}$ $a_{32} \ a_{31} \ a_{34} \ a_{33} \ a_{36} \ a_{35}$ $a_{51} \ -a_{52} \ a_{53} \ -a_{54} \ a_{55} \ -a_{56}$ $a_{52} \ a_{51} \ a_{54} \ a_{53} \ a_{56} \ a_{55}$	36	18
7	$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16} \ a_{17}$ $a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ a_{25} \ a_{26} \ a_{27}$ $a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34} \ a_{35} \ a_{36} \ a_{37}$ $a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ a_{44} \ a_{45} \ a_{46} \ a_{47}$ $a_{51} \ a_{52} \ a_{53} \ a_{54} \ a_{55} \ a_{56} \ a_{57}$ $a_{61} \ a_{62} \ a_{63} \ a_{64} \ a_{65} \ a_{66} \ a_{67}$ $a_{71} \ a_{72} \ a_{73} \ a_{74} \ a_{75} \ a_{76} \ a_{77}$	$a_{11} \ -a_{12} \ a_{13} \ -a_{14} \ a_{15} \ -a_{16} \ a_{17}$ $a_{12} \ a_{11} \ a_{14} \ a_{13} \ a_{16} \ a_{15} \ a_{27}$ $a_{31} \ -a_{32} \ a_{33} \ -a_{34} \ a_{35} \ -a_{36} \ a_{37}$ $a_{32} \ a_{31} \ a_{34} \ a_{33} \ a_{36} \ a_{35} \ a_{47}$ $a_{51} \ -a_{52} \ a_{53} \ -a_{54} \ a_{55} \ -a_{56} \ a_{57}$ $a_{52} \ a_{51} \ a_{54} \ a_{53} \ a_{56} \ a_{55} \ a_{67}$ $a_{71} \ a_{72} \ a_{73} \ a_{74} \ a_{75} \ a_{76} \ a_{77}$	49	31

Поскольку для выбора сложных моделей используются информационные критерии, это обстоятельство может стать решающим при выборе модели, так как в этих критериях число коэффициентов модели существенно влияет на величину критерия.

Поэтому из табл. 2.1 можно сделать вывод о том, что две рассматриваемые модели – $VAR^k(p)$ и $CAR^k(p)$ – могут реально конкурировать друг с другом только в случае использования двух– или трёхмерных векторных авторегрессий. В этих случаях увеличение числа коэффициентов модели $VAR^k(p)$ будет компенсировано уменьшением дисперсии ошибки аппроксимации или ошибки прогнозирования и информационный критерий может сделать выбор в пользу модели $VAR^k(p)$. Но во всех остальных случаях следует ожидать, что выбор падёт на модель $CAR^k(p)$.

Продемонстрируем это утверждение на конкретном примере.

В нашем распоряжении есть 118 данных о курсах валют на Московской межбанковской валютной бирже с 20.09.2018 по 16.03.2019. Этот промежуток времени выбран преднамеренно, поскольку в этот период поведение валют вполне можно отнести к стационарному процессу. Будем использовать следующие курсы валют в российских рублях:

- 1) доллар США, y_{1t} ;
- 2) евро, y_{2t} ;
- 3) фунт стерлингов, y_{3t} ;
- 4) швейцарский франк, y_{4t} .

Последовательно будем строить модели $VAR^2(1)$ и $CAR^2(1)$ для первых двух переменных (y_{1t} , y_{2t}), $VAR^3(1)$ и $CAR^3(1)$ для первых трёх переменных (y_{1t} , y_{2t} , y_{3t}) и $VAR^4(1)$ и $CAR^4(1)$ для четырёхмерного вектора (y_{1t} , y_{2t} , y_{3t} , y_{4t}).

Начнём с простого двумерного случая. Оценивая коэффициенты моделей $VAR^2(1)$ и $CAR^2(1)$ на этих данных с помощью метода наименьших квадратов, можно получить модели, которые, как и ожидалось, по–разному описывают исходные данные. Результаты аппроксимации этими моделями имеющихся данных сведены в табл. 2.2.

В этой таблице и во всех последующих таблицах этого параграфа индексами i и j обозначены номера валют в таком порядке: 1 – доллар США, 2 – евро, 3 – фунт стерлингов, 4 – швейцарский франк. Поэтому, например,

на пересечении строки, обозначенной цифрой 1, и столбца, обозначенного цифрой 2, приведено значение коэффициента $a_{12} = 0,026$ двумерной векторной авторегрессии. Этот коэффициент показывает влияние курса евро в предшествующий момент времени на курс доллара в настоящий момент.

В последнем столбце таблицы приведены дисперсии ошибки аппроксимации по каждой модели в целом и по каждому из видов валют в отдельности. Так, ошибка аппроксимации модели $VAR^2(1)$ составила 0,3695 – это показано в первой строке таблицы, а ошибка аппроксимации этой моделью курса доллара оказалась равной 0,1661.

В первой части таблицы приведены данные по модели $VAR^2(1)$, а во второй части – по модели $CAR^2(1)$.

Таблица 2.2.
Сравнительные результаты моделирования курса валют моделями $VAR^2(1)$ и $CAR^2(1)$

$j \backslash i$	Коэффициенты		σ^2
	1	2	
Модель $VAR^2(1)$			0,3695
1	0,9968	0,0026	0,1661
2	0,1409	0,8761	0,2034
Модель $CAR^2(1)$			0,3774
1	0,9996	- 0,0001	0,1660
2	0,0001	0,9996	0,2114

Простое сравнение результатов показывает что, как и предполагалось, модель $VAR^2(1)$ оказалась в целом точнее модели $CAR^2(1)$, но не очень значительно: общая дисперсия векторной авторегрессии составила 0,3695, в то время как общая дисперсия комплексной авторегрессии оказалась выше – 0,3774, что только на 2,15 % хуже.

Дисперсия ошибки аппроксимации курса доллара с помощью модели $VAR^2(1)$ практически равна дисперсии ошибки аппроксимации курса доллара с помощью $CAR^2(1)$. Отличие между ними составило всего одну

десятитысячную: 0,1661–0,1660. И модель комплексной авторегрессии оказалась точнее.

Курс евро модель $VAR^2(1)$ описала точнее: дисперсия ошибки аппроксимации равна 0,2034, в то время как для модели $CAR^2(1)$ дисперсия ошибки аппроксимации курса евро оказалась равной 0,2114, что на 5 % больше.

Поскольку для выбора наилучшей модели используют информационные критерии как компромисс между желанием выбрать самую точную в аппроксимации модель, и при этом выбрать модель попроще, были рассчитаны байесовские информационные критерии:

$$BIC = \ln \sigma^2 + \frac{k}{N} \ln(N) \quad (2.3.7)$$

Здесь N – число наблюдений.

Рассчитанные значения критериев отличаются друг от друга: $BIC_{VAR^2(1)} = -0,834$, а $BIC_{CAR^2(1)} = -0,894$.

Информационные критерии оказались отрицательными, поскольку дисперсии ошибок аппроксимации меньше единицы и логарифмы этих дисперсий становятся отрицательными: для первой модели этот логарифм равен (-0,9957), а для второй модели – (-0,9744). Поскольку в модели $VAR^2(1)$ используется четыре коэффициента, а в модели $CAR^2(1)$ используется два коэффициента, то информационный критерий у комплексной авторегрессии оказался меньше, и ей следует отдать предпочтение, поскольку увеличение точности модели с одновременным её усложнением оказалось не столь значительным, чтобы пожертвовать простотой модели.

Ещё более значимыми для комплексной авторегрессии оказались результаты для трёхмерного вектора, $k=3$. Они приведены в табл. 2.3.

Для трёхмерного случая две первые переменные y_{1t} и y_{2t} лучше описывает модель $VAR^3(1)$, а третья переменная описывается одинаково хорошо как моделью $VAR^3(1)$, так и моделью $CAR^3(1)$. И в целом дисперсия векторной авторегрессии 0,7456 меньше дисперсии комплекснозначной авторегрессии 0,7545. Эта разница в точности аппроксимации составляет 1,2%.

Но для $VAR^3(1)$ информационный критерий оказался равен $BIC=0,0703$, а для $CAR^3(1)$ он составил значительно меньшую величину, а

именно – $BIC=0,0014$. То есть по информационному критерию модель $CAR^3(1)$ более предпочтительна, чем модель $VAR^3(1)$, и исследователь не задумываясь выберет именно модель комплексной векторной авторегрессии.

Таблица 2.3
Сравнительные результаты моделирования курса валют моделями $VAR^3(1)$ и $CAR^3(1)$

j \ i	Коэффициенты			σ^2
	1	2	3	
Модель $VAR^3(1)$				0,7456
1	1,0331	-0,0091	-0,0177	0,1654
2	0,1521	0,8968	-0,0269	0,2023
3	0,2111	-0,1065	0,9307	0,3779
Модель $CAR^3(1)$				0,7545
1	1,0149	0,0083	-0,0044	0,1657
2	-0,0083	1,0149	-0,0199	0,2110
3	0,2098	-0,1020	0,9277	0,3779

В четырёхмерной векторной авторегрессии $VAR^4(1)$ оценки требуют 16 неизвестных коэффициентов, а в комплекснозначной авторегрессии $CAR^4(1)$ – только 8 неизвестных коэффициентов. Необходимые расчёты были выполнены, и коэффициенты этих двух моделей были найдены. Значения этих коэффициентов и дисперсии ошибок аппроксимации этими двумя моделями исходных рядов приведены в табл. 2.4.

И вновь можно убедиться в том, что если использовать критерий минимума дисперсии ошибки аппроксимации для выбора наилучшей прогнозной модели, то модель $VAR^4(1)$ по всем позициям чуть-чуть точнее модели $CAR^4(1)$. И в целом дисперсия ошибки аппроксимации модели $VAR^4(1)$ меньше ошибки аппроксимации модели $CAR^4(1)$ на 5,3%, что представляется существенным. Но информационный критерий у векторной авторегрессии составляет $BIC=0,5440$, а у комплекснозначной авторегрессии в

два раза меньше – $BIC=0,2718$. Так что если использовать для выбора лучшей модели информационный критерий, то он однозначно укажет на то, что усложнение модели с одновременным увеличением количества оцениваемых коэффициентов не имеет смысла. Следует использовать комплекснозначную авторегрессию, которая описывает вектор изменяющихся переменных чуть хуже, но она значительно проще, и поэтому от неё следует ждать большей устойчивости в результатах краткосрочного прогнозирования и большей точности.

Таблица 2.4.
Сравнительные результаты моделирования курса валют моделями $VAR^4(1)$ и $CAR^4(1)$

i \ j	Коэффициенты				σ^2
	1	2	3	4	
Модель $VAR^4(1)$					0,9023
1	1,0717	0,2750	-0,0627	-0,3030	0,1574
2	0,1701	0,9501	-0,0365	-0,0660	0,2010
3	0,2531	0,1768	0,8820	-0,3007	0,3713
4	0,1990	0,2474	-0,0842	0,6291	0,1727
Модель $CAR^4(1)$					0,9497
1	1,0114	0,0254	-0,0063	-0,0253	0,1669
2	-0,0254	1,0114	0,0253	-0,0063	0,2092
3	0,1009	0,0302	0,9132	-0,0453	0,3869
4	-0,0302	0,1009	0,0453	0,9132	0,1866

Интересные результаты получил Евгений Гольцев, который по моей просьбе построил две векторные авторегрессии первого порядка размерностью $k=8$, а именно – $VAR^8(1)$ и $CAR^8(1)$ на примере индексов экономической конъюнктуры Московской биржи. На ней выделяют 8 отраслевых индексов¹:

¹ <https://www.moex.com/>.

- 1) потребительский сектор, y_{1t} ;
- 2) химия и нефтехимия, y_{2t} ;
- 3) финансы, y_{3t} ;
- 4) электроэнергетика, y_{4t} ;
- 5) металлы и добыча, y_{5t} ;
- 6) нефть и газ, y_{6t} ;
- 7) телекоммуникации, y_{7t} ;
- 8) транспорт, y_{8t} .

По рядам изменений этих индексов с 01.05.2016 по 20.09.2020 были оценены коэффициенты этих двух моделей $VAR^8(1)$ (64 неизвестных коэффициентов) и $CAR^8(1)$ (32 неизвестных коэффициента).

Модель $VAR^8(1)$ имеет такой вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \\ \hat{y}_{4t} \\ \hat{y}_{5t} \\ \hat{y}_{6t} \\ \hat{y}_{7t} \\ \hat{y}_{8t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,996 & 0,013 & 0,047 & -0,244 & -0,001 & 0,055 & 0,052 & -0,433 \\ 0,007 & 0,834 & -0,053 & 0,158 & 0,189 & 0,024 & -0,082 & -0,143 \\ 0,007 & -0,098 & 0,941 & 0,167 & 0,103 & 0,030 & -0,075 & -0,139 \\ 0,003 & 0,011 & 0,019 & 0,884 & 0,005 & 0,010 & 0,008 & -0,096 \\ -0,023 & -0,010 & 0,026 & -0,066 & 0,992 & 0,029 & -0,012 & -0,097 \\ 0,010 & -0,009 & 0,088 & -0,376 & 0,067 & 0,989 & 0,079 & -0,115 \\ 0,001 & 0,003 & -0,012 & 0,028 & 0,007 & 0,014 & 0,956 & -0,098 \\ 0,003 & -0,005 & 0,008 & 0,039 & 0,011 & 0,012 & -0,024 & 0,832 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} \\ y_{4,t-1} \\ y_{5,t-1} \\ y_{6,t-1} \\ y_{7,t-1} \\ y_{8,t-1} \end{pmatrix}. \quad (2.3.8)$$

Она описывает исходные данные со стандартной ошибкой $\sigma = 430,27$. Для неё информационный критерий равен $BIC = 13,65$.

Модель комплексной векторной авторегрессии $CAR^8(1)$ имеет другие коэффициенты:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \\ \hat{y}_{4t} \\ \hat{y}_{5t} \\ \hat{y}_{6t} \\ \hat{y}_{7t} \\ \hat{y}_{8t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,992 & 0,003 & -0,023 & -0,003 & 0,017 & -0,012 & -0,042 & 0,005 \\ -0,003 & 0,992 & 0,003 & -0,023 & 0,012 & 0,017 & -0,005 & -0,012 \\ 0,003 & 0,008 & 0,974 & -0,010 & 0,014 & -0,015 & -0,053 & 0,017 \\ -0,008 & 0,003 & 0,010 & 0,974 & 0,015 & 0,014 & -0,017 & -0,053 \\ -0,009 & 0,001 & 0,013 & 0,008 & 1,007 & -0,002 & -0,049 & -0,005 \\ -0,001 & -0,009 & -0,008 & 0,013 & 0,002 & 1,007 & 0,005 & -0,049 \\ -0,001 & -0,002 & -0,013 & 0,006 & 0,007 & -0,008 & 0,963 & 0,012 \\ 0,002 & -0,001 & -0,006 & -0,013 & 0,008 & 0,007 & -0,012 & 0,963 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} \\ y_{4,t-1} \\ y_{5,t-1} \\ y_{6,t-1} \\ y_{7,t-1} \\ y_{8,t-1} \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

И она несколько хуже описывает исходные данные. У неё стандартное отклонение равно $\sigma = 441,94$. Но за счёт того, что в последней модели

оцениваются в два раза меньшее количество коэффициентов, её информационный критерий меньше, чем у модели $VAR^8(1)$, и составляет $BIC = 12,94$.

Следовательно, для целей краткосрочного прогнозирования необходимо отдать предпочтение модели комплексной авторегрессии $CAR^8(1)$.

На базе данных с 27.09.2020 по 25.04.2021 Евгений Гольцев с помощью этих моделей выполнил ретропрогнозы на один шаг наблюдений и сравнил прогнозные значения с фактическими. Результаты этого сравнения приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5.
Результаты ретропрогноза индексов экономической конъюнктуры моделей (2.3.8) и (2.3.9)

№	Индекс отрасли	Стандартная ошибка ретропрогноза, σ		% повышения точности
		$VAR^8(1)$ (2.3.8)	$CAR^8(1)$ (2.3.9)	
1.	Нефть и газ	331,26	267,52	21,29
2.	Финансы	344,25	307,14	11,39
3.	Металл и добыча	321,45	295,21	8,51
4.	Электроэнергетика	89,63	54,09	49,46
5.	Потребительский	177,91	164,85	7,62
6.	Химии и нефтехимии	331,38	372,46	- 11,67
7.	Транспорт	45,16	36,96	19,98
8.	Телеком	64,20	36,42	55,23

Только для одного индекса, а именно – индекса Химии и нефтехимии России, ретропрогноз с помощью комплексной авторегрессии оказался хуже, чем прогноз, выполняемый с помощью векторной авторегрессии. Все остальные индексы Московской биржи прогнозируются лучше с помощью модели $CAR^8(1)$ (2.3.9), а в случаях с индексами Электроэнергетики и Телекома точность прогнозирования и вовсе в два раза выше.

Мы для примера взяли самые простые и доступные данные. И получили, что для прогнозирования этого ряда значений BIC всегда рекомендует использовать комплекснозначную авторегрессию, а не векторную авторегрессию. Это означает, что в большинстве практических случаев комплекснозначная авторегрессия будет предпочтительнее векторной авторегрессии. И чем больше размерность векторов и выше порядок

авторегрессии, тем меньшее значение будет принимать критерий *BIC* для этой модели в сравнении с векторной авторегрессией.

Это означает, что модель комплекснозначной авторегрессии является конкурирующей моделью векторной авторегрессии, а существенное снижение сложности новых моделей по сравнению с моделями векторной авторегрессии позволяет широко использовать их в экономической практике.

2.4. $CARMA^k(p,q)$ в экономическом прогнозировании

Мы убедились в том, что модель $CAR^k(p)$ является хорошей альтернативой моделям векторных авторегрессий – они проще, содержат меньшее количество коэффициентов, которые необходимо оценить, и в точности аппроксимации они незначительно проигрывают моделям $VAR^k(p)$. Именно поэтому информационный критерий для рассмотренных в предыдущем параграфе моделей рекомендует использовать модель комплексной авторегрессии, а не векторной.

Ранее было показано, как модель авторегрессии $AR(p)$ была трансформирована в модель $ARMA(p,q)$. Эту же логику использовали учёные и для формирования на базе модели векторной авторегрессии более сложной модели $VARMA^k(p,q)$:

$$\hat{Y}_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + \dots + A_p Y_{t-p} + M_1 U_{t-1} + \dots + M_q U_{t-q}. \quad (2.4.1)$$

Здесь U – вектор ошибок аппроксимации, имеющий ту же размерность k , что и вектор показателей Y . В общем случае число q предшествующих векторов ошибок аппроксимации U не равен числу p предшествующих векторов прогнозируемых показателей Y .

При этом, как и в случае $ARMA(p,q)$ между $VAR^k(p)$ и $MA^k(q)$ предполагается взаимосвязь [28, с. 436].

В двумерном случае модель $VARMA^2(1,1)$ с учётом принятых нами обозначений будет записана так [28, с. 443]:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}. \quad (2.4.2)$$

Относительно ошибок ε_t вектора U считают, что они представляют собой «белый шум» с нулевым математическим ожиданием. Для того чтобы использовать эту модель на практике, следует оценить её восемь коэффициентов: 4 коэффициента составляющей $VAR^2(1)$ и 4 коэффициента второй составляющей $MA^2(1)$.

Рассматривая модель векторной комплексной авторегрессии как частный случай векторной авторегрессии, можно получить аналогичную (2.4.1) модель $CARMA(p,q)$. Вариант, когда составляющая $MA(q)$ представлена в виде простого k -мерного вектора, мы рассматривать не будем. Эту составляющую мы также рассмотрим в комплексной форме. Тогда для двумерного случая $CARMA(1,1)$ будет записана так:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 \\ b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{pmatrix}. \quad (2.4.3)$$

Или, в комплексной форме:

$$\hat{y}_{1t} + i\hat{y}_{2t} = (a_0 + ia_1)(y_{1,t-1} + iy_{2,t-1}) + (\varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}) + (b_0 + ib_1)(\varepsilon_{1,t-1} + i\varepsilon_{2,t-1}). \quad (2.4.4)$$

Здесь, как видно, необходимо оценить значения только 4 неизвестных коэффициента, а не 8 коэффициентов, как это требуется для практического применения модели векторной авторегрессии (2.4.2).

Для того чтобы оценить практическую приемлемость модели $CARMA(p,q)$, рассмотрим простой случай построения модели $VARMA4(2,1)$, которая будет записана так:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \\ \hat{y}_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} \\ y_{4,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \\ y_{3,t-2} \\ y_{4,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \varepsilon_{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{3,t-1} \\ \varepsilon_{4,t-1} \end{pmatrix}$$

Легко убедиться в том, что для практического использования этой модели необходимо оценить по статистическим данным 48 неизвестных коэффициентов. Это – не простая задача для практикующих экономистов, хотя четырёхмерный случай экономического вектора представляется довольно простым отображением реальных экономических ситуаций. Поэтому, несмотря на всю простоту модели, мало кто из практикующих прогнозистов решится такую модель построить и использовать на практике.

А вот аналогичная ей модель $CARMA^4(2,1)$, в которой не только переменные представлены в комплексной форме, но и вектор ошибок также представляется в комплексной форме, будет записана так:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \\ \hat{y}_{3t} \\ \hat{y}_{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} & -a_{14} \\ a_{12} & a_{11} & a_{14} & a_{13} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} & -a_{34} \\ a_{32} & a_{31} & a_{34} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ y_{3,t-1} \\ y_{4,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & c_{13} & -c_{14} \\ c_{12} & c_{11} & c_{14} & c_{13} \\ c_{31} & -c_{32} & c_{33} & -c_{34} \\ c_{32} & c_{31} & c_{34} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \\ y_{3,t-2} \\ y_{4,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \varepsilon_{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & -b_{12} & b_{13} & -b_{14} \\ b_{12} & b_{11} & b_{14} & b_{13} \\ b_{31} & -b_{32} & b_{33} & -b_{34} \\ b_{32} & b_{31} & b_{34} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-2} \\ \varepsilon_{3,t-3} \\ \varepsilon_{3,t-4} \end{pmatrix}$$

Для того чтобы использовать в практике краткосрочного экономического прогнозирования эту модель, необходимо оценить только 24 коэффициента – в два раза меньше. И такую задачу может решить практически любой экономический прогнозист.

Число коэффициентов модели $VARMA^k(p,q)$, которое следует оценить на имеющемся множестве значений, зависит от порядков p и q модели (2.4.1) и от размерности k вектора переменных, причём решающую роль в повышении сложности модели играет именно размерность вектора k . Общее число коэффициентов такой модели можно описать формулой: $k^2 \cdot (p+q)$. Количество коэффициентов модели $CARMA^k(p,q)$ будет всегда меньше, чем у модели $VARMA^k(p,q)$. А для чётного числа размерности вектора k количество этих коэффициентов будет всегда в два раза меньше, и равно $k^2 \cdot (p+q)/2$. Например, для модели $VARMA^4(3,4)$ оцениваться должны 192 неизвестных коэффициента, а для модели $CARMA^4(3,4)$ – 86 коэффициентов.

Это означает, что чем выше размерность вектора в векторной авторегрессии, тем меньше шансов у векторной авторегрессии быть лучшей по сравнению с комплексной авторегрессией этого же порядка, поскольку информационные критерии всегда будут рекомендовать модели с меньшим количеством коэффициентов.

Определим, например, условие, при котором прогнозист засомневается в том, какой именно модели отдать предпочтение – $VARMA^4(2,1)$ или $CARMA^4(2,1)$? Эти модели в полном виде были приведены выше. Ситуация выбора возможна только в том случае, когда информационные критерии, посчитанные для каждой модели, окажутся равными друг другу, то есть выполняется

$$\ln \sigma_{VAR}^2 + \frac{48}{N} \ln N = \ln \sigma_{CAR}^2 + \frac{24}{N} \ln N \quad (2.4.5)$$

Отсюда имеем для дисперсий:

$$\ln \frac{\sigma_{CAR}^2}{\sigma_{VAR}^2} = \frac{24}{N} \ln N \rightarrow \frac{\sigma_{CAR}^2}{\sigma_{VAR}^2} = N^{\frac{24}{N}} \quad (2.4.6)$$

В предыдущем параграфе для расчётов использовалось 118 наблюдений. Подставим это число $N=118$ в (2.4.6). Тогда получим, что дисперсия $CARMA^4(2,1)$ должна быть в 2,64 раза больше дисперсии $VARMA^4(2,1)$, то есть – дисперсия ошибки аппроксимации комплексной авторегрессии $CARMA^4(2,1)$ должна превышать дисперсию ошибки аппроксимации модели $VARMA^4(2,1)$ на 264%! Очевидно, что такая ситуация вряд ли когда будет встречена на практике.

Из этого мы делаем однозначный вывод: модели $CARMA^k(p,q)$ практически всегда будут предпочтительнее моделей $VARMA^k(p,q)$ при $k > 3$. Но и в случае, когда $k = 2$, у комплексной авторегрессии есть неплохие шансы стать лучшей моделью, чем у модели векторной авторегрессии, что продемонстрировано на примере таблицы 2.2, когда рассматривались простые модели $VAR^2(1)$ и $CAR^2(1)$ без составляющей $MA(q)$.

2.5. Основные свойства комплекснозначной авторегрессии

Мы не будем далее обращаться к векторным авторегрессиям и их разновидности – комплекснозначным векторным авторегрессиям. Мы показали, что использование комплексных переменных и комплексных моделей открывает широкие возможности для практического использования при краткосрочном экономическом прогнозировании векторных авторегрессий. И этого достаточно. А теперь следует обратить внимание на свойства модели комплексной авторегрессии $CAR(p)$.

Первая простая авторегрессия комплексных переменных может быть записана так:

$$y_{1t} + iy_{2t} = (a_0 + ia_1)(y_{1,t-1} + iy_{2,t-1}) \quad (2.5.1)$$

Следует вспомнить, что авторегрессионная модель первого порядка записывается так:

$$y_t = ay_{t-1}. \quad (2.5.2)$$

После небольших преобразований эта модель может быть записана в виде такой функции:

$$y_t = a^t y_0. \quad (2.5.3)$$

Изменение во времени этой функции полностью определяется характером коэффициента a .

Легко показать, что комплекснозначная авторегрессия (2.5.1) также представляет собой показательную функцию [42]

$$y_{rt} + iy_{it} = (a_0 + ia_1)^t (y_{r0} + iy_{i0}). \quad (2.5.4)$$

Из теории функций комплексного переменного известно, что комплекснозначная степенная функция является периодической и имеет форму спирали с экспоненциально увеличивающимся модулем функции в ситуации, когда модуль аргумента больше единицы. В том случае, когда модуль аргумента меньше единицы, функция стремится к нулю.

Модель не расходится и является стационарной в условиях:

$$(a_0^2 + a_1^2) \leq 1. \quad (2.5.5)$$

Но так ведёт себя теоретическая модель. На практике существенную роль на поведение модели будет оказывать комплексная ошибка аппроксимации – ведь при моделировании реальных процессов в правую часть модели (2.5.1) подставляется не расчётное значение, а фактическое, загрязнённое случайными ошибками. Поэтому траектории моделируемых процессов могут иметь самые различные формы, точно так же, как самые разнообразные траектории моделируются марковскими процессами, представляющими собой авторегрессию первого порядка действительных переменных (2.5.2).

Понимая, как поведёт себя авторегрессия $CAR(1)$ при отсутствии случайных ошибок, обратим внимание на одну её модификацию:

$$\hat{y}_{1t} + i\hat{y}_{2t} = (a_0 + ia_1)(y_{2,t-1} + iy_{1,t-1}). \quad (2.5.6)$$

В этой модификации на каждом шаге изменения времени t действительная и мнимая части меняются местами. Точнее – каждая переменная относится то к действительной, то к мнимой части. Действительно, в момент времени t первая переменная y_{1t} относится к действительной части, а вторая переменная y_{2t} – к мнимой части: $(y_{1t} + iy_{2t})$. В предыдущий момент времени было наоборот, а именно к действительной части относилась вторая переменная y_{2t} , а в мнимой части находилась первая переменная y_{1t} , то есть – использовалась комплексная переменная такого вида: $(y_{2,t-1} + iy_{1,t-1})$. В свою очередь, этой переменной предшествовала комплексная переменная, где вновь к действительной части относилась первая вещественная переменная y_{1t} , а к мнимой части относилась вторая вещественная переменная y_{2t} : $(y_{1,t-2} + iy_{2,t-2})$ и т.д.

Для того чтобы понять, как поведёт себя эта модель по сравнению с исходной моделью (2.5.1), представим обе модели в экспоненциальной форме.

Стандартная модель комплексной авторегрессии (2.5.1) в экспоненциальной форме запишется так:

$$R_t e^{\varphi_t} = R_a e^{\varphi_a} R_{t-1} e^{\varphi_{t-1}} = R_a R_{t-1} e^{\varphi_a + \varphi_{t-1}} \quad (2.5.7)$$

Здесь:

$$R_t = \sqrt{y_{1t}^2 + y_{2t}^2}, \quad (2.5.8)$$

$$R_a = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}, \quad (2.5.9)$$

$$\varphi_t = \operatorname{arctg} \frac{y_{2t}}{y_{1t}}, \quad (2.5.10)$$

$$\varphi_a = \operatorname{arctg} \frac{a_1}{a_0}. \quad (2.5.11)$$

Из (2.5.7) следует понимание того, как ведёт себя базовая модель $CAR(p)$. Поскольку полярный угол модели на каждом шаге t изменяется на величину φ_a :

$$\varphi_t = \varphi_a + \varphi_{t-1} \quad (2.5.12)$$

то в случае, когда полярный угол коэффициентов φ_a положительный, полярный угол моделируемых чисел увеличивается и спираль, по которой

моделируются числа, разворачивающиеся против часовой стрелки. Если при этом модуль коэффициента пропорциональности (2.5.9) больше единицы, то спираль раскручивается, а если он меньше единицы, то спираль закручивается.

В том случае, когда полярный угол коэффициентов φ_a отрицательный, спираль раскручивается (или закручивается в зависимости от величины модуля коэффициентов (2.5.9), в противоположную сторону по часовой стрелке, поскольку с каждым шагом полярный угол моделируемого комплексного показателя уменьшается на φ_a .

Модель (2.5.6) принципиально другая. И это следует из экспоненциальной формы её записи:

$$R_t e^{\varphi_t} = R_a R_{t-1} e^{\varphi_a + \theta_{t-1}}, \quad (2.5.13)$$

$$\theta_{t-1} = \operatorname{arctg} \frac{y_{1t-1}}{y_{2t-1}}. \quad (2.5.14)$$

Поскольку для полярных углов выполняется равенство

$$\varphi_t = \varphi_a + \theta_{t-1}, \quad (2.5.15)$$

то можно заметить, что:

$$\varphi_t = \varphi_a + \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} \varphi_{t-1}). \quad (2.5.16)$$

Если рассматривать поведение во времени комплексной переменной на комплексной плоскости при $\varphi_a = 0$, то модель (2.5.6) описывает оригинальный колебательный процесс, когда полярный угол φ_t будет принимать только два значения: φ_0 и φ_1 .

То есть перед нами модель, ведущая себя неординарно. Поэтому имеет смысл её исследовать более подробно.

Проведём исследование для простого случая, когда

$$y_{1t} + iy_{2t} = 1 + i, \quad (2.5.17)$$

а модуль комплексного коэффициента равен единице, например, при таких коэффициентах:

$$a_0 + ia_1 = 0,7071 + i0,7071. \quad (2.5.18)$$

В этом случае модель генерирует только две точки:

y_r	y_i
1,000	1,000
0,000	1,414
1,000	1,000
0,000	1,414

Но как только мы переходим от расчётных значений к значениям, засорёнными случайной составляющей, меняющейся в пределах от $-0,1$ до $+0,1$ (то есть – до 10% от начального уровня), то данная модель начинает генерировать разнообразные траектории нелинейного и цикличного роста.

По аналогии с марковскими процессами эти процессы можно назвать процессами случайного блуждания на комплексной плоскости. Траектории, генерируемые этим процессом, определяются случайными ошибками и могут выглядеть, например, так, как показано на рис. 2.1.

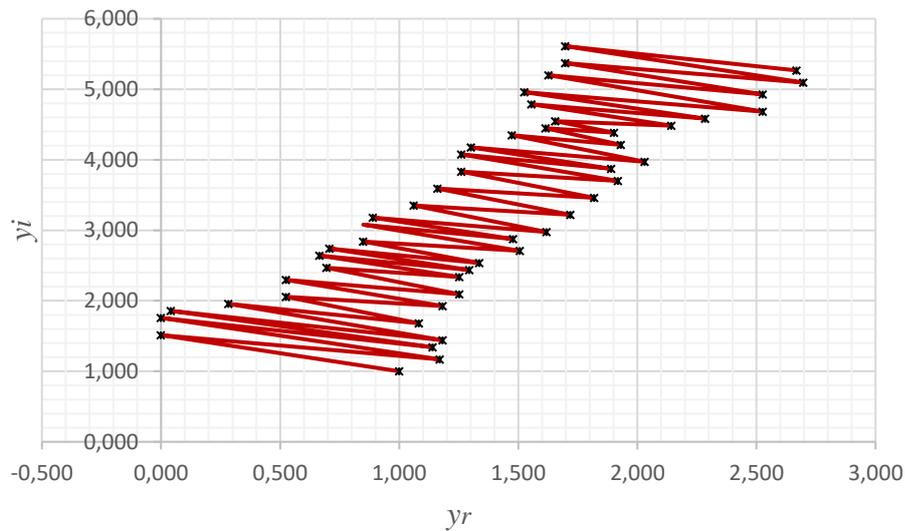


Рис. 2.1. Траектория процесса случайного блуждания для модели (2.5.6) при $y_{1t} + iy_{2t} = 1 + i$ и $a_0 + ia_1 = 0,7071 + i0,7071$

Здесь процесс случайного блуждания начинается в точке с координатами $(1,1)$ и устремляется вправо вверх в первом квадранте комплексной плоскости переменных.

Для сравнения на рис. 2.2 приведён процесс случайного блуждания на комплексной плоскости для базовой модели авторегрессии (2.5.1) с такими же исходными параметрами.

Различие между двумя моделями (2.5.1) и (2.5.6) огромное – первая модель генерирует траекторию нелинейного колебательного роста, вторая модель – колебание вокруг окружности. Направление нелинейного циклического роста, которое генерируется моделью (2.5.6), определяется знаками при комплексных коэффициентах пропорциональности, то есть – полярным углом комплексного коэффициента пропорциональности.

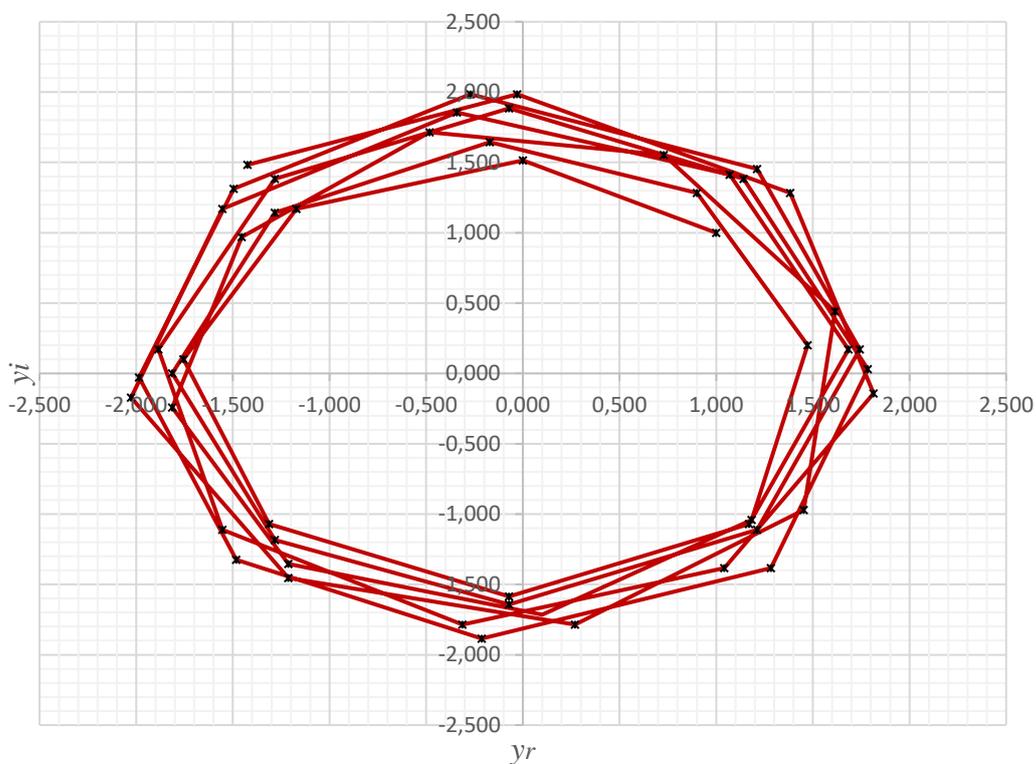


Рис. 2.2. Траектория процесса случайного блуждания для модели (2.5.1) при $y_{1t} + iy_{2t} = 1 + i$ и $a_0 + ia_1 = 0,7071 + i0,7071$

В том случае, когда модуль комплексного коэффициента пропорциональности модели (2.5.6) больше единицы, модель (2.5.6) генерирует возрастающий процесс с увеличивающимся размахом колебаний, например так, как это показано на рис. 2.3.

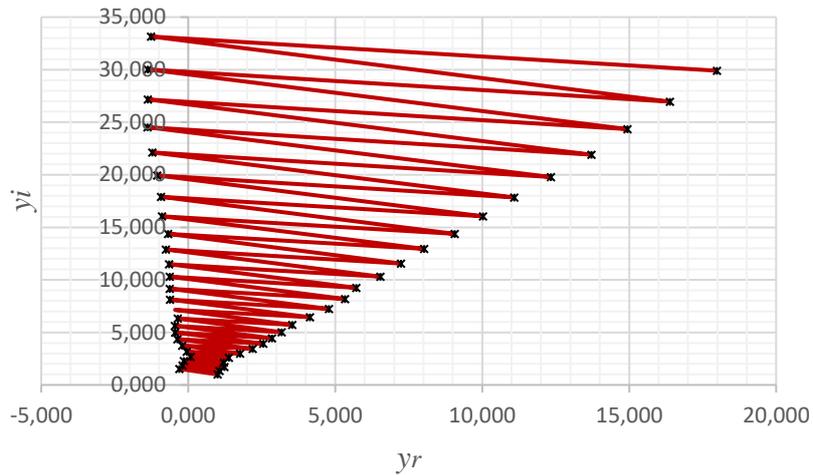


Рис. 2.3. Траектория модели (2.5.6) при $y_{1t}+iy_{2t} = 1+i$ и модуле комплексного коэффициента больше единицы – $a_0+ia_1 = 0,5500+i0,8930$

Если при тех же условиях модуль комплексного коэффициента пропорциональности окажется меньше единицы, например, когда $a_0+ia_1 = -0,5-i0,8$, то модель генерирует затухающие колебания вокруг некоторой траектории (рис. 2.4).

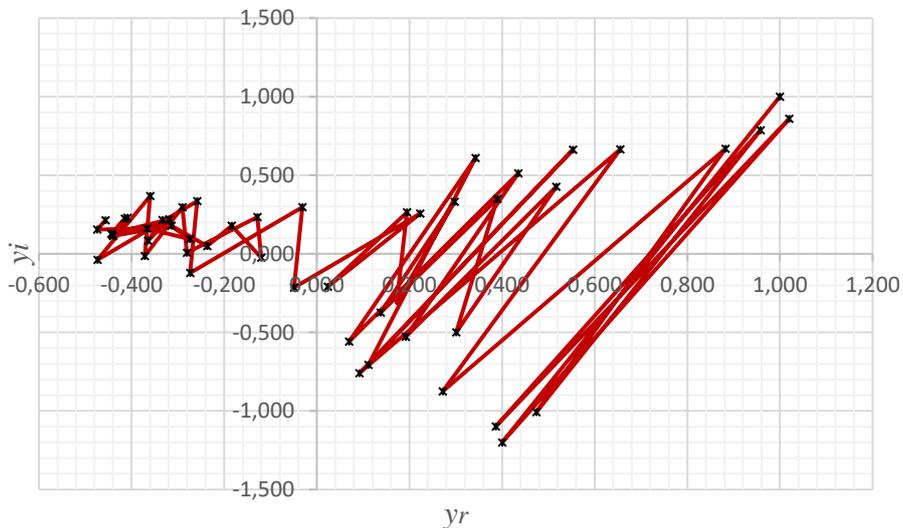


Рис. 2.4. Траектория модели (2.5.6) при $y_{1t}+iy_{2t} = 1+i$ и модуле комплексного коэффициента меньше единицы – $a_0+ia_1 = -0,5 - i0,8$

Если же промоделировать процесс с такими начальными значениями для стандартной комплексной авторегрессии, будет получен процесс, приближающийся по нелинейной спирали к нулевой точке (рис. 2.5).

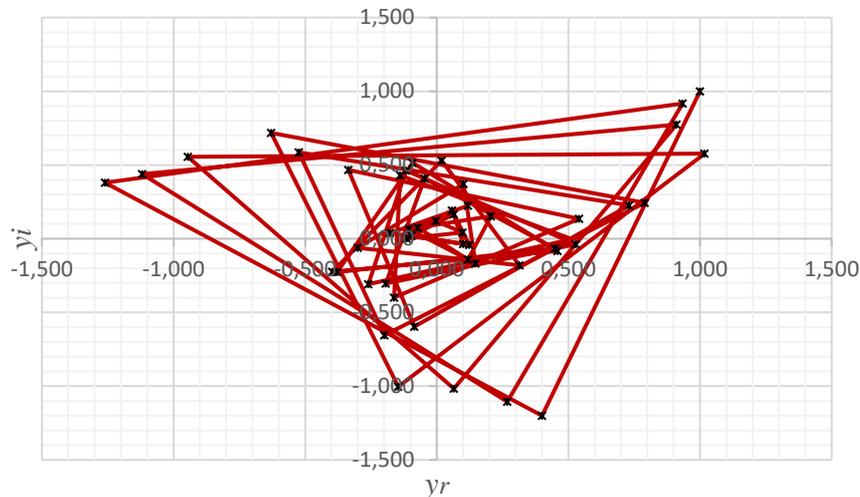


Рис. 2.5. Траектория модели (2.5.1) при $y_{1t} + iy_{2t} = 1 + i$ и модуле комплексного коэффициента меньше единицы $-a_0 + ia_1 = -0,5 - i0,8$

Из рис. 2.5 видно, что модель стартует в точке с координатами (1,1), а затем последовательно приближается к нулевой точке. Модель (2.5.6) при этих же условиях также стартует из точки с координатами (1,1), и также размах колебаний этой модели уменьшается с ростом числа итераций. Но точка, к которой стремится этот процесс, не является нулевой, и для рассматриваемого примера она находится во втором квадранте комплексной плоскости. В зависимости от знаков действительной и мнимой частей комплексного коэффициента пропорциональности эта точка будет находиться в разных квадрантах комплексной плоскости.

Поскольку модель (2.5.6) генерирует самые различные, но обязательно колебательные траектории, иногда с непредсказуемыми размахами этих колебаний, то эту модель, для отличия от других моделей назовём «модель пьяницы» и будем обозначать для краткости как $DCAR(p)$.

Завершая параграф, следует указать на то, что модель (2.5.6) также является частным случаем векторной авторегрессии, поскольку в векторной форме она может быть представлена так:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{1t} \\ \hat{y}_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2,t-1} \\ y_{1,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix}. \quad (2.5.19)$$

Используя совместно исходную комплекснозначную авторегрессию и её вариант (2.5.6), можно получить модификацию модели $CAR(2)$ с возможностью моделирования других экономических процессов: возрастающих, убывающих, колебательных, линейных и т.п. Эта модель примет такой вид:

$$\hat{y}_{rt} + i\hat{y}_{it} = (a_0 + ia_1)(y_{rt-1} + iy_{it-1}) + (b_0 + ib_1)(y_{it-2} + iy_{rt-2}). \quad (2.5.20)$$

2.6. Разновидности одномерных комплексных авторегрессий

Ранее модель комплексной авторегрессии в общем виде была представлена так:

$$y_{1t} + iy_{2t} = \sum_{\tau=1}^p F(y_{1(t-\tau)} + iy_{2(t-\tau)}) + (\varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}) \quad (2.6.1)$$

Здесь y_{1t} и y_{2t} – прогнозируемые на момент времени t действительные переменные; i – мнимая единица; F – некоторая комплекснозначная функция; τ – лаг авторегрессии; p – порядок авторегрессии; ε_{1t} и ε_{2t} – ошибки аппроксимации первой и второй переменных в момент времени t ;

В нашем исследовании мы не будем обращаться к нелинейным моделям, а акцентируем внимание на линейных авторегрессиях, которые обозначаются как $CAR(p)$:

$$y_{1t} + iy_{2t} = (b_0 + ib_1) + \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{1(t-\tau)} + iy_{2(t-\tau)}) + (\varepsilon_{1t} + i\varepsilon_{2t}) \quad (2.6.2)$$

где b_0 и b_1 – коэффициенты (свободные члены), отражающие начальное значение комплексного ряда; $a_{0\tau}$ и $a_{1\tau}$ – коэффициенты пропорциональности.

Применительно к авторегрессионным моделям полагается, что свободный член можно принять равным нулю. Вот и мы в дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты b_0 и b_1 равны нулю, поскольку он отражает только начальный уровень комплексного ряда. Если его оставить в последующих моделях, то он будет только загромождать их вид, но оказывая на свойства моделей особого влияния.

Модель (2.6.2) является частным случаем векторной авторегрессии для двумерного вектора и моделирует две переменные и их взаимное влияние. Имеется ли возможность трансформировать эту модель на одномерные случаи, когда моделируется и прогнозируется только одна переменная?

Такая возможность имеется.

Комплексные переменные в экономике формируются так, чтобы эти две переменные отражали разные стороны одного и того же экономического объекта или явления, например труд и капитал, которые отражают затраты ресурсов на производство. Следовательно, для того чтобы использовать модель (2.6.2) для прогнозирования показателя y_{1t} необходимо поставить ему в соответствие некоторую сопутствующую переменную y_{2t} так, чтобы она являлась дополнительной характеристикой прогнозируемой переменной.

Какие могут быть варианты задания переменной y_{2t} как дополнительной характеристики переменной y_{1t} ? Здесь может быть предложено несколько вариантов в зависимости от моделируемой и прогнозируемой переменной y_{1t} , но в общем случае приемлемыми могут быть три основные формы:

1) комплексная авторегрессия с ошибкой, когда $y_{2t} = \varepsilon_t$. Ошибка ε_t характеризует особенности динамики рассматриваемого ряда и степень его колеблемости, поэтому она вполне может служить дополнительной характеристикой моделируемого ряда. С учётом этого комплексная переменная модели (2.6.2) будет записана так: $(y_t + i\varepsilon_t)$, а сама модель примет такой вид:

$$\hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\varepsilon_{t-\tau}) \quad (2.6.3)$$

Модели этого рода будем обозначать как $CARE(p)$;

2) временная комплексная авторегрессия, когда $y_{2t} = t$. Здесь время выступает не только индексом упорядочивания ряда, но и его активной компонентой. В этом случае комплексная переменная принимает вид $(y_t + it)$, а модель будет такой:

$$\hat{y}_t + i\hat{t} = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i(t-\tau)) \quad (2.6.4)$$

Эту модель будем обозначать как $CTAR(p)$;

3) комплексная авторегрессия с приростом, когда $y_{2t} = \Delta y_{1t}$. Прирост может быть равен нулю, он может быть положительным или отрицательным. Он характеризует тенденцию изменения показателя в последний момент наблюдения и может выступать его дополнительной характеристикой. Комплексная переменная авторегрессии (2.6.2) будет записана так: $(y_t + i\Delta y_t)$. При этом модель следует записать в таком виде:

$$\hat{y}_t + i\Delta\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\Delta y_{t-\tau}) \quad (2.6.5)$$

Такие модели рода будем обозначать как $GCAR(p)$.

Свойства каждой модели, а также пределы их применения на практике мы и рассмотрим в последующих параграфах.

2.7. Модель авторегрессии с ошибкой $CARE(p)$

Модель $CARE(p)$ представляет собой комплексную переменную, которая включает в действительную часть прогнозируемый показатель y_t , и ошибки аппроксимации ε_t , отнесённые к её мнимой части. Сама идея такой комплексной переменной была высказана И. С. Светуньковым ещё в 2010 году [2], когда была представлена комплекснозначная форма модели экспоненциального сглаживания:

$$\hat{y}_{t+1} + i\hat{\varepsilon}_{t+1} = (\alpha_0 + i\alpha_1)(y_t + i\varepsilon_t) + ((1+i) - (\alpha_0 + i\alpha_1))(\hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_t). \quad (2.7.1)$$

Исследования показали, что эта комплекснозначная модель экспоненциального сглаживания даёт более точные экономические прогнозы по сравнению с моделями экспоненциального сглаживания действительных переменных. Объясняется это тем, что прогнозное значение показателя учитывает не только предшествующие значения самой переменной, но также текущую и прошлые ошибки аппроксимации модели. Этот вывод был подтверждён в 2015 году [41].

Комплексная переменная в авторегрессии может быть представлена:

- 1) в простой форме как $(y_t + i\varepsilon_t)$, где ε_t – текущая ошибка аппроксимации;
- 2) в виде, когда используется не текущая ошибка аппроксимации, а предыдущая ошибка: $(y_t + i\varepsilon_{(t-g)})$, где g – некоторый лаг ошибки. Такое

представление модели предполагает, что модель учится на прошлых ошибках, а не на текущих;

3) в форме, нелинейной относительно ошибки аппроксимации: $(y_t + if(\varepsilon_t))$, где $f(\varepsilon_t)$ – может принимать формы, задаваемые исследователем.

В первом, линейном относительно ошибки аппроксимации, случае, модель $CARE(p)$ будет иметь такой вид:

$$\hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\varepsilon_{t-\tau}) \quad (2.7.2)$$

Модель $CARE(p)$ представляет собой комплекснозначное равенство. Его можно представить как систему двух равенств действительных переменных – отдельное равенство для вещественной составляющей левой и правой части (2.7.2) и отдельное равенство для мнимой составляющей левой и правой части (2.7.2). Получим:

$$\begin{cases} \hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} y_{t-\tau} - a_{1\tau} \varepsilon_{t-\tau}) \\ \hat{\varepsilon}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} \varepsilon_{t-\tau} + a_{1\tau} y_{t-\tau}) \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Тогда для вещественной части комплекснозначной модели (2.7.2) имеем:

$$\text{Re } CARE(p): \quad \hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} \varepsilon_{t-\tau} \quad (2.7.4)$$

А для мнимой части этой модели:

$$\text{Im } CARE(p): \quad \hat{\varepsilon}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} \varepsilon_{t-\tau} + \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} y_{t-\tau} \quad (2.7.5)$$

Таким образом, в экономическом прогнозировании помимо общей модели $CARE(p)$ (2.7.2) могут использоваться ещё две отличающиеся друг от друга самостоятельные модели: $\text{Re}CARE(p)$ и $\text{Im}CARE(p)$ (Светуныков, 2020б).

Практическое применение модели (2.7.4) очевидно – она может рассматриваться как частный случай общеизвестной модели авторегрессии $ARMA(p, q)$. Модель $ARMA(p, q)$ имеет такой вид:

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} y_{t-\tau} + \sum_{\tau=1}^q a_{1\tau} \varepsilon_{t-\tau} \quad (2.7.6)$$

Можно заметить, что модели (2.7.4) и (2.7.6) совпадут в том случае, когда $p = q$. Знак перед второй суммой правых частей этих моделей (в модели (2.7.5) – отрицательный, а в модели (2.7.6) положительный) определяется при оценке коэффициентов моделей автоматически, поэтому не является принципиальным отличием моделей друг от друга.

А вот важным отличием модели $ReCARE(p)$ от модели $ARMA(p,p)$ является то, что в (2.7.4) оба слагаемых представляют собой части единого целого и оцениваются одновременно. А в модели (2.7.6) предполагается взаимосвязь между первой частью $AR(p)$ и второй частью $MA(q)$ [13], в результате которой коэффициенты $a_{0\tau}$ определяют величины коэффициентов $a_{1\tau}$ и наоборот. Это предопределяет необходимость использования итеративного метода нахождения коэффициентов модели (2.7.6).

Одной из сложностей практического использования $ARMA(p,q)$ заключается в том, что до сих пор нет общепринятого удовлетворительного решения задачи определения лагов p и q . Для этого используют автокорреляционные и частные автокорреляционные функции для переменных. Общий принцип построения модели $ARMA(p,q)$ заключается в следующем. Поскольку переменные ε_t являются ненаблюдаемыми, то сначала оценивают коэффициенты составляющей $AR(p)$. С помощью этой модели вычисляют остатки ε_t . Их анализ позволяет определить величину лага q . А поскольку в распоряжении исследователя есть как значения переменной y_t , так и значения переменной ε_t , то это позволяет оценить все коэффициенты модели $ARMA(p,q)$ (2.7.6). Модель описывает исходные данные y_t с новыми ошибками аппроксимации ε_t . Используя исходные данные по переменным y_t и новым ошибкам аппроксимации ε_t , вновь оценивают коэффициенты модели, и так продолжают до тех пор, пока остатки ε_t не перестанут меняться с некоторой наперёд заданной точностью. В этой процедуре многие проблемы возникают именно с определением лагов p и q .

Впрочем, с развитием вычислительных возможностей современных компьютеров на практике всё чаще используют другую процедуру, а именно процедуру автоматической оценки коэффициентов $ARMA(p,q)$. Для

этого, последовательно увеличивая лаги p и q , вычисляют для каждой модели (2.7.6) коэффициенты, после чего на основе дисперсии ошибки аппроксимации и количества коэффициентов вычисляют информационный критерий (AIC или BIC) и уже по критерию минимума этого информационного критерия выбирают наилучшую модель с соответствующими лагами p и q . В этом случае модель $ReCARE(p)$, выбор которой осуществляется именно так, может рассматриваться как частный случай модели $ARMA(p, q)$.

Любая модель описывает реальный ряд с некоторой ошибкой:

$$y_t = \hat{y}_t + \varepsilon_t \rightarrow \varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t. \quad (2.7.7)$$

И задача оценивания коэффициентов этой модели чаще всего сводится к минимизации суммы квадратов этой ошибки. Для модели $ReCARE(p)$ эта ошибка равна

$$\varepsilon_t = y_t - \left(\sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} \varepsilon_{t-\tau} \right). \quad (2.7.8)$$

Минимизировать сумму квадратов (2.7.8) можно с помощью любых численных методов. Поэтому задача легко решается.

В модели $ImCARE(p)$ (2.7.5) вычисляется некоторая оценка прогнозной ошибки аппроксимации ε_t , которая описывается погрешностью μ_t :

$$\mu_t = \varepsilon_t - \hat{\varepsilon}_t. \quad (2.7.9)$$

И в этом случае задача сводится к простому варианту решения: следует минимизировать сумму квадратов этого остатка:

$$\mu_t = \varepsilon_t - \left(\sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} \varepsilon_{t-\tau} + \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} y_{t-\tau} \right). \quad (2.7.10)$$

При этом мы сталкиваемся с такой ситуацией:

– если минимизировать сумму квадратов (2.7.8), то ошибки (2.7.9) будут очень большими;

– если минимизировать сумму квадратов (2.7.10), то большими будут ошибки аппроксимации исходного ряда (2.7.7).

Поскольку прогнозируется именно ряд y_t , то предпочтение следует отдавать модели $ReCARE(p)$. Вычисляемые при этом по модели $ImCARE(p)$ характеристики могут служить некоторой дополнительной

характеристикой прогнозируемого процесса, но её смысл пока не очевиден, и мы отложим исследование модели $\text{ImCARE}(p)$ на будущее.

Сама исходная модель $\text{CARE}(p)$ описывает исходный ряд значений с комплексной ошибкой аппроксимации:

$$\varepsilon_t + i\mu_t = y_t + i\varepsilon_t - (\hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_t) = y_t + i\varepsilon_t - \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\varepsilon_{t-\tau}). \quad (2.7.11)$$

Используя комплексный МНК для этой задачи, мы получим такую систему нормальных уравнений, решение которой позволит оценить коэффициенты модели $\text{CARE}(p)$ (Svetunkov, 2012):

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^T (y_t + i\varepsilon_t)(y_{t-1} + i\varepsilon_{t-1}) = (a_{01} + ia_{11}) \sum_{t=p}^T (y_{t-1} + i\varepsilon_{t-1})^2 + \dots + (a_{0p} + ia_{1p}) \sum_{t=p}^T (y_{t-p} + i\varepsilon_{t-p})(y_{t-1} + i\varepsilon_{t-1}), \\ \sum_{t=1}^T (y_t + i\varepsilon_t)(y_{t-2} + i\varepsilon_{t-2}) = (a_{01} + ia_{11}) \sum_{t=p}^T (y_{t-1} + i\varepsilon_{t-1})(y_{t-2} + i\varepsilon_{t-2}) + \dots + (a_{0p} + ia_{1p}) \sum_{t=p}^T (y_{t-p} + i\varepsilon_{t-p})(y_{t-2} + i\varepsilon_{t-2}), \\ \dots \\ \sum_{t=1}^T (y_t + i\varepsilon_t)(y_{t-p} + i\varepsilon_{t-p}) = (a_{01} + ia_{11}) \sum_{t=p}^T (y_{t-1} + i\varepsilon_{t-1})(y_{t-p} + i\varepsilon_{t-p}) + \dots + (a_{0p} + ia_{1p}) \sum_{t=p}^T (y_{t-p} + i\varepsilon_{t-p})^2, \end{cases}$$

Поскольку ошибки ε_t не наблюдаются, то решить эту систему можно только с помощью численных методов. Но, на наш взгляд, необходимости в нахождении коэффициентов модели таким образом не имеет смысла – вполне достаточно использовать модель $\text{ReCARE}(p)$.

Легко заметить, что модель $\text{ReCARE}(p)$ превращается в модель обыкновенной авторегрессии $\text{AR}(p)$, если коэффициент $a_{1\tau}$ становится равен нулю. Во всех остальных случаях модель $\text{ReCARE}(p)$ будет отличаться от $\text{AR}(p)$ и давать более точные прогнозы, поскольку учитывает и предшествующие ошибки.

Николай Питухин, например, сравнил точность ретропрогноза этих двух моделей, меняя порядок авторегрессии p от единицы до десяти на примере убывающего ряда производства в России экскаваторов с 1990 по 2018 гг. Результаты его расчётов приведены в табл. 2.5. Критерием точности ретропрогноза было выбрано среднеквадратичное отклонение ошибки ретропрогноза (СКО) на один шаг.

Таблица 2.5.
Сравнение точности ретропрогноза моделей $ReCARE(p)$ и $AR(p)$

Порядок авторегрессии, p	СКО для модели $AR(p)$	СКО для модели $ReCARE(p)$	% уменьшения СКО
1	1021,8	703,9	31,1
2	693,6	562,9	18,9
3	608,0	510,8	16,0
4	582,6	524,3	10,0
5	595,0	444,5	25,3
6	564,4	367,2	34,9
7	569,6	399,6	29,8
8	511,0	312,0	39,0
9	512,2	204,5	60,1
10	515,7	357,5	30,7

Как и ожидалось, модель $ReCARE(p)$ оказалась точнее модели $AR(p)$. Эти же результаты были получены и по другим рядам данных. Юлия Селиванова, Галина Сирук и Назира Шайхлеева провели расчёты, сравнивая друг с другом точность ретропрогноза $ReCARE(p)$ и $AR(p)$ на данных базы Международного института прогнозистов². Для этого было использовано 60 различных динамических рядов разной длины и разных показателей. Лишь в 18,2 % случаев модели $ReCARE(p)$ и $AR(p)$ показали одинаковую точность в прогнозировании. Для всех этих случаев $a_{1\tau} \approx 0$. Но во всех остальных 82 % случаев этот коэффициент отличен от нуля, и чем он по модулю больше нуля, тем более точной является модель $ReCARE(p)$ по сравнению с $AR(p)$. В 3 случаях из 60 повышение точности прогноза модели $ReCARE(p)$ по сравнению с $AR(p)$ составила величину свыше 65 %.

2.8. Модель со сдвигом $ReCARE(p,g)$

Комплексная переменная в $CARE(p)$ может быть представлена в виде, когда используется не текущая ошибка аппроксимации, а предыдущая

² Makridakis S., Hibon M. The M3–Competition: results, conclusions and implications // International journal of forecasting, 2000, v. 16, pp. 451–476.

ошибка: $(y_t + i\varepsilon_{(t-g)})$, где g – некоторый лаг ошибки. Такое представление модели предполагает, что модель учится на прошлых ошибках, а не на текущих ошибках. Для такой модели получим:

$$\hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_{t-g} = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\varepsilon_{(t-g)-\tau}) \quad (2.8.1)$$

Эту модель в дальнейшем будем обозначать как $CARE(p, g)$.

В том случае, когда для модели $ReCARE(p, g)$ выполняется равенство $g=0$, она превращается в модель $ReCARE(p)$. Из этого следует, что модель $ReCARE(p, g)$ является наиболее общей в этом классе моделей.

В отличие от модели $ReCARE(p)$, здесь предполагается, что на текущее значение прогнозируемого показателя оказывают влияние ошибки аппроксимации, сдвинутые на g наблюдений назад, но число пар значений показателя y_t и ошибки ε_t равно друг другу и составляет p величин. То есть в такой модели закладываются элементы влияния цикличности развития ряда (сезонности), которые встречаются довольно часто. Эта сезонность отражается повторяемостью влияния ошибки ε_{t-g} на текущую величину переменной y_t .

Данная комплекснозначная модель имеет действительную и мнимую части. Действительная часть модели (2.8.1) примет вид:

$$ReCARE(p, g): \quad \hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} \varepsilon_{(t-g)-\tau}, \quad (2.8.2)$$

а мнимая часть модели такой вид:

$$ImCARE(p): \quad \hat{\varepsilon}_{t-g} = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} \varepsilon_{(t-g)-\tau} + \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} y_{t-\tau} \quad (2.8.3)$$

Практическое применение мнимой части (2.8.3) этой модели сложно себе представить, а вот действительная часть модели (2.8.2) может с успехом использоваться на практике краткосрочного экономического прогнозирования.

При любых значениях p и g модели $ARMA(p, q)$ она не становится моделью $ReCARE(p, g)$. Это – оригинальная модель авторегрессии. Модель (2.8.2) совпадёт с моделью $ARMA(p, q)$ только тогда, когда выполняется двойное равенство: $g=0$ и $p=q$. Во всех остальных случаях модели $ReCARE(p, g)$ и $ARMA(p, q)$ отличаются друг от друга.

Следовательно, имеет смысл сравнить поведение модели (2.8.2) и модели $ARMA(p,q)$. И если новая модель покажет не худшие свойства аппроксимации или прогнозные свойства, чем модель $ARMA(p,q)$, то её можно будет рекомендовать для целей краткосрочного экономического прогнозирования. У модели (2.8.2) $ReCARE(p,g)$ вне зависимости от сдвига g необходимо найти $2 \cdot p$ неизвестных коэффициентов, поскольку в (2.8.1) рассматриваются пары комплексных переменных. Модель $ARMA(p,q)$ содержит $p+q$ неизвестных коэффициентов. Так что в общем случае наилучшая для прогнозируемого ряда модель $ReCARE(p,g)$ может иметь другое количество коэффициентов, нежели наилучшая для этого же ряда прогнозная модель $ARMA(p,q)$.

Сравним вначале аппроксимационные способности моделей $ReCARE(p,g)$ и $ARMA(p,q)$. Будем использовать для этого ряд № 2830, выбранного наугад из базы данных Международного института прогнозистов. Для того чтобы модели имели одинаковые стартовые условия, было принято для всех моделей $\varepsilon_1 = 0$. Последовательно увеличивая порядок p , а для моделей $ARMA(p,q)$ ещё и q , вычислялись значения критериев AIC и BIC и отбирались модели, у которых значения этих критериев являлись минимальными. Для модели $ReCARE(p,g)$ осуществлялась оптимизация и по сдвигу g .

Результаты вычислений приведены в табл. 2.7. Из множества моделей здесь показаны характеристики двух наилучших по информационным критериям моделей из класса $ARMA(p,q)$ и двух наилучших моделей из класса $ReCARE(p,g)$.

Таблица 2.7.
Сравнительная точность моделей $ARMA(p,q)$ и $ReCARE(p,g)$

Вид модели	σ	AIC	BIC
Модели $ARMA(p,q)$			
$ARIMA(4,4)$	100,815	9,410	9,648
$ARIMA(5,4)$	100,276	9,687	9,422
Модели $ReCARE(p,g)$			
$ReCARE(4,2)$	93,382	9,261	9,501
$ReCARE(6,3)$	88,455	9,245	9,599

Рассмотрим вначале первую часть таблицы, в которой приведены характеристики двух лучших моделей из класса $ARMA(p,q)$. Можно заметить, что по значению информационного критерия AIC лучшей в своём классе является модель $ARMA(4,4)$. А модель $ARMA(5,4)$ является лучшей по байесовскому информационному критерию BIC . Поскольку и среднее квадратичное отклонение ошибки аппроксимации у этой модели меньше, чем у модели $ARMA(4,4)$, то следует предпочесть для аппроксимации модель $ARMA(5,4)$.

Вторая часть таблицы содержит характеристики двух лучших моделей из семейства $ReCARE(p,g)$ – $ReCARE(4,2)$ и $ReCARE(6,3)$. Модель $ReCARE(4,2)$ является наилучшей по информационному критерию BIC , который, как известно, более чувствителен к росту числа коэффициентов. Модель $ReCARE(4,2)$ содержит $4 \cdot 2 = 8$ неизвестных коэффициентов, а модель $ReCARE(6,3)$ содержит $6 \cdot 2 = 12$ неизвестных коэффициентов. Информационный критерий Акаике (AIC) отдаёт предпочтение другой модели $ReCARE(6,3)$, которая к тому же оказалась наилучшей среди всех рассматриваемых моделей по величине среднее квадратичное отклонение ошибки аппроксимации.

Если сравнивать теперь друг с другом лучшие в каждом классе модели по точности аппроксимации, то модель $ReCARE(6,3)$ будет аппроксимировать исходный ряд на 13,3 % точнее, чем модель $ARMA(5,4)$. А это – очень серьёзное повышение точности аппроксимации. Обратим внимание и на то, что в модели $ReCARE(6,3)$ оценивались 12 коэффициентов, а в модели $ARMA(5,4)$ – 9 коэффициентов. Усложнение модели налицо.

На рассматриваемом примере модели нового класса демонстрируют свою предпочтительность по сравнению с моделями класса $ARMA(p,q)$. Точность ошибки аппроксимации – важный показатель, который свидетельствует в пользу новой модели краткосрочного прогнозирования, но, как известно из экономической практики, далеко не всегда лучшая в аппроксимации модель является лучшей в прогнозировании. А нас интересует именно возможность использования новой модели для целей краткосрочного прогнозирования в экономике. Поэтому следует сравнить модели семейства $ARMA(p,q)$ с моделями семейства $ReCARE(p,g)$ по точности

ретропрогноза, а значения информационных критериев будут нужны только как некоторая дополнительная характеристика моделей.

Воспользуемся тем же рядом базы, состоящим из 104 наблюдений. Теперь разобьём его на две части – обучающую и проверочную. По первым 85 наблюдениям обучающего множества значений будут вычисляться коэффициенты моделей двух сравниваемых типов – $ARMA(p,q)$ и $ReCARE(p,g)$. А последние 19 наблюдений ряда будут использоваться как проверочное множество для каждой из этих моделей. На этих последних значениях будут выполняться с помощью оценённых на обучающем множестве моделей краткосрочные прогнозы на один шаг: сначала на 86–м наблюдении, затем на 87–м наблюдении и т. д. до последнего 104 наблюдения.

Прогнозные значения сравнивались с фактическими значениями, и вычислялась ошибка ретропрогноза. Так же, как и в случае сравнения по точности аппроксимации моделей типа $ARMA(p, q)$ и $ReCARE(p, g)$, выберем по две наилучшие модели каждого типа, которые показывают наименьшую дисперсию ошибки ретропрогноза на проверочном множестве. Эти результаты приведены в табл. 2.8.

Таблица 2.8.
Сравнительная точность ретропрогноза моделей $ARMA(p,q)$ и $ReCARE(p,g)$

Вид модели	Результаты аппроксимации на обучающем множестве			СКО ошибки ретропрогноза на проверочном множестве
	σ	AIC	BIC	
Модели $ARMA(p,q)$				
$ARMA(5,1)$	121,913	8,867	9,060	117,275
$ARMA(3,1)$	125,071	9,117	9,284	118,661
Модели $ReCARE(p,g)$				
$ReCARE(5,4)$	95,1161	8,512	8,379	111,619
$ReCARE(1,3)$	126,530	9,068	9,152	116,275

Из табл. 2.8 видно, что наилучшая в своём классе модель $ReCARE(5,4)$ прогнозирует 19 последних наблюдений с минимальной ошибкой ретропрогноза, поскольку для неё среднеквадратичное отклонение равно σ

=111,619. При этом наилучшая модель $ARMA(5,1)$ в сравниваемом классе моделей $ARMA(p,q)$ даёт более высокую СКО ошибки ретропрогноза, а именно $\sigma = 117,275$. Это на 5 % больше, чем у модели $ReCARE(5,4)$. А пять процентов повышения точности прогноза это значимая величина.

Интересно и то, что модель $ReCARE(5,4)$ оказалась лучшей в аппроксимации прошлых 85 значений – её СКО на 24 % меньше, чем у лучшей модели в классе $ARMA(p,q)$. Это столь серьёзная величина, что все информационные критерии отдают предпочтение модели $ReCARE(5,4)$ при том, что для её использования необходимо оценить $5 \cdot 2 = 10$ неизвестных коэффициентов, а у лучшей модели $ARMA(5,1)$ – только $5 + 1 = 6$ неизвестных коэффициентов.

Интересно, что для всего рассматриваемого в качестве примера ряда, состоящего из 104 наблюдений, оптимальный сдвиг g оказался равным 3 (табл. 2.7), а с позиций ретропрогноза на последних 19 наблюдениях этого ряда оптимальный сдвиг g ошибки оказался равным 4 (табл. 2.8). Как видно, они близки друг другу, и это значит, что для самого ряда характерна некоторая задержка влияния ошибки на текущий результат. Поскольку нам не известно, что за ряд представлен в базе за номером 2830, то мы не можем дать экономическую интерпретацию этому явлению.

Итак, мы видим, что как с позиций наилучшей аппроксимации исходного ряда, так и с позиций ретропрогноза новая модель $ReCARE(p,g)$ оказалась лучше, чем общеизвестная модель $ARMA(p,q)$. Из этого, конечно же, не следует вывод о том, что модели этого класса всегда будут точнее моделей $ARMA(p,q)$. Для данного ряда, выбранного случайным образом, она оказалась лучше, а для другого ряда она может оказаться хуже.

Но уже сейчас можно сделать вывод: модель $ReCARE(p,g)$ может занять в инструментарии краткосрочного экономического прогнозирования то же место, что и модели класса $ARMA(p,q)$, выступая в ряде случаев более успешной альтернативой моделям этого класса.

2.9. Модели с нелинейными ошибками

Модель $ARMA(p, q)$ имеет множество подвидов и подклассов. Один из них – это $NARMA(p, q)$ – нелинейные авторегрессионные модели. В моделях этого подкласса нелинейными являются переменные модели – экзогенные или эндогенные – в зависимости от формы модели.

Наш подход предполагает возможность построения не только аналогичных нелинейных моделей $NCARE(p, g)$, но и нового подкласса моделей, у которых нелинейное влияние оказывает ошибка ε_t . Поскольку в исходной модели $CARE(p)$ мы рассматриваем эту ошибку как дополнительную характеристику моделируемого процесса, то эта характеристика может принимать разные формы, в том числе и нелинейные, то есть исходная комплексная переменная будет представлена так: $(y_{1t} + if(\varepsilon_t))$. Подставляя эту переменную в модель $CARE(p)$, получим:

$$\hat{y}_t + if(\hat{\varepsilon}_t) = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + if(\varepsilon_{t-\tau})) \quad (2.9.1)$$

Для отличия этой модели от других моделей рассматриваемого семейства назовём её моделью $CARNE(p)$.

И вновь нам следует рассматривать комплекснозначную форму записи (2.9.1) как более компактную форму записи системы двух равенств – действительной и мнимой частей этой модели:

$$\begin{cases} \text{Re } CARNE(p): & \hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} f(\varepsilon_{t-\tau}), \\ \text{m } CARNE(p): & f(\hat{\varepsilon}_t) = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} f(\varepsilon_{t-\tau}) + \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} y_{t-\tau}. \end{cases} \quad (2.9.2)$$

Очевидный интерес представляет действительная часть модели, а именно $\text{Re}CARNE(p)$:

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} f(\varepsilon_{t-\tau}) \quad (2.9.3)$$

Рассмотрим свойства этой модели.

Поскольку ошибки аппроксимации имеют положительные, отрицательные и нулевые значения, не каждая функция $f(\varepsilon_t)$ может быть использована в этой модели, например логарифмическая функция использована

быть не может, поскольку областью определения функции является множество всех положительных чисел.

Самым простым вариантом представления в модели (2.9.1), а значит, и в модели (2.9.3) функции от ошибки аппроксимации, является степенная функция

$$f(\varepsilon_{t-\tau}) = \varepsilon_{t-\tau}^\alpha. \quad (2.9.4)$$

Тогда модель (2.9.3) примет вид

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} \varepsilon_{t-\tau}^\alpha. \quad (2.9.5)$$

Если в модели (2.9.5) показатель степени будет $\alpha = 1$, то мы имеем модель $CARE(p)$, а во всех остальных случаях будут получены отличные от неё модели. Поэтому модель $CARNE(p)$ и её действительная часть (2.9.5) являются более общими моделями, которые включают в себя модель $CARE(p)$ и её действительную часть $ReCARE(p)$.

Показатель степени α отличает новую модель и в зависимости от его значений меняются свойства модели.

В том случае, когда прогнозист исследует стационарный процесс, ошибка аппроксимации ε_t становится сравнимой по масштабу со значениями моделируемого ряда y_t . Поэтому использование в качестве показателя степени α ряда натуральных чисел, следующих после единицы $n=2,3,\dots$ приводит к резкому росту вычисляемых значений и модель идёт «вразнос». Это вызвано характером авторегрессии. Поэтому от такого характера задания степенного вида модели приходится отказаться.

Можно использовать другой способ задания показателя степени модели, когда степень является дробной, например:

$$f(\varepsilon_{t-\tau}) = \varepsilon_{t-\tau}^{1/n}. \quad (2.9.6)$$

Здесь n – числа натурального ряда.

Сразу же следует обратить внимание на то, что для чётных значений натурального ряда мы имеем отличительную особенность. Поскольку ошибки аппроксимации (или, как их иногда иначе называют, остатки) могут быть как положительными, так и отрицательными, то в случае чётных значений n будут генерироваться действительные (при неотрицательных

ошибках ε_t) и мнимые числа (при отрицательных ошибках ε_t). Модель становится необычной. Эту особенность мы рассмотрим чуть позже. А сейчас обратим внимание на модель

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} \varepsilon_{t-\tau}^{1/n}, \quad (2.9.7)$$

у которой $n = 3, 5, 7, \dots$

В этой модели ошибка аппроксимации учитывается в меньшей степени, чем в модели $ReCARE(p)$, поскольку из ошибки аппроксимации вычисляется корень $1/n$ -й степени, после чего это значение подставляется в модель. То есть влияние ошибки аппроксимации на моделируемый результат существенно снижается и модель становится менее чувствительной к ней. Иногда это будет являться преимуществом, иногда недостатком.

Сравним модель $ReCARE(p)$ и $ReCARNE(p)$ для разных случаев задания показателя степени в (2.9.7) на практическом примере. Воспользуемся для сравнения этих моделей другим рядом данных. Ранее мы использовали ряд № 2830, а теперь используем следующий за ним в базе данных ряд № 2831. Он так же имеет 104 значения, как и ряд № 2830, поэтому с позиций представительности мы ничего не теряем. Результаты вычислений приводятся в табл. 2.9.

Ещё раз обращаю внимание на то, что при $\alpha = 1$ модель $ReCARNE(p)$ превращается в модель $ReCARE(p)$.

В таблице жирным шрифтом выделены лучшие значения показателей для каждой из моделей. Из неё видно, что модель $ReCARE(1)$ оказалась точнее других моделей в аппроксимации исходного ряда, да и с позиций информационного критерия она оказалась наилучшей. Впрочем, можно заметить, что модель $ReCARNE(5)$ уже вполне соперничает с моделью $ReCARE(1)$. Причём, как следует из таблицы результатов 2.4.1, с ростом n возрастает и точность модели (2.9.7).

Это даёт основания предположить, что для рассматриваемого ряда с ростом n можно построить такую модель, которая окажется точнее, чем модель $ReCARE(1)$. И эта гипотеза подтвердилась, что следует из данных табл. 2.10.

Таблица 2.9.
Сравнительная точность аппроксимации ряда №2831 моделями
ReCARE(p) и *ReCARNE(p)*

Лаг, <i>p</i>	Модель <i>ReCARE(p)</i>		Модель <i>ReCARNE(p)</i> (2.9.7) при $1/n$ равном:							
			1/3		1/5		1/7		1/9	
	σ	<i>BIC</i>	σ	<i>BIC</i>	σ	<i>BIC</i>	σ	<i>BIC</i>	σ	<i>BIC</i>
1	693,279	13,220	784,130	13,466	792,950	13,489	801,724	13,511	792,694	13,488
2	725,047	13,311	766,168	13,421	766,079	13,421	764,766	13,417	764,473	13,417
3	721,417	13,302	733,496	13,335	720,295	13,299	730,633	13,327	734,859	13,339
4	722,288	13,305	712,012	13,277	706,471	13,261	715,797	13,287	719,579	13,298
5	724,495	13,312	743,862	13,365	714,215	13,284	703,718	13,254	699,469	13,242
6	727,046	13,321	722,055	13,307	721,837	13,306	727,947	13,323	732,073	13,334

Таким образом, для рассматриваемого ряда данных оптимальной как с позиций ошибки аппроксимации, так и с позиций информационного критерия оказалась модель следующего вида:

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^5 a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^5 a_{1\tau} \varepsilon_{t-\tau}^{1/15}$$

Хорошо известно о том, что далеко не всегда наилучшая с позиций аппроксимации модель будет при этом отлично прогнозировать описываемый ряд. Поэтому, исследуя возможность использования новой модели с нелинейными ошибками, необходимо проверить и то, насколько она может быть использована в прогнозировании.

Для проверки такой возможности будем использовать тот же ряд № 2831, который состоит из 104 наблюдений. Вновь разобьём его на две части – обучающую и проверочную. По первым 72 наблюдениям обучающего множества значений будут вычисляться коэффициенты моделей двух сравниваемых типов – $ARMA(p, q)$ и $ReCARE(p, g)$. А последние 32 наблюдения ряда будут использоваться как проверочное множество для точности ретро-прогноза для каждой из этих моделей.

Таблица 2.10.
Сравнительная точность аппроксимации ряда №2831 моделями
ReCARE(p) и *ReCARNE(p)*

Лаг, p	Модель <i>ReCARE(p)</i>		Модель <i>ReCARNE(p)</i> (2.9.6) при $1/n$ равном:			
			1/15		1/17	
	σ	<i>BIC</i>	σ	<i>BIC</i>	σ	<i>BIC</i>
1	693,279	13,220	794,627	13,493	794,895	13,494
2	725,047	13,311	764,194	13,416	764,672	13,417
3	721,417	13,302	734,135	13,337	735,058	13,339
4	722,288	13,305	727,184	13,319	728,339	13,322
5	724,495	13,312	691,711	13,219	691,820	13,220
6	727,046	13,321	735,895	13,345	736,197	13,346

На этих последних значениях будут выполняться с помощью оценённых на обучающем множестве моделей краткосрочные прогнозы на один шаг: сначала на 73-м наблюдении, затем на 74-м наблюдении и т. д. до последнего 104 наблюдения.

Затем от фактических значений проверочного множества вычитаются прогнозные значения и вычисляются СКО ошибки ретропрогноза на проверочном множестве σ_f .

Для понимания свойств модели вычислялась и СКО ошибки аппроксимации σ на обучающем множестве.

Результаты этих вычислений занесены в табл. 2.11.

Из результатов, приведённых в табл. 2.11, видно, что лучше всего справилась с задачей точного краткосрочного прогнозирования на примере рассматриваемого ряда модель *ReCARNE(3)* с показателем степени 1/5. При этом результаты ретропрогноза с помощью модели *ReCARE(1)* оказались невероятно плохими: СКО ретропрогноза оказалось равной 6826,821, что в одиннадцать раз больше, чем СКО ретропрогноза модели *ReCARE(3)* с показателем степени ошибки 1/5.

Таблица 2.11.
Сравнительная точность ретропрогноза по ряду №2831 моделями
ReCARE(p) и *ReCARNE(p)*

Лаг, p	Модель $ReCARE(p)$		Модель $ReCARNE(p)$ (2.9.6) при $1/n$ равном:							
			1/3		1/5		1/7		1/9	
	σ	σ_f	σ	σ_f	σ	σ_f	σ	σ_f	σ	σ_f
1	734,742	6826,821	860,526	621,865	869,646	628,912	879,571	629,687	870,685	632,682
2	770,670	736,621	826,828	676,411	826,313	677,804	826,571	668,526	826,451	672,004
3	762,279	760,198	787,891	652,227	782,001	613,011	803,485	659,061	805,725	617,513
4	766,992	773,879	741,090	697,681	733,624	724,195	736,586	726,294	751,129	686,260
5	735,628	926,495	777,610	687,691	740,946	763,679	748,335	634,481	742,979	704,784
6	740,710	784,822	749,599	756,271	747,825	794,749	765,297	734,374	762,374	782,512

Как это произошло, можно увидеть на рисунке 2.7.

Модель, как можно заметить из рисунка, вполне сносно описала обучающее множество вплоть до 72 наблюдения. А вот некоторую волатильность исходных данных, начиная с 73 по 79 наблюдение, модель не «перенесла» – она пошла в разнос и стала задираться вверх.

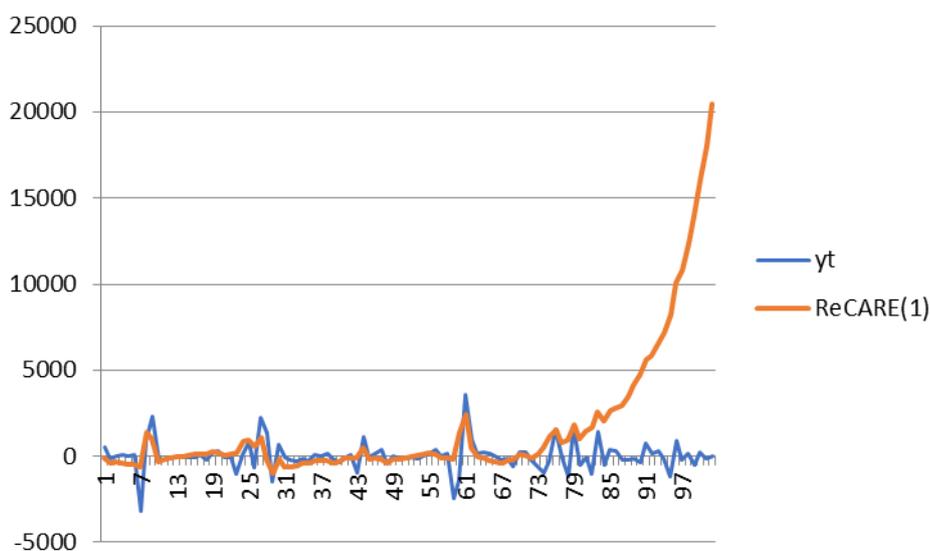


Рисунок 2.7. Исходный ряд y_t и расчётные значения модели $ReCARE(1)$

Кстати. И модель ReCARNE(5) с показателем степени для ошибки аппроксимации, равным 1/15, которая показала в таблице 2.10 наилучший результат, тоже оказалась не самой лучшей с позиций ретропрогноза на проверочном множестве.

Таблица 2.12.
Сравнительная точность ретропрогноза по ряду № 2831 моделями ReCARNE(p)

Лаг, p	Модель ReCARNE(p) (2.9.6) при $1/n$ равном:					
	1/5		1/15		1/17	
	σ	σ_f	σ	σ_f	σ	σ_f
1	869,646	628,912	871,368	684,068	872,575	645,236
2	826,313	677,804	826,481	674,935	826,476	674,602
3	782,001	613,011	795,369	661,705	796,434	666,663
4	733,624	724,195	762,254	720,519	757,440	737,850
5	740,946	763,679	739,392	658,642	737,350	676,733
6	747,825	794,749	767,229	784,903	764,740	805,294

В табл. 2.12 показаны результаты ретропрогноза этой модели и модели с показателем степени 1 / 17 по сравнению с наилучшей моделью ReCARNE(3) с показателем степени 1 / 5.

Ряд № 2831 был взят нами наугад для демонстрации свойств модели ReCARNE(p). Мы не ставили задачу нахождения лучшей прогнозной модели для этого ряда и выполнить краткосрочный экономический прогноз. И то, что нелинейная по ошибке модель демонстрирует хорошие свойства как в аппроксимации, так и в прогнозировании, свидетельствует о возможности использования на практике этих моделей.

Здесь следует обратить внимание на то, что показатель степени α модели (2.9.5) может принимать не только положительные дробные значения так, как это показано в (2.9.7), но и отрицательные значения:

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p a_{0\tau} y_{t-\tau} - \sum_{\tau=1}^p a_{1\tau} \varepsilon_{t-\tau}^{-1/n} \quad (2.9.8)$$

Важно, чтобы здесь, как и в (2.9.7) из натурального ряда n выбирались исключительно нечётные значения: 1, 3, 5, 7, ...

Поскольку отрицательная степень, в которую возводится ошибка аппроксимации, означает, что ошибка перемещается в числитель, то возможно в этом случае возведение её в числителе в отрицательную нечётную степень:

$$\alpha = (-1), (-3), (-5), (-7), (-9), \dots \quad (2.9.9)$$

Таким образом, в модели (2.9.5) показатель степени α может принимать следующие значения:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots, 0, \dots, (-\frac{1}{9}), (-\frac{1}{7}), (-\frac{1}{5}), (-\frac{1}{3}), (-1), (-3), (-5), \dots \quad (2.9.10)$$

И, выбирая из этого множества значений показателей степени ошибки аппроксимации наилучший, можно осуществить дополнительную «настройку» отличной модели $ReCARE(p)$, превращая её в $ReCARNE(p)$, если это окажется целесообразным.

Точно так же можно уточнить и модель $ReCARE(p, g)$, превратив её в нелинейную по отношению к ошибке аппроксимации модель $ReCARNE(p, g)$. Поскольку нет никаких затруднений с таким преобразованием, мы не будем останавливаться на нём более подробно.

2.10. Модель $ReCARNE(p)$ с чётными числами в показателях степени

Изучая модель (2.9.5) как наиболее простую среди множества возможных моделей класса $ReCARNE(p)$, мы обратили внимание на то, что показатель степени может быть равен $\alpha=1/n$, где n – нечётные значения натурального ряда чисел. Исключение из этого ряда чисел нечётных значений объясняется просто – ошибка аппроксимации может принимать отрицательные

значения, а в области действительных значений корень чётной степени из отрицательного числа не существует.

Но поскольку мы работаем как раз в области комплексных чисел, то корень чётной степени из отрицательного числа нас не должен смущать.

Вновь рассмотрим модель (2.9.1), но уже применительно к случаю, когда нелинейность ошибки аппроксимации ε_t определяется её возведением в дробную степень

$$\hat{y}_t + i\varepsilon_t^{1/n} = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\varepsilon_{t-\tau}^{1/n}) \quad (2.10.1)$$

у которой $n = 2, 4, 6, \dots$

Исходя из общенаучного метода «от простого к сложному», рассмотрим самый простой вариант модели (2.10.1) в случае, когда $p=1$ и $\alpha=1/2$. Модель (2.10.1) для этого случая может быть записана так:

$$\hat{y}_t + i\sqrt{\varepsilon_t} = (a_{01} + ia_{11})(y_{t-1} + i\sqrt{\varepsilon_{t-1}}) \quad (2.10.2)$$

Или

$$\hat{y}_t + i\sqrt{\varepsilon_t} = a_{01}y_{t-1} - a_{11}\sqrt{\varepsilon_{t-1}} + i(a_{01}\sqrt{\varepsilon_{t-1}} + a_{11}y_{t-1}) \quad (2.10.3)$$

Если ошибка аппроксимации ε_t неотрицательна, то эта модель повторяет ранее изученную в предыдущем параграфе модель *CARNE(1)*.

Но в том случае, когда ошибка ε_t становится отрицательной, то отрицательным становится подкоренное выражение в (2.10.3). А поскольку мы работаем в поле комплексных чисел, то это означает, что квадратный корень из отрицательной ошибки следует рассматривать как мнимое число. И это существенно меняет саму модель и её свойства.

В том случае, когда $\varepsilon_{t-1} < 0$, ошибку можно записать так:

$$\varepsilon_{t-1} = -|\varepsilon_{t-1}| \quad (2.10.4)$$

Тогда для $\varepsilon_{t-1} < 0$ имеем:

$$\sqrt{\varepsilon_{t-1}} = i\sqrt{|\varepsilon_{t-1}|} \quad (2.10.5)$$

Подставляя (2.10.5) в модель (2.10.3), получим:

$$\hat{y}_t - \sqrt{\varepsilon_t} = a_{01}y_{t-1} - ia_{11}\sqrt{|\varepsilon_{t-1}|} - a_{01}\sqrt{|\varepsilon_{t-1}|} + ia_{11}y_{t-1} \quad (2.10.6)$$

А это равенство возможно только в том случае, когда действительные и мнимые составляющие левой части равны действительной и мнимой составляющим правой части. Относительно мнимых частей равенства (2.10.6) это означает следующее:

$$0 = a_{11}(y_{t-1} - \sqrt{|\varepsilon_{t-1}|}) \quad (2.10.7)$$

Это равенство выполняется в двух случаях: когда

$$y_{t-1} - \sqrt{|\varepsilon_{t-1}|} = 0 \quad \vee \quad a_{11} = 0 \quad (2.10.8)$$

Первый случай, когда выполняется равенство

$$y_{t-1} = \sqrt{|\varepsilon_{t-1}|}$$

следует признать маловероятным.

А второй случай: $a_{11} = 0$ является легко выполнимым, поскольку он в равенстве (2.10.6) встречается только в мнимой части модели. А её действительная часть выглядит так:

$$\hat{y}_t - \sqrt{\varepsilon_t} = a_{01}(y_{t-1} - \sqrt{|\varepsilon_{t-1}|}) \quad (2.10.9)$$

С учётом этого действительная часть рассматриваемой модели для любых значений ошибки аппроксимации будет иметь такой вид:

$$\begin{cases} \hat{y}_t = a_{01}y_{t-1} - a_{11}\sqrt{\varepsilon_{t-1}}, & \forall \varepsilon_{t-1} \geq 0, \\ \hat{y}_t = \sqrt{\varepsilon_t} + a_{01}(y_{t-1} - \sqrt{|\varepsilon_{t-1}|}), & \forall \varepsilon_{t-1} < 0. \end{cases} \quad (2.10.10)$$

Эта модель описывает реальные значения с некоторой ошибкой аппроксимации:

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t \quad (2.10.11)$$

Подставляя в (2.10.10) ошибку аппроксимации (2.10.11), получим:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = y_t - (a_{01}y_{t-1} - a_{11}\sqrt{\varepsilon_{t-1}}), & \forall \varepsilon_{t-1} \geq 0, \\ \varepsilon_t = y_t - (\sqrt{\varepsilon_t} + a_{01}(y_{t-1} - \sqrt{|\varepsilon_{t-1}|})), & \forall \varepsilon_{t-1} < 0. \end{cases} \quad (2.10.12)$$

Если прогнозисту необходимо оценить коэффициенты модели $ReCARNE(p)$ при показателе степени $\alpha=1/2$ и $p=1$, так, чтобы дисперсия ошибки аппроксимации была минимальна, то ему следует минимизировать сумму квадратов отклонений (2.10.12) на всём множестве наблюдений. Понятно, что просто такую задачу не решить, поскольку, меняя

коэффициенты a_{01} и a_{11} в (2.10.12), мы получим меняющиеся значения ошибок аппроксимации. Поэтому для решения задачи необходимо использовать программу с условными переходами, которая будет ориентировать вычисление ошибки аппроксимации то на первую, то на вторую часть системы (2.10.12) в зависимости от знака предыдущей ошибки аппроксимации ε_{t-1} .

Решение этой задачи и исследование свойств полученной модели мы отложим на будущее.

2.11. Модель $CMA(q)$

Модель $CARE(p)$ (2.7.2) описывает одномерный ряд с некоторой комплексной ошибкой:

$$y_t + i\varepsilon_t = \hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_t + (\mu_{rt} + i\mu_{it}). \quad (2.11.1)$$

Этот ряд рассматривается по определению как стационарный.

Можно рассматривать комплексную ошибку $\mu_{rt} + i\mu_{it}$ как некоторый комплексный «белый шум». В таком случае комплексную переменную можно вычислить через этот белый шум так, как это делается с действительными процессами с помощью модели $MA(q)$, то есть:

$$y_t + i\varepsilon_t = (\mu_{rt} + i\mu_{it}) + \sum_{\tau=1}^q (b_{0\tau} + ib_{1\tau})(\mu_{r,t-1} + i\mu_{i,t-1}). \quad (2.11.2)$$

Где $b_{0\tau}$ и $b_{1\tau}$ – некоторые коэффициенты модели; μ_{rt} и μ_{it} – неизвестные ошибки в момент времени t ; $\mu_{r,t-1}$ и $\mu_{i,t-1}$ – известные ошибки в предшествующий момент времени $t-1$; q – лаг.

Это – модель комплексной «скользящей средней», которую логично будет обозначить по аналогии с $MA(q)$ как $CMA(q)$.

Задача в целом сводится к поиску таких коэффициентов модели (2.11.2), чтобы минимизировать сумму квадратов:

$$\sum_t (\mu_{rt} + i\mu_{it})^2 \rightarrow \min. \quad (2.11.3)$$

Но у этой модели есть действительная и мнимая части. Поэтому задача может быть упрощена, если рассматривать отдельно действительную и

мнимую части модели (2.11.2). Модель (2.11.2) может быть представлена как система двух равенств:

$$\begin{cases} \text{Re } CMA(q) & y_t = \mu_{rt} + \sum_{\tau=1}^q (b_{0\tau} \mu_{r,t-\tau} - b_{1\tau} \mu_{i,t-\tau}) \\ \text{Im } CMA(q) & \varepsilon_t = \mu_{it} + \sum_{\tau=1}^q (b_{0\tau} \mu_{i,t-\tau} + b_{1\tau} \mu_{r,t-\tau}) \end{cases} \quad (2.11.4)$$

Модель $\text{Re}CMA(q)$ описывает исходный ряд, а модель $\text{Im}CMA(q)$ – ошибку аппроксимации.

Интерес представляет действительная часть модели, поскольку прогнозируется именно показатель y_t . Но, как можно заметить из (2.11.4) для этого следует использовать и составляющую $\mu_{i,t-\tau}$, которая связана с мнимой частью модели.

Для того чтобы понять, как использовать $\text{Re}CMA(q)$ на практике, – рассмотрим самый простой случай этой модели, а именно $CMA(1)$:

$$y_t + i\varepsilon_t = \mu_{rt} + i\mu_{it} + (b_{01} + ib_{11})(\mu_{r,t-1} + i\mu_{i,t-1}) \quad (2.11.5)$$

Действительная и мнимая части этой модели будут таковыми:

$$\begin{cases} \text{Re } CMA(1) & y_t = \mu_{rt} + b_{01}\mu_{r,t-1} - b_{11}\mu_{i,t-1} \\ \text{Im } CMA(1) & \varepsilon_t = \mu_{it} + b_{01}\mu_{i,t-1} + b_{11}\mu_{r,t-1} \end{cases} \quad (2.11.6)$$

Для вычисления этой модели на первом шаге $t=1$ следует, прежде всего, вычислить расчётное значение показателя по известным начальным величинам комплексной ошибки и по некоторым стартовым значениям коэффициентов b_{01} и b_{11} :

$$\hat{y}_1 = b_{01}\mu_{r0} - b_{11}\mu_{i0} \quad (2.11.7)$$

Начальные ошибки μ_{rt} и μ_{it} могут быть приравнены нулю, а могут быть инструментом дополнительной настройки модели.

Зная это расчётное значение показателя на первом наблюдении, можно вычислить текущую ошибку:

$$\varepsilon_1 = y_1 - \hat{y}_1 \quad (2.11.8)$$

Она же является первым членом ряда значений «белого шума»:

$$\mu_{r1} = \varepsilon_1 = y_1 - \hat{y}_1 \quad (2.11.9)$$

Подставляя значение текущей ошибки в мнимую часть (2.11.6), можно вычислить:

$$\mu_{i1} = \varepsilon_1 - (b_{01}\mu_{i0} + b_{11}\mu_{r0}) \quad (2.11.10)$$

Теперь можно перейти ко второму наблюдению, $t=2$:

$$\hat{y}_2 = b_{01}\mu_{r1} - b_{11}\mu_{i1} = b_{01}\varepsilon_1 - b_{11}\mu_{i1} \quad (2.11.11)$$

После чего вычисляется текущая ошибка аппроксимации:

$$\varepsilon_2 = y_2 - \hat{y}_2 = \mu_{r2} \quad (2.11.12)$$

Затем – ошибка мнимой части:

$$\mu_{i2} = \varepsilon_2 - (b_{01}\mu_{i1} + b_{11}\mu_{r1}) \quad (2.11.13)$$

После чего следует перейти к третьему наблюдению, далее к четвёртому и т. п.

Коэффициенты модели находятся численными методами так, чтобы минимизировалась сумма:

$$\sum_t \mu_{rt}^2 = \sum_t \varepsilon_t^2 \rightarrow \min \quad (2.11.14)$$

Не изменится алгоритм оценивания коэффициентов, если рассмотреть следующую по сложности модель $СМА(2)$:

$$y_t + i\varepsilon_t = \mu_{rt} + i\mu_{it} + (b_{01} + ib_{11})(\mu_{r,t-1} + i\mu_{i,t-1}) + (b_{02} + ib_{12})(\mu_{r,t-2} + i\mu_{i,t-2}) \quad (2.11.15)$$

Действительная и мнимая части этой модели будут такими:

$$\begin{cases} \text{Re}СМА(1) & y_t = \mu_{rt} + b_{01}\mu_{r,t-1} - b_{11}\mu_{i,t-1} + b_{02}\mu_{r,t-2} - b_{12}\mu_{i,t-2} \\ \text{Im}СМА(1) & \varepsilon_t = \mu_{it} + b_{01}\mu_{i,t-1} + b_{11}\mu_{r,t-1} + b_{02}\mu_{i,t-2} + b_{12}\mu_{r,t-2} \end{cases} \quad (2.11.16)$$

И вычисления в такой модели следует начинать с $t=2$.

Сравним модель $\text{Re}СМА(q)$ с моделью $МА(q)$, о которой писалось ранее в параграфе 2.1. Сравнение проведём на примере ряда №2831 (табл. 2.13).

Как можно убедиться из данных табл. 2.13, модель $\text{Re}СМА(p)$ в целом точнее описывает реальный ряд значений. Но при этом за счёт в два раза большего количества коэффициентов она всегда проигрывает модели $МА(q)$ по информационному критерию.

Таблица 2.13.
Сравнительная точность моделей $MA(q)$ и $ReCMA(q)$

Лаг, q	σ	BIC	σ	BIC
	Модель $ReCMA(q)$		Модель $MA(q)$	
1	797,469	13,453	804,971	13,427
2	738,715	<u>13,391</u>	744,462	<u>13,316</u>
3	714,125	13,416	712,687	13,322
4	708,915	13,496	712,687	13,322
5	712,259	13,601	713,723	13,373
6	724,500	13,732	723,980	13,731

Такие же расчёты были сделаны и для других рядов рассматриваемой базы: №№ 2832, 2833 и 2834. В табл. 2.14 приведены эти результаты.

Таблица 2.14.
Сравнительная точность моделей $MA(q)$ и $ReCMA(q)$ на рядах №№ 2832, 2833 и 2834

№2832					№2833					№2834				
Лаг q	σ	BIC	σ	BIC	Лаг q	σ	BIC	σ	BIC	Лаг q	σ	BIC	σ	BIC
	Модели $ReCMA(q)$		Модели $MA(q)$			Модели $ReCMA(q)$		Модели $MA(q)$			Модели $ReCMA(q)$		Модели $MA(q)$	
1	2304,4	15,58	2339,5	15,56	1	1239,3	14,34	1241,8	14,29	1	38,7	7,40	38,9	7,37
2	2221,3	15,59	2252,0	15,53	2	1199,8	14,36	1226,4	14,31	2	37,5	7,43	37,6	7,35
3	2204,2	15,67	2203,3	15,58	3	1149,8	14,37	1211,7	14,38	3	35,7	7,43	37,2	7,42
4	2210,7	15,77	2203,3	15,58	4	1154,8	14,47	1211,7	14,38	4	35,6	7,52	37,2	7,42
5	2199,1	15,85	2206,5	15,63	5	1135,1	14,53	1211,0	14,43	5	35,3	7,597	37,0	7,455
6	2199,6	15,95	2201,27	15,96	6	1163,99	14,68	1189,88	14,76	6	33,69	7,60	36,71	7,77

И вновь можно убедиться в том, что модель $ReCMA(p)$ для этих трёх рядов в целом точнее описывает исходные ряды, чем модель $MA(q)$, но информационный критерий показывает, что уменьшение дисперсии за счёт

усложнения модели в этих случаях не имеет смысла. По этому критерию модель $MA(q)$ является лучшей для всех рядов.

Но это не означает, что модель $ReCMA(p)$ не выдерживает конкуренции с моделью $MA(q)$. Встречаются и другие случаи. Вот в табл. 2.15 приведены расчёты, выполненные на более коротких рядах данных используемой базы, а именно на рядах №№ 646, 647, 649.

Таблица 2.15.
Сравнительная точность моделей $MA(q)$ и $ReCMA(q)$ на рядах №№ 646, 647 и 649

№646					№647					№649				
Ляг q	σ	BIC	σ	BIC	Ляг q	σ	BIC	σ	BIC	Ляг q	σ	BIC	σ	BIC
	Модели $ReCMA$ (q)		Модели $MA(q)$			Модели $ReCMA$ (q)		Модели $MA(q)$			Модели $ReCMA$ (q)		Модели $MA(q)$	
1	931,43	13,85	953,62	13,81	1	499,13	12,60	646,53	13,03	1	533,80	12,73	536,97	12,66
2	910,32	13,98	942,18	13,87	2	518,48	12,85	522,46	12,69	2	485,61	12,72	539,82	12,76
3	947,80	14,24	960,83	14,10	3	394,37	12,49	530,77	12,91	3	460,62	12,80	518,81	12,87
4	786,44	14,06	960,83	14,10	4	355,18	12,47	530,77	12,91	4	506,41	13,18	518,81	12,87
5	631,72	13,82	972,55	14,22	5	249,89	11,96	522,87	12,98	5	428,23	13,04	519,61	12,97
6	539,65	13,71	882,80	14,69	6	196,42	11,69	402,41	13,12	6	366,41	12,94	520,66	13,64
7	499,63	13,767	879,99	14,23		332,40	12,95	425,78	12,78		374,72	13,19	504,53	13,12

Ряды № 2831, 2832, 2833, 2834 содержат 103 наблюдения, а ряды № 646, № 647 и № 649 содержат почти в два с половиной раза меньше наблюдений, а именно – 43. Для этих более коротких рядов новая модель $ReCMA(q)$ оказалась лучше модели $MA(q)$ по критерию минимума дисперсии ошибки аппроксимации. Так, для ряда № 646 модель $ReCMA(7)$ даёт $\sigma = 499,63$. Модель $MA(7)$, у которой дисперсия ошибки аппроксимации наименьшая в своём классе для этого ряда, имеет существенно более высокое значение СКО: $\sigma = 879,99$. Наилучшая по информационному критерию

модель $ReCMA(6)$ имеет $BIC = 13,709$, а наилучшая по этому критерию модель $MA(1)$ имеет $BIC = 13,805$. При этом модель $ReCMA(6)$ содержит 12 коэффициентов, а модель $MA(1)$ – всего один коэффициент, и всё равно она проигрывает новой модели по информационному критерию.

И для ряда № 647 модель $ReCMA(q)$ показала столь существенное повышение точности аппроксимации, что по информационному критерию $BIC = 11,688$ модель $ReCMA(6)$, имеющая 12 коэффициентов, предпочтительнее модели $MA(7)$, у которой семь коэффициентов, но $BIC = 12,78$. Тем самым усложнение модели и в случае ряда № 646, и в случае ряда № 647 оправдано.

А вот для ряда №649 ситуация несколько иная. И здесь модель $ReCMA(q)$ показывает существенно лучший результат по дисперсии ошибки аппроксимации. Для лучшей в своём классе $ReCMA(6)$ СКО ошибки аппроксимации равна $\sigma = 366,405$, а для лучшей в своём классе модели $MA(7)$ она составляет $\sigma = 504,532$. Это на 37% выше. Но по информационному критерию лучшей оказывается для этого ряда модель из класса $MA(q)$, а именно модель $MA(1)$ с $BIC = 12,656$.

Мы уже убедились ранее в том, что наилучшая в аппроксимации модель редко когда является наилучшей в прогнозе. Поэтому имеет смысл сравнить эти модели друг с другом на процедуре ретропрогноза. Воспользуемся для этого всё теми же рядами № 2831, 2832, 2833, 2834 и № 646, 647, 649 для того, чтобы сравнить лучшие модели с позиций аппроксимации с лучшими моделями по точности ретропрогноза. Для этого разделим каждый ряд на обучающее множество (первые три четверти ряда) и проверочное множество (последняя четверть ряда) для выполнения ретропрогноза с помощью моделей, коэффициенты которых получены на обучающем множестве.

Результаты вычислений приведены в табл. 2.16. Здесь же приведены для информации результаты того, насколько хорошо каждая модель аппроксимировала прошлое на обучающем множестве, и величина информационного критерия для каждой модели.

Из результатов, приведённых в таблице 2.16, можно заметить, что лучшие по точности аппроксимации прошлого модели никогда не являются лучшими с позиций точности ретропрогноза.

Таблица 2.16.
Результаты ретропрогноза моделями $MA(q)$ и $ReCMA(q)$ на рядах № 646, 647 и 649

Лаг, q	ReCMA(q)			MA(q)		
	σ аппроксимации	BIC аппроксимации	σ ретропрогноза	σ аппроксимации	BIC аппроксимации	σ ретропрогноза
Ряд № 646						
1	305,775	11,684	146,500	301,157	11,531	147,881
2	310,427	11,964	158,189	311,373	11,726	144,495
3	313,664	12,249	139,897	322,211	12,065	144,668
4	319,498	12,564	149,048	322,211	12,065	144,133
5	324,324	13,478	153,934	328,469	12,251	143,926
6	330,421	13,237	168,974	334,209	12,441	140,877
7	337,085	13,608	676,426	339,045	12,495	139,402
Ряд № 647						
1	46,353	7,911	170,074	64,240	8,441	134,532
2	50,796	8,344	180,711	66,101	8,626	124,634
3	48,810	8,528	180,711	48,445	8,276	1116,578
4	49,091	8,817	193,356	48,445	8,276	323,908
5	39,340	9,259	146,744	57,311	8,759	138,958
6	41,242	9,075	2008,968	52,914	8,755	201,095
7	42,352	9,459	5942,129	56,690	8,918	102,269
Ряд № 649						
1	251,252	11,291	819,683	247,018	11,135	851,776
2	226,646	11,335	3143,612	255,871	11,333	824,731
3	224,527	11,580	2354,797	258,038	11,447	818,388
4	256,748	12,126	828,344	258,038	11,621	815,526
5	221,850	12,128	2440,103	232,361	11,559	1553,784
6	261,647	12,770	1119,804	267,024	11,993	816,607
7	216,989	12,727	3646,674	272,583	12,059	809,938

Более того, для рядов № 646 и 649 модели $MA(q)$, которые хуже всего описывали прошлое, лучше всего прогнозируют будущее.

Таблица 2.17.
 Результаты ретропрогноза моделями $MA(q)$ и $ReCMA(q)$ на рядах № 2831, 2832, 2833 и 2834

Лag, q	$CMA(q)$			$MA(q)$		
	σ аппроксимации	BIC аппроксимации	σ ретропрогноза	σ аппроксимации	BIC аппроксимации	σ ретропрогноза
Ряд № 2831						
1	855,797	13,618	<i>663,17</i>	867,648	13,588	<i>691,54</i>
2	752,546	<i>13,477</i>	889,45	760,202	<i>13,382</i>	869,50
3	727,785	13,529	3228,30	<i>728,229</i>	13,416	837,98
4	723,616	13,639	1212,58	728,229	13,416	810,32
5	728,824	13,777	1242,84	730,628	13,485	818,81
6	<i>702,057</i>	13,828	2176,33	741,244	13,937	826,50
Ряд № 2832						
1	2223,860	15,528	2764,53	2228,541	<i>15,475</i>	2692,69
2	<i>2073,960</i>	<i>15,505</i>	4762,07	2214,649	15,521	2491,48
3	2199,678	15,741	3073,68	<i>2195,724</i>	15,624	2485,63
4	2216,666	15,878	<i>2504,00</i>	2195,724	15,624	<i>2186,91</i>
5	2181,016	15,969	4189,99	2198,341	15,688	2405,83
6	2177,230	16,092	3615,99	2200,897	16,114	2375,42
Ряд № 2833						
1	1246,867	<i>14,371</i>	<i>1246,43</i>	1246,176	<i>14,312</i>	1251,02
2	1201,346	14,413	1508,74	1219,172	14,327	1290,42
3	1080,853	14,320	3261,05	1216,031	14,442	1239,19
4	<i>1046,354</i>	14,376	2913,42	1216,031	14,442	1239,80
5	1101,798	14,603	2468,06	1224,087	14,517	1231,86
6	1128,905	14,778	5562,29	<i>1211,932</i>	14,920	<i>1197,68</i>
Ряд № 2834						
1	40,196	7,501	46,68	40,721	7,470	<i>36,33</i>
2	36,884	7,446	92,30	38,604	<i>7,422</i>	36,70
3	33,565	<i>7,376</i>	91,13	36,813	7,447	36,27
4	34,993	7,580	96,36	36,813	7,447	47,27
5	34,795	7,693	53,04	36,700	7,503	44,54
6	<i>32,689</i>	7,695	<i>43,04</i>	<i>36,564</i>	7,919	43,71

Это модель $MA(7)$ для ряда № 646 и модель $MA(7)$ для ряда № 649. Ни в одном из рассматриваемых случаев модель $CMA(q)$ не стала лучшей в

ретропрогнозе, хотя для последних двух рядов она является наилучшей в аппроксимации прошлых значений.

В табл. 2.17 приведены результаты ретропрогноза для четырёх более длинных рядов - № 2831, 2832, 2833, 2834.

И вновь можно убедиться в том, что существующая модель $MA(q)$ в трёх из четырёх рядов лучше показала себя в краткосрочном прогнозировании на проверочном множестве, нежели модель $SMA(q)$. При этом для всех четырёх рядов модель $SMA(q)$ показала лучшие аппроксимационные свойства на обучающем множестве, чем существующая модель $MA(q)$.

Эти примеры не означают, что для всех прогнозируемых экономических рядов модель $SMA(q)$ будет хуже для целей краткосрочного прогнозирования, чем модель $MA(q)$. Вполне возможна и противоположная ситуация. Но сложность использования модели $SMA(q)$, не подтверждённая повышением точности прогноза, не позволяет рекомендовать её в краткосрочном экономическом прогнозировании как достойную альтернативу $MA(q)$. Пока что она представляет лишь теоретический интерес.

2.12. Модель STAR(p) и влияние текущего времени

В общем случае модель комплексной авторегрессии была представлена в таком виде:

$$\hat{y}_{1t} + i\hat{y}_{2t} = \sum_{\tau=1}^p F(y_{1(t-\tau)} + iy_{2(t-\tau)}) \quad (2.12.1)$$

Ранее мы рассмотрели свойства этой комплекснозначной авторегрессии в том случае, когда комплексная переменная $(y_{1t} + iy_{2t})$ в (2.12.1) была представлена в полной форме, а также в том случае, когда $y_{2t} = \varepsilon_t$. И в том, и в другом случае мы убедились, что эти новые модели выступают достойной альтернативой векторным авторегрессиям $VAR^k(p)$ и популярным сегодня в краткосрочном прогнозировании моделям $ARMA(p, q)$.

Теперь мы рассмотрим комплексную авторегрессию со временем, когда $y_{2t} = t$. В этом случае комплексная переменная принимает вид $(y_{1t} + it)$ и такую модель будем обозначать как $STAR(p)$. В общем виде эта модель будет записываться так:

$$\hat{y}_t + i\hat{t} = \sum_{\tau=1}^p F(y_{(t-\tau)} + i(t-\tau)) \quad (2.12.2)$$

Прежде всего обратим внимание на то, что в модели (2.12.2) прогнозируется не только экономический показатель y_t , но и время t . Во всех моделях авторегрессии время выступает как индекс упорядочивания показателей, но не как активный элемент, учитываемый в прогнозировании. В модели (2.12.2) время выступает и как определяющий фактор, и как зависимая переменная. Это новое свойство у прогнозной модели, и ему следует уделить внимание.

Рассмотрим линейную форму авторегрессии (2.12.2). Она примет вид

$$\hat{y}_t + i\hat{t} = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i(t-\tau)) \quad (2.12.3)$$

Простейшей из этого класса моделей является модель линейной авторегрессии *STAR*(1):

$$\hat{y}_t + i\hat{t} = (a_{01} + ia_{11})(y_{t-1} + i(t-1)) \quad (2.12.4)$$

Эта комплекснозначная функция может быть представлена как система двух действительных равенств – отдельное равенство для вещественной части и отдельное равенство для мнимой части (2.12.4):

$$\begin{cases} \text{Re } STAR(1) & \hat{y}_t = a_0 y_{t-1} - a_1(t-1), \\ \text{Im } STAR(1) & \hat{t} = a_0(t-1) + a_1 y_{t-1}. \end{cases} \quad (2.12.5)$$

Первое уравнение системы (2.12.5) представляет собой двухфакторную регрессию, переменными которой являются показатель y_{t-1} и время $(t-1)$, в которое этот показатель наблюдался.

Мнимая часть модели также представляет собой двухфакторную модель, но это – модель зависимости будущего времени от предшествующего момента времени $(t-1)$ и значения прогнозируемого показателя в этот предшествующий момент времени y_{t-1} .

Рассмотрим вначале действительную часть модели:

$$\hat{y}_t = a_0 y_{t-1} - a_1(t-1) = a_1 + a_0 y_{t-1} - a_1 t \quad (2.12.6)$$

Эта модель состоит из двух частей – простой авторегрессии и линейной составляющей тренда.

Для того чтобы понять – как именно поведёт себя эта модель, рассмотрим её изменение, начиная с некоторых стартовых значений.

Если известны коэффициенты модели (2.12.6) и значение y_1 , то второе значение рассчитывается так:

$$\hat{y}_2 = a_0 y_1 - a_1.$$

Расчётное значение показателя при $t = 3$ будет равно:

$$\hat{y}_3 = a_0 \hat{y}_2 - 2a_1 = a_0(a_0 y_1 - a_1) - 2a_1 = a_0^2 y_1 - a_1(a_0 + 2)$$

Для $t = 4$ получим:

$$\hat{y}_4 = a_0^3 y_1 - a_1(a_0^2 + 2a_0 + 3).$$

Для любого $t = T$ эта модель даёт такое расчётное значение:

$$\hat{y}_T = a_0^{T-1} y_1 - a_1(a_0^{T-2} + 2a_0^{T-3} + \dots + ta_0^{(T-(t+1))} + \dots + (T-1)). \quad (2.12.7)$$

Таким образом, динамика вычисляемого показателя будет точно нестационарной, если $a_0 > 1$ и $a_1 > 1$. В зависимости от того, какими будут значения a_0 , a_1 и y_1 , будут моделироваться различные нелинейные нестационарные процессы. На рис. 2.8 приведены некоторые моделируемые с помощью (2.12.6) траектории при различных значениях стартового значения переменной и коэффициентов модели.

Очевидно, что модели *ReSTAR* более высокого порядка будут описывать более сложные нестационарные траектории.

Поскольку для нестационарных рядов давно уже принята практика приведения их к стационарному виду путём вычисления конечных разностей и использование простых авторегрессий в этом случае весьма эффективно, то у модели *ReSTAR(p)* по сравнению с моделью *AR(p)* никаких преимуществ нет.

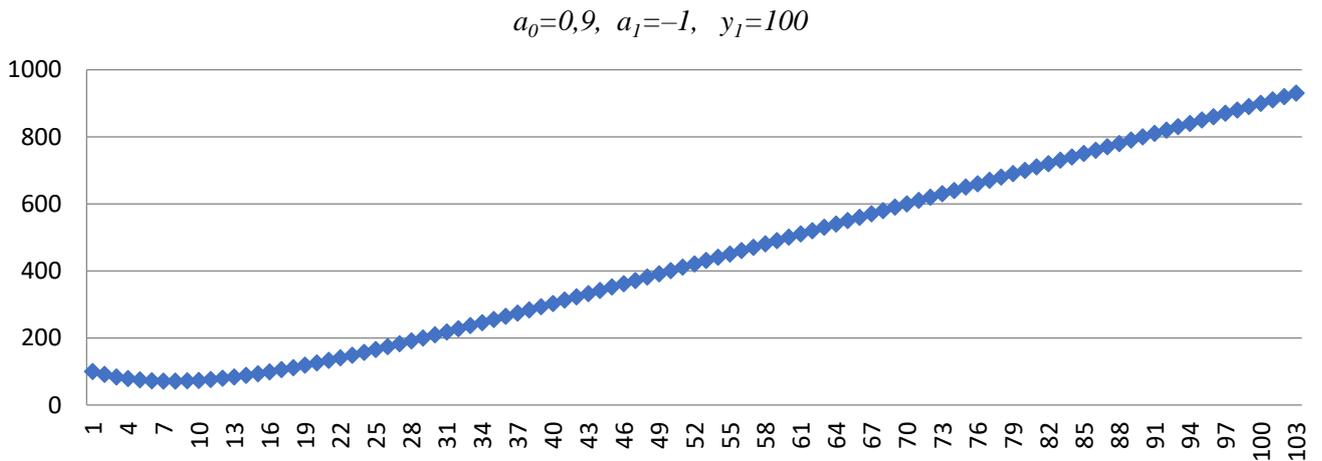
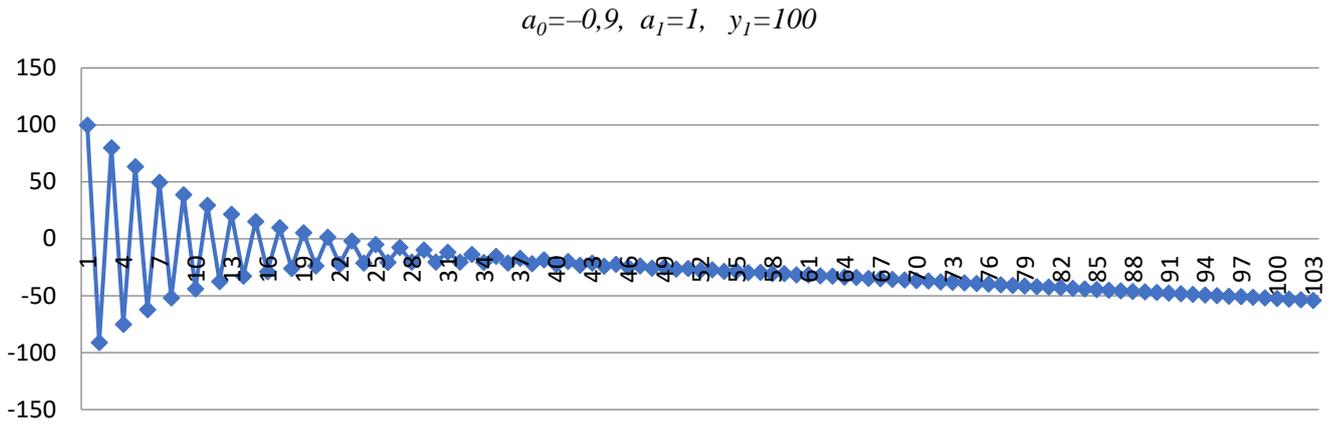


Рис. 2.8. Траектории, описываемые моделью ReSTAR(1) при различных значениях a_0, a_1, y_1 .

Сравнительные исследования на различных рядах данных показали, что при моделировании и прогнозировании нестационарных рядов модели $ReSTAR(p)$ незначительно точнее описывают и прогнозируют эти нестационарные ряды по сравнению с моделями $ARI(p,d)$. Но поскольку они значительно сложнее простых авторегрессий и у них число коэффициентов в два раза выше, то *BIC* всегда рекомендует отдавать предпочтение стандартным моделям авторегрессий.

Мнимая часть модели $STAR(1)$ будет иметь такой вид:

$$\hat{t} = a_0(t-1) + a_1 y_{t-1} \quad (2.12.8)$$

То есть – в общем случае прогнозируется нецелое время.

На первый взгляд это кажется невероятным – время, которое представляется нам объективной шкалой отсчёта, становится вдруг, как в теории

относительности Эйнштейна, нелинейным. На самом деле это не так. Речь ведь идёт о системе, в которой одновременно вычисляются два элемента – сам показатель и соответствующее ему время t , при наступлении которого показатель примет это значение. Если рассматривать комплексную плоскость, по горизонтальной оси которой располагаются действительные значения показателя, а по вертикальной оси – мнимая составляющая, к которой в $STAR(p)$ отнесено время, то любое комплексное число $y_t + it$, будет представлять собой точку на этой комплексной плоскости, а её координатами будут y_t и t . Поэтому, вычисляя комплексное число $y_t + it$, мы просто определяем местоположение точки на плоскости. Ничего сакрального.

Отнимем от левой и правой частей этой модели предыдущее комплексное число:

$$\hat{y}_t + i\hat{t} - (y_{t-1} + i(t-1)) = (a_{01} + ia_{11})(y_{t-1} + i(t-1)) - (y_{t-1} + i(t-1)). \quad (2.12.9)$$

Получим:

$$(\hat{y}_t + i\hat{t}) - (y_{t-1} + i(t-1)) = ((a_0 + ia_1) - 1)(y_{t-1} + i(t-1)). \quad (2.12.10)$$

Отсюда

$$\Delta y_t + i\Delta t = ((a_0 + ia_1) - 1)(y_{t-1} + i(t-1)). \quad (2.12.11)$$

Или

$$\frac{\Delta y_t}{\Delta t} + i = ((a_0 - 1) + ia_1) \frac{(y_{t-1} + i(t-1))}{\Delta t}. \quad (2.12.12)$$

Тогда

$$\frac{\Delta y_t}{\Delta t} = ((a_0 - 1) \frac{y_{t-1}}{\Delta t} - a_1 \frac{t-1}{\Delta t}) + i(a_1 \frac{y_{t-1}}{\Delta t} + (a_0 - 1) \frac{t-1}{\Delta t} - 1). \quad (2.12.13)$$

В результате получим разностное уравнение для прогнозируемого показателя:

$$\frac{\Delta y_t}{\Delta t} = (a_0 - 1) \frac{y_{t-1}}{\Delta t} - a_1 \frac{t-1}{\Delta t}. \quad (2.12.14)$$

При ограничениях:

$$a_1 \frac{y_{t-1}}{\Delta t} + (a_0 - 1) \frac{t-1}{\Delta t} - 1 = 0. \quad (2.12.15)$$

Если приращения времени постоянны и равны единице, то (2.12.14) и (2.12.15) представляют собой такую систему:

$$\begin{cases} \Delta y_t = (a_0 - 1)y_{t-1} - a_1(t-1), \\ a_1 y_{t-1} + (a_0 - 1)(t-1) = 1. \end{cases} \quad (2.12.16)$$

Поскольку эта модель работает не с исходным рядом значений, а с его первой разностью, то имеет смысл сравнить точность аппроксимации и точность ретропрогноза этой модели $STAR(1)$ с моделью $ARI(1,1)$.

Воспользуемся для этого той же базой данных Международного института прогнозистов, но, для разнообразия, другими рядами, а именно – рядами № 1 – 20. Результаты такого сравнительно анализа приведены в табл. 2.18. Это ряды некоторых годовых наблюдений за двадцать лет. Все они имеют некоторую динамику к росту, поэтому работа не с исходным рядом, а с его первыми разностями обосновано. Ошибка аппроксимации вычислялась для всех двадцати наблюдений, а ошибка ретропрогноза вычислялась так. На первых пятнадцати наблюдениях каждого ряда оценивались коэффициенты сравниваемых моделей, после чего эти модели с данными коэффициентами использовались для прогнозирования на один шаг наблюдения по последним пяти годам.

Только в трёх случаях из двадцати модель $STAR$ лучше аппроксимирует исходные данные, чем модель ARI (ряды 1, 5 и 11). С позиций ретропрогноза результаты сравнительного анализа оказались для новой модели несколько лучше – она в семи случаях из двадцати даёт лучшие результаты прогноза на один шаг.

Всё это говорит о том, что новая модель $STAR(p)$ имеет право на существование как в исходной форме (2.12.3), так и в её разностном виде (2.12.14) – (2.12.15). Но она требует дополнительных исследований.

В том случае, когда $\Delta t \rightarrow 0$, можно получить из модели (2.12.14) дифференциальное уравнение, которое можно использовать в самых разных целях моделирования экономической динамики в непрерывном времени.

Мы не будем останавливаться на этом вопросе, поскольку он требует дополнительных исследований, выходящих за рамки нашей работы. Просто отметим такую возможность, которая открывается при использовании в экономическом прогнозировании и моделировании модели $STAR(p)$.

Таблица 2.18.

Сравнительный анализ точности аппроксимации и ретропрогноза моделями STAR(1) и ARI(1,1) на рядах № 1 – 20

Номер ряда	СКО ошибки аппроксимации		СКО ошибки ретропрогноза	
	STAR	AR	STAR	AR
1	140,1696	160,19176	255,1167	268,3755
2	690,9747	661,93427	687,9618	489,8449
3	653,4255	608,24993	440,8778	530,9836
4	669,2756	640,83454	787,9096	549,8271
5	726,7625	729,67937	445,1941	447,5899
6	244,2261	221,80027	271,5892	287,6148
7	489,2181	478,40631	382,7154	273,1848
8	1037,14	935,62974	2157,841	947,078
9	812,0841	935,62974	812,0841	835,1936
10	1434,711	1334,5135	2734,152	2663,634
11	293,7468	315,13915	1336,271	892,5164
12	319,2022	288,0936	618,0703	389,8893
13	325,1974	266,94953	715,7141	470,0367
14	610,0327	590,83242	247,9228	705,9091
15	203,4974	172,33917	347,9195	240,4212
16	563,5613	550,77074	865,1852	928,8341
17	363,9672	294,95626	686,2616	343,5572
18	949,994	922,39645	2070,852	1475,759
19	480,0783	427,37885	1081,836	806,9651
20	925,5194	770,8984	2364,137	1041,976

2.13. Комплекснозначная авторегрессия с приростом. Общий вид

Последнюю разновидность из основных моделей комплекснозначных авторегрессий, которые были предложены в параграфе 2.6, представляет модель, в которой прогнозируемый показатель дополняется в мнимой части

его приростом по сравнению с предыдущим моментом времени. Такая комплекснозначная авторегрессия будет иметь вид:

$$\hat{y}_t + i\Delta\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\Delta y_{t-\tau}) \quad (2.13.1)$$

Модели подобного рода предложено обозначать как $GCAR(p)$.

Здесь возможны различные модификации модели, например, использовать не прирост $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, а, например, прирост по отношению к уровню, отстоящему на два наблюдения назад $\Delta y_t = y_t - y_{t-2}$, на три наблюдения назад $\Delta y_t = y_t - y_{t-3}$ и т. п. Можно использовать в качестве дополнительной характеристики не первую разность, а вторую разность $\Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1}$ и т. д. Исследование всего этого многообразия возможностей выходит за рамки данной работы, поэтому рассмотрим только основные характеристики базовых моделей типа (2.13.1).

Представим, прежде всего, эту модель в виде системы двух равенств — действительной и мнимой частей:

$$\begin{cases} \hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} y_{t-\tau} - a_{1\tau} \Delta y_{t-\tau}); \\ \Delta\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} \Delta y_{t-\tau} + a_{1\tau} y_{t-\tau}). \end{cases} \quad (2.13.2)$$

Если отдельно рассматривать действительную и мнимые части модели, то на первый взгляд кажется, что это отличные друг от друга модели. Но, рассматриваемые по отдельности действительная и мнимая части, коэффициенты которых оцениваются с помощью МНК, одинаково моделируют процессы.

Действительно, представим действительную часть модели для простейшего случая $ReGCAR(1)$:

$$y_t = a_{01} y_{t-1} - a_{11} \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.13.3)$$

Это модель авторегрессии с приростом. Она может использоваться в том случае, когда прогнозируемый ряд имеет ярко выраженную тенденцию к росту или уменьшению своих показателей. Во всех остальных случаях модель будет плохо описывать исходный ряд и плохо его прогнозировать.

Мнимая часть комплекснозначной авторегрессии $GCAR(1)$, как это следует из (2.13.2), имеет такой вид:

$$\Delta y_t = a_0 \Delta y_{t-1} + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.13.4)$$

Её можно преобразовать и привести к такой форме:

$$y_t - y_{t-1} = a_0 \Delta y_{t-1} + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \leftrightarrow y_t = (a_1 + 1) y_{t-1} + a_0 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.13.5)$$

Если использовать модель (2.13.3) для моделирования какого-то ряда, то с помощью, например МНК, находятся два коэффициента этой модели при переменных y_{t-1} и Δy_{t-1} . При использовании модели (2.13.5) в моделировании того же процесса, с помощью МНК оцениваются коэффициенты при этих же переменных, а значит, эти коэффициенты будут такими же, как и у модели (2.13.3). Поэтому, изучая свойства модели (2.13.1), достаточно понять свойства или её действительной, или её мнимой части, поскольку по-отдельности они ведут себя одинаково.

Остановимся на свойствах действительной части модели (2.13.2). За счёт того, что в комплексной переменной к мнимой части относится некоторый соответствующий характеру моделируемого процесса прирост, этот прирост может относиться не к текущему времени, а к какому-то прошлому наблюдению, сдвинутому относительно текущего на g наблюдений назад. Такую модель назовём $ReGCAR(p, g)$ и запишем так:

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} y_{t-\tau} - a_{1\tau} \Delta y_{t-(\tau+g)}) \quad (2.13.6)$$

Из этого класса моделей простейшей является модель $ReGCAR(1, g)$, которая имеет вид

$$\hat{y}_t = a_{01} y_{t-1} - a_{1g} \Delta y_{t-(1+g)}. \quad (2.13.7)$$

В ней прирост $\Delta y_{t-(1+g)}$ относится к наблюдению $(t - 1)$ в том случае, когда $g = 0$. А во всех остальных случаях, когда $g = 1, 2, 3, 4, \dots$ приращение относится к наблюдению, сдвинутому на $g = 1, 2, 3, 4$ единиц времени назад, например, для $g = 5$:

$$\hat{y}_t = a_{01} y_{t-1} - a_{11} \Delta y_{t-6}. \quad (2.13.8)$$

Следует отметить, что чисто внешне модель (2.13.3), то есть модель $ReGCAR(1, 0)$, похожа на модель $ARIMA(1, 1, 0)$, поскольку последняя модель имеет такой вид:

$$\Delta \hat{y}_t = a \Delta y_{t-1} \leftrightarrow y_t = y_{t-1} + a \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.13.9)$$

Но, сравнивая (2.13.3) с (2.13.9), можно заметить, что это всё-таки разные модели. И дело не только в знаке второго слагаемого правой части этих двух равенств, а в том, что в новой модели предыдущее значение уровня ряда y_{t-1} корректируется на множитель a_{01} , а в модели $ARIMA(1,1,0)$ этот уровень y_{t-1} не корректируется, поскольку умножается на единицу. Поэтому модель $ARIMA(1,1,0)$ является частным случаем модели $ReGCAR(1,0)$. А поскольку модель имеет возможность более тонко настраиваться при моделировании к особенностям ряда за счёт коэффициента a_{01} и сдвига g , то от новой модели следует ожидать большей точности, чем от модели $ARIMA(1,1,0)$. Этот вывод распространяется и на более общий случай, поскольку все модели $ARIMA(p,1,0)$ являются частным случаем модели $ReGCAR(p,0)$.

Прежде всего посмотрим, какие именно процессы генерирует действительная (или мнимая) часть модели.

Поскольку это – модель с приростами, то она по определению лучше всего подходит для моделирования и прогнозирования рядов, которые имеют нелинейную тенденцию к росту или к уменьшению своих значений. Типичные процессы, которые генерируются моделью $ReGCAR(p,1)$ показаны на рис. 2.9.

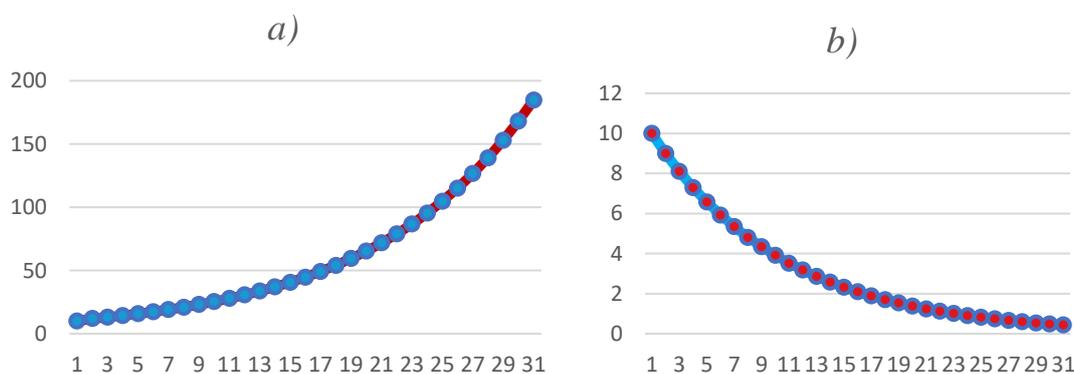


Рис. 2.9. Динамика модели (2.13.3) при а) $a_0 = 0,1; a_1 = 0,1$ и б) $a_0 = -0,1; a_1 = -0,1$

Но, поскольку это модель авторегрессии, то при различных начальных значениях исходного ряда и при иных значениях коэффициентов она может описывать и более сложную динамику, нежели динамика монотонного типа, которая показана на рис. 2.9. Примеры сложных нестационарных

процессов, которые могут получиться в результате применения рассматриваемой модели, приведены на рис. 2.10.

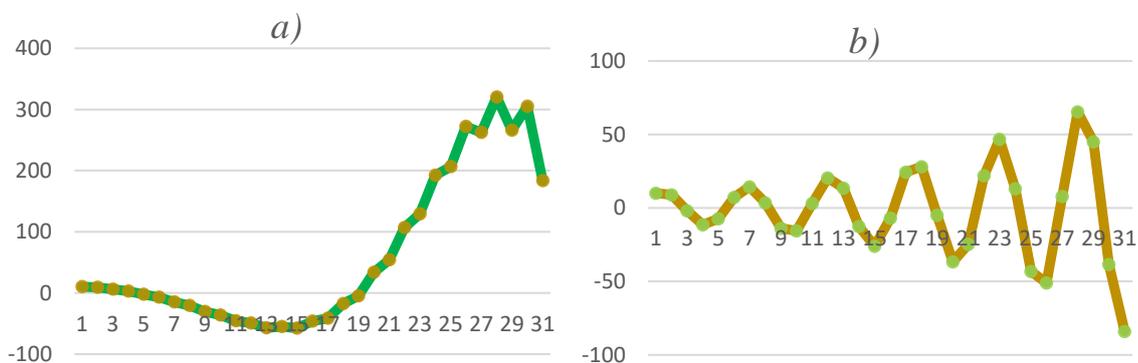


Рис. 2.10. Динамика модели (2.13.3) при а) $a_0 = - 1,5$; $a_1 = 0,15$ и б) $a_0 = - 0,2$
 $a_1 = -1,1$

Как можно понять из приведённых рисунков, модель $ReGCAR(p,1)$ будет хорошо работать при моделировании нестационарных процессов и не очень хорошо – при моделировании стационарных процессов.

Вспользуемся результатами табл. 2.17, в которой сравнивались две модели $MA(q)$ и $ReCMA(q)$ на рядах № 2831, 2832, 2833 и 2834. Для этих рядов модель $MA(q)$ показала лучшие результаты, чем $ReCMA(q)$. Конечно же, модель $MA(q)$ использовалась для рядов, приведённых к стационарному виду (их первых разностей), то есть – это модель $ARIMA(0,1,p)$.

В табл. 2.19 приводятся результаты использования двух моделей $ReGCAR(p)$ и $MA(q)$ (то же самое, что $ARIMA(0,1,p)$) на этих рядах.

Как видно, новая модель $ReGCAR(p)$ для рядов № 2831 и № 2834 работает лучше, чем модель $MA(q)$. А для рядов № 2832 и № 2833 она работает хуже.

Почему новая модель лучше описывает и прогнозирует именно два ряда - № 2831 и № 2834? Потому что эти два ряда имеют некоторую нестационарную тенденцию (рис. 2.9).

Таблица 2.19.

Результаты ретропрогноза моделями $MA(q,1)$ и $ReGCAR(p)$ на рядах
№2831, 2832, 2833 и 2834

Сдвиг, p	ReGCAR(p)			Лаг, q	MA(q)		
	σ аппроксимации	BIC аппроксимации	σ ретропрогноза		σ аппроксимации	BIC аппроксимации	σ ретропрогноза
Ряд № 2831							
1	820,606	6,837	592,440	1	867,648	13,588	<i>691,54</i>
2	141,196	5,079	104,788	2	760,202	<i>13,382</i>	869,50
3	138,502	5,061	<i>102,625</i>	3	<i>728,229</i>	13,416	837,98
4	140,335	5,076	104,951	4	728,229	13,416	810,32
5	<i>135,972</i>	<i>5,046</i>	107,968	5	730,628	13,485	818,81
6	139,376	5,072	104,277	6	741,244	13,937	826,50
Ряд № 2832							
1	<i>2168,677</i>	<i>7,807</i>	2421,121	1	2228,541	<i>15,475</i>	2692,69
2	2189,222	7,820	2403,525	2	2214,649	15,521	2491,48
3	2210,173	7,831	<i>2377,044</i>	3	<i>2195,724</i>	15,624	2485,63
4	2223,974	7,839	2409,979	4	2195,724	15,624	<i>2186,91</i>
5	2183,648	7,822	2464,281	5	2198,341	15,688	2405,83
6	2212,802	7,837	2426,490	6	2200,897	16,114	2375,42
Ряд № 2833							
1	<i>1185,347</i>	<i>7,205</i>	1357,438	1	1246,176	<i>14,312</i>	1251,02
2	1204,340	7,222	1372,047	2	1219,172	14,327	1290,42
3	1198,145	7,218	<i>1347,143</i>	3	1216,031	14,442	1239,19
4	1219,005	7,237	1388,979	4	1216,031	14,442	1239,80
5	1218,210	7,238	1403,711	5	1224,087	14,517	1231,86
6	1217,162	7,239	1367,331	6	<i>1211,932</i>	14,920	<i>1197,68</i>
Ряд № 2834							
1	42,139	3,866	31,602	1	40,721	7,470	<i>36,33</i>
2	39,950	3,815	30,525	2	38,604	<i>7,422</i>	36,70
3	39,981	3,817	<i>30,188</i>	3	36,813	7,447	36,27
4	40,468	3,830	32,261	4	36,813	7,447	47,27
5	40,926	3,843	30,709	5	36,700	7,503	44,54
6	<i>38,349</i>	<i>3,780</i>	31,797	6	<i>36,564</i>	7,919	43,71

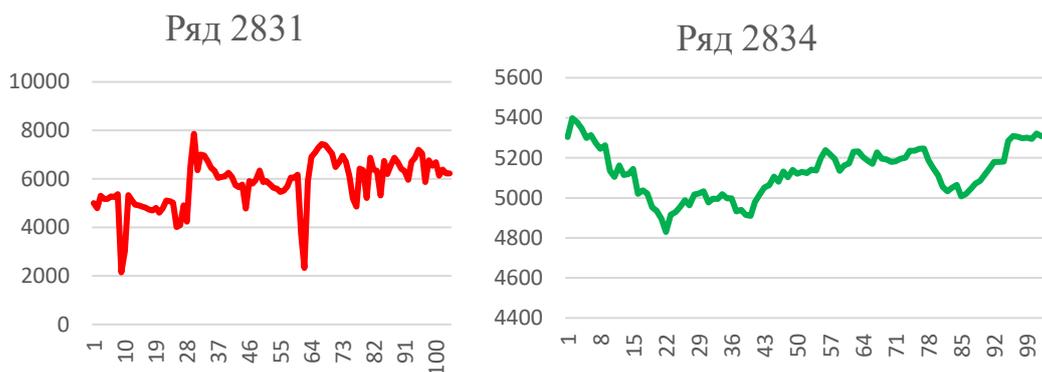


Рис. 2.9. Динамика рядов № 2831 и № 2834.

А два других ряда такую тенденцию не имеют и могут рассматриваться как стационарные (рис. 2.10).

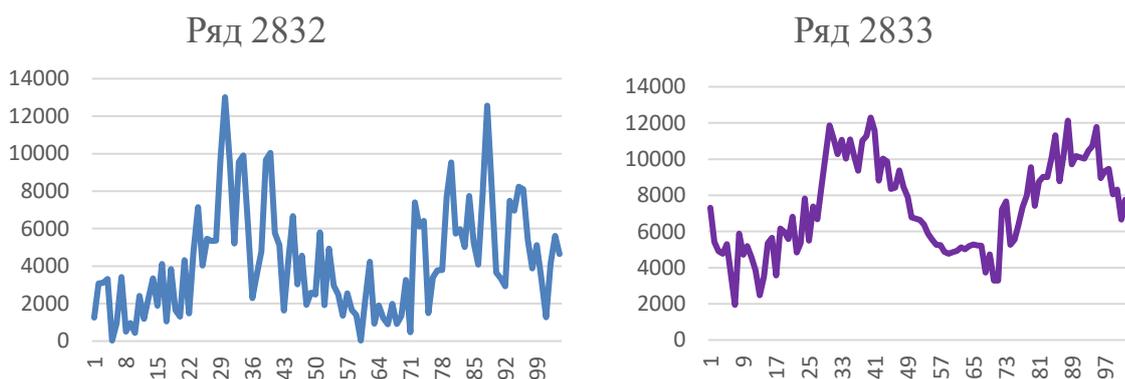


Рис. 2.10. Динамика рядов № 2832 и № 2833.

Если вместо модели $MA(q)$ использовать модели $AR(p)$, то будут получены аналогичные результаты – для рядов, имеющих нестационарный характер, модель авторегрессии с приростами зачастую точнее, чем модели авторегрессии, применённые к этому же ряду, приведённому к стационарному виду.

В качестве примера приведу результат ретропрогноза по ряду № 2840, который состоит из 103 значений и имеет очевидно нестационарный вид. Его первая разность вполне делает этот ряд стационарным, поэтому к первым разностям может быть применима модель простой авторегрессии $AR(p)$. Изменяя в этой модели p от 1 до 10, была определена лучшая модель.

Ею оказалась модель $AR(1)$ – лучшая как по информационному критерию $BIC = 3,934$, так и по стандартной ошибке ретропрогноза на один шаг на последних 36 значениях ряда $\sigma = 40,512$.

На этом же нестационарном ряде была построена серия моделей $ReGCAR(g)$ при g , изменяющемся от 1 до 10. Для этой модели также наилучшей оказалась модель со сдвигом на единицу: $ReGCAR(1)$. Для неё информационный критерий оказался равным $BIC = 3,919$, то есть меньше, чем у модели $AR(1)$. И стандартная ошибка ретропрогноза у этой модели оказалась меньше – $\sigma = 39,571$.

2.14. Модель $GCAR(p,g)$

Конечно же, модель $ReGCAR(p)$ является самой простой из этого класса моделей, поскольку она является моделью $ReGCAR(p,0)$ из более общего класса $ReGCAR(p,g)$, у которых $g = 0$. Рассмотрим вариант, когда $g > 0$.

Приведём здесь форму модели в общем случае, которая была показана ранее в (2.13.6):

$$\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^p (a_{0\tau} y_{t-\tau} - a_{1\tau} \Delta y_{t-(\tau+g)}) \quad (2.14.1)$$

Эта модель учитывает как несколько уровней ряда, наблюдавшихся в прошлом, так и приросты ряда, наблюдавшиеся в предшествующие моменты времени, отстающие в прошлом от уровней ряда на g наблюдений.

Прежде всего посмотрим на практическом примере – справляется ли модель $ReGCAR(p,g)$ с нестационарными рядами. Следует ли её приводить к стационарному виду посредством исчисления конечных разностей порядка d или делать этого не стоит?

Будем использовать для ответа на эти вопросы ряд № 650, общий вид которого представлен на рис. 2.11.

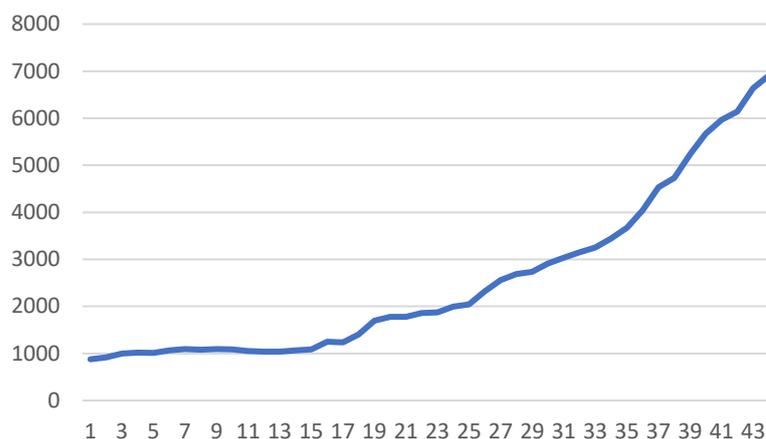


Рис. 2.11. Динамика ряда 650 базы Международного института прогнозов

Этот ряд стационарен во вторых разностях и лучшей для него является $ARIMA(1,2,3)$:

$$\Delta^2 \hat{y}_t = -0,81\Delta^2 y_{t-1} + 0,893\varepsilon_{t-1} - 0,983\varepsilon_{t-2} - 0,331\varepsilon_{t-3}. \quad (2.14.2)$$

Эта модель описывает исходный ряд со стандартной ошибкой аппроксимации, равной $\sigma = 63,455$ и $BIC = 8,886$. Сравнить новую модель с $ARIMA$ не имеет смысла, поскольку новая модель работает только с уровнем ряда без учёта ошибки аппроксимации. Поэтому будем иметь в виду (2.14.2) как некоторый эталон.

Построим последовательно модели $ReGCAR(p,g)$ для этого ряда, применяя её вначале к исходному ряду, а затем – к разностям этого ряда первого и второго порядков. Результаты этих расчётов приведены в табл. 2.20.

Из этой таблицы видно, что модель лучше всего работает с исходным нестационарным рядом. Приведение ряда к стационарному виду посредством вычисления конечных разностей аппроксимационных свойств у модели не улучшает. Из табл. 2.20 видно, что лучшей по критерию BIC является модель $ReGCAR(1,4)$, которая имеет такой вид:

$$\hat{y}_t = 0,078y_{t-1} - 0,306\Delta y_{t-5}. \quad (2.14.3)$$

Из анализа вида модели следует, что для этого ряда положительный прирост, наблюдавшийся пять моментов назад, ведёт в среднем к уменьшению моделируемого показателя, а отрицательный прирост пять наблюдений назад приводит к увеличению показателя в данный момент.

Таблица 2.20.

Результаты оценивания моделей $ReGCAR(p,g)$ на данных ряда №650 для исходного ряда ($d=0$), для ряда первых ($d=1$) и вторых ($d=2$) разностей

p\g	0		1		2		3		4		5	
	σ	BIC	σ	BIC	σ	BIC	σ	BIC	σ	BIC	σ	BIC
$d=0$												
1.	101,559	9,332	100,785	9,317	101,435	9,329	102,889	9,360	90,711	9,109	92,057	9,141
2.	101,550	9,603	101,106	9,595	102,235	9,623	90,606	9,389	90,972	9,404	104,846	9,695
3.	102,296	9,809	102,238	9,808	90,555	9,576	90,730	9,590	89,948	9,584	105,500	9,915
4.	103,267	10,026	90,555	9,763	90,716	9,781	89,576	9,771	91,072	9,820	105,627	10,132
5.	91,765	9,996	90,716	9,973	89,576	9,966	90,776	10,012	92,007	10,060	104,899	10,343
6.	91,964	10,214	89,576	10,161	90,776	10,211	92,007	10,263	92,678	10,303	92,609	10,328
7.	90,784	10,411	90,776	10,410	92,007	10,466	91,682	10,489	93,100	10,551	92,654	10,574
$d=1$												
1.	113,746	9,559	119,454	9,658	119,571	9,660	116,033	9,602	117,006	9,620	118,293	9,644
2.	107,865	9,731	106,669	9,708	107,524	9,731	108,982	9,765	111,116	9,812	118,767	9,953
3.	108,848	9,954	103,651	9,846	103,882	9,861	104,394	9,882	103,950	9,885	113,079	10,066
4.	105,028	10,074	103,882	10,052	104,135	10,072	101,803	10,042	101,633	10,055	111,781	10,263
5.	105,047	10,285	104,135	10,267	101,803	10,242	100,488	10,236	99,548	10,238	106,921	10,404
6.	105,264	10,507	101,803	10,441	100,488	10,439	99,548	10,446	99,926	10,480	100,490	10,520
7.	102,975	10,691	100,488	10,642	99,548	10,653	99,033	10,674	100,528	10,737	101,259	10,786
$d=2$												
1.	109,367	9,482	116,239	9,605	118,728	9,648	112,714	9,545	120,274	9,677	121,462	9,699
2.	122,563	9,993	106,026	9,703	107,449	9,737	106,518	9,727	112,866	9,851	116,067	9,915
3.	107,448	9,928	104,685	9,876	104,436	9,883	107,263	9,948	111,157	10,031	114,808	10,109
4.	106,050	10,109	104,436	10,078	101,720	10,041	101,200	10,047	109,555	10,223	110,292	10,254
5.	105,738	10,317	101,720	10,240	101,200	10,250	101,128	10,270	101,418	10,298	104,235	10,376
6.	103,025	10,489	101,200	10,453	101,128	10,477	101,418	10,510	101,926	10,548	99,428	10,528
7.	101,555	10,693	101,128	10,685	101,418	10,722	101,023	10,747	102,656	10,814	100,990	10,817

Конечно же, модель (2.14.3) проигрывает в точности модели (2.14.2) $ARIMA(1,2,3)$. У последней модели $\sigma = 77,010$, а $BIC = 9,063$, в то время как у лучшей модели $ReGCAR(1,4)$ $\sigma = 90,711$, но за счёт меньшего количества коэффициентов $BIC = 9,109$, что близко к значениям модели $ARIMA(1,2,3)$. Это означает, что в некоторых случаях по информационному критерию рассматриваемые модели с приростом могут быть предпочтительнее моделей $ARIMA$.

Конечно, если сравнивать точность модели $ReGCAR(1,4)$ с альтернативными моделями, то это необходимо делать по отношению к модели $ARIMA(p,d,0)$ или $ARIMA(0,d,q)$. В табл. 2.21 приводятся данные, позволяющие найти лучшую модель $ARIMA(p,d,0)$:

Таблица 2.21.
Статистические характеристики модели $AR(p)$ для ($d=1$) и вторых ($d=2$) разностей ряда № 650

(p,d)	σ	BIC
1,1	121,786	9,694
2,1	115,584	9,681
3,1	109,167	9,662
4,1	108,787	9,755
5,1	106,800	9,821
6,1	106,598	9,924
1,2	117,748	9,628
2,2	109,374	9,574
3,2	108,463	9,655
4,2	107,505	9,738
5,2	106,230	9,819
6,2	106,089	9,926

Лучшей моделью авторегрессии для данного ряда является модель $ARIMA(2,2,0)$ при $d = 2$, для которой и стандартное отклонение, и критерий BIC всё же выше, чем у модели с приростами, то есть – классическая модель проигрывает соревнование новой модели.

В отличие от всех других разновидностей моделей типа $CAR(p)$ у модели $GCAR(p,g)$ смысл имеет и действительная, и мнимая части. Поэтому мы можем рассмотреть эту модель не только по отдельности, но и в целом.

До сих пор мы, используя комплексные авторегрессии, минимизировали сумму квадратов отклонений либо действительной, либо мнимой частей. То есть – использовался классический МНК для регрессий действительных переменных.

Для построения комплекснозначной авторегрессии с приростами нам следует применить комплексный МНК, теоретическое обоснование которого приведено ранее, в первой главе в параграфе 1.5. В этом случае минимизируется комплексная дисперсия ошибки аппроксимации модели, а это приводит к иным результатам, чем в случае построения моделей действительной или мнимой частей.

Рассмотрим самый простой случай, когда перед нами модель $GCAR(1,0)$:

$$\hat{y}_t + i\Delta\hat{y}_t = (a_0 + ia_1)(y_{t-1} + i\Delta y_{t-1}) . \quad (2.14.4)$$

Система нормальных уравнений для этой модели будет иметь вид одного комплексного уравнения:

$$\sum_{t=2}^T (y_t + i\Delta y_t)(y_{t-1} + i\Delta y_{t-1}) = (a_0 + ia_1) \sum_{t=2}^T (y_{t-1} + i\Delta y_{t-1})^2 . \quad (2.14.5)$$

Откуда сразу же можно найти значение комплексного коэффициента авторегрессии:

$$(a_0 + ia_1) = \frac{\sum_{t=2}^T (y_t + i\Delta y_t)(y_{t-1} + i\Delta y_{t-1})}{\sum_{t=2}^T (y_{t-1} + i\Delta y_{t-1})^2} . \quad (2.14.6)$$

Оценим значение комплексного коэффициента авторегрессии на примере ряда № 650, который рассматривали только что. Получим такую модель:

$$\hat{y}_t + i\Delta\hat{y}_t = (1,0614 - i0,0036)(y_{t-1} + i\Delta y_{t-1}) . \quad (2.14.7)$$

Её действительная часть равна

$$\hat{y}_t = 1,0614y_{t-1} + 0,0036\Delta y_{t-1} , \quad (2.14.8)$$

а мнимая часть:

$$\Delta \hat{y}_t = 1,0614 \Delta y_{t-1} - 0,0036 y_{t-1}. \quad (2.14.9)$$

Действительная часть модели описывает уровень ряда со стандартным отклонением $\sigma = 102,463$. Если сравнить этот результат с результатом аппроксимации ряда с помощью модели действительной части комплекснозначной авторегрессии первого порядка $\text{ReGCAR}(1,0)$, то можно заметить из табл. 2.20, что она аппроксимировала исходный ряд лучше, чем комплекснозначная модель $\text{GCAR}(1,0)$, поскольку у $\text{ReGCAR}(1,0)$ стандартное отклонение меньше – $\sigma = 101,559$.

Это легко объяснимо, так как при использовании комплексного МНК минимизируется комплексная дисперсия в целом – и отклонения уровней ряда от их расчётных значений, и отклонения приростов ряда от их расчётных значений. А при оценке коэффициентов модели $\text{ReGCAR}(1,4)$ минимизируется только дисперсия отклонения уровней ряда от их расчётных значений.

Поскольку ранее было выявлено, что хорошо описывает этот ряд модель $\text{ReGCAR}(1,4)$, построим модель $\text{GCAR}(1,4)$ и вычислим её характеристики.

Модель будет иметь такой вид:

$$\hat{y}_t + i \Delta \hat{y}_{t-4} = (a_0 + i a_1)(y_{t-1} + i \Delta y_{t-5}). \quad (2.14.10)$$

Для того, чтобы оценить комплексный коэффициент этой модели, необходимо в формулу (2.14.6) вместо Δy_t подставить Δy_{t-4} , а вместо Δy_{t-1} подставить Δy_{t-5} . Получим:

$$(a_0 + i a_1) = \frac{\sum_{t=6}^T (y_t + i \Delta y_{t-4})(y_{t-1} + i \Delta y_{t-5})}{\sum_{t=6}^T (y_{t-1} + i \Delta y_{t-5})^2}. \quad (2.14.11)$$

В результате по имеющимся статистическим данным была построена модель такого вида:

$$\hat{y}_t + i \Delta \hat{y}_{t-4} = (1,0618 + i 0,0014)(y_{t-1} + i \Delta y_{t-5}). \quad (2.14.12)$$

Действительная часть этой модели описывает уровень ряда y_t со стандартной ошибкой $\sigma = 105,92$, что хуже, чем у модели $\text{ReGCAR}(1,4)$ и даже

хуже, чем это делает модель $GCAR(1,0)$ (2.14.7). Но при этом комплекснозначная модель авторегрессии с приростом (2.14.12) всё же лучше описывает исходный ряд, чем любая из моделей авторегрессий AR (см. табл. 2.21).

Таким образом, комплекснозначная модель авторегрессии с приростами (2.13.6) может использоваться в практике краткосрочного прогнозирования, а её возможные модификации требуют дополнительного исследования.

Заключение

Как только учёные, занимающиеся математической статистикой, откажутся от предположения о том, что действительная и мнимая части комплексной случайной переменной являются независимыми друг от друга, перед ними тут же откроются удивительные возможности для обширных научных исследований в части формирования нового раздела математической статистики – «Математической статистики комплексной случайной переменной». В первой главе монографии сделано это – приняв за основу предположение о том, что действительная и мнимая части комплексной случайной переменной коррелированы между собой, нам удалось решить несколько «тупиковых» проблем современной математической статистики.

То, что некоторые современные учёные называют «псевдодисперсией», на самом деле является нормальной комплексной дисперсией, имеющей действительную и мнимую части. При этом каждая из этих составляющих комплексной дисперсии имеет ярко выраженный статистический смысл. Её действительная часть показывает – насколько отличаются друг от друга дисперсии вещественной и мнимой частей. А её мнимая часть – представляет собой ковариацию между действительной и мнимой частями комплексной случайной переменной, умноженную на два. А поскольку ковариация двух независимых случайных переменных равна нулю, то в этом случае комплексная дисперсия становится вещественной. То есть – при вычислении комплексной дисперсии она автоматически становится вещественной в том случае, когда действительная и мнимая части являются независимыми друг от друга. Если же эти две части коррелированы друг с другом, то ковариация не равна нулю и дисперсия остаётся комплексной.

Получается, что не нужно задаваться вопросом о том, есть ли между действительной и мнимой частями комплексной случайной переменной взаимосвязь или нет – расчёт комплексной дисперсии даст исчерпывающий ответ на этот вопрос.

В современной математической статистике все статистические характеристики комплексной случайной переменной считаются вещественными, поскольку, как считают учёные, комплексная переменная – это лишь удобная форма связывания воедино двух независимых случайных переменных.

Это предположение не позволило учёным развить аппарат математической статистики комплексной случайной переменной. А без этого математического аппарата невозможно использование методов теории функций комплексного переменного в моделировании реальной экономики.

В комплексную экономическую переменную имеет смысл включать только две переменные, которые отражают разные стороны одного и того же экономического явления – процесса или объекта. Они могут быть взаимосвязаны, а могут и не иметь сильной взаимосвязи друг с другом. Но в любом случае они связаны друг с другом через общую причину. Именно это привело к необходимости самостоятельной разработки комплексных статистических характеристик комплексной случайной переменной в условиях, когда действительная и мнимая части этой переменной являются коррелированными. Основные результаты этой работы, приведённые в первой главе, связаны с:

- обоснованием метода наименьших квадратов для комплексной случайной переменной;
- выводом формулы комплексного коэффициента парной корреляции;
- предложением по расчёту доверительных границ статистических оценок выборочного ряда комплексной случайной переменной.

Поскольку все эти результаты являются новыми, в ходе научного исследования были выявлены свойства каждого из этих результатов, которые вкратце изложены в первой главе монографии.

Вооружившись этими результатами, оказалось возможным перейти к решению основной задачи данного исследования – построению комплекснозначных авторегрессий, что сделано во второй главе монографии. Эти комплекснозначные авторегрессии представляют собой новый класс моделей авторегрессий, ранее не изученные другими учёными.

Комплекснозначные авторегрессионные модели не являются альтернативой существующим моделям авторегрессий. Как и все другие модели и методы комплекснозначной экономики, новые комплекснозначные авторегрессионные модели следует рассматривать как дополнение к существующим моделям действительных переменных. С помощью этих новых моделей значительно расширяется инструментарий моделирования и

прогнозирования стохастических процессов, в том числе и экономических. Исключением, пожалуй, выступают комплексные векторные авторегрессии $CARIMAk(p,d,q)$.

Как показано в монографии, эти новые векторные авторегрессии уступают в точности аппроксимации векторным авторегрессиям действительных переменных $VARIMAk(p,d,q)$ из-за того, что комплексные векторные авторегрессии имеют значительно меньшее количество коэффициентов. Но эта потеря в точности аппроксимации не является столь значительной, чтобы отказаться от практического использования моделей $CARIMAk(p,d,q)$. Напротив, они выступают реальной альтернативой моделям $VARIMAk(p,d,q)$ именно потому, что число коэффициентов нового класса моделей $CARIMAk(p,d,q)$ в два раза (при чётном количестве элементов вектора) меньше, чем у простой векторной авторегрессии $VARIMAk(p,d,q)$. Объясняется это тем, что выбор наилучшей модели для моделирования и прогнозирования осуществляется на основе одного из информационных критериев, чаще всего – на основе Байесовского информационного критерия BIC . Эти критерии сводят воедино две противоположные цели: минимизацию ошибки аппроксимации и минимизацию количества коэффициентов модели. В монографии показано, что практически всегда BIC будет рекомендовать к использованию комплексные векторные авторегрессии $CARIMAk(p,d,q)$ вместо векторных авторегрессий действительных переменных $VARIMAk(p,d,q)$.

В данной монографии были намечены только контуры формирования и использования на практике моделей $CARIMAk(p,d,q)$. Их исследование и практическое применение наверняка приведёт к появлению перед исследователем новых проблем, суть которых сегодня не ясна. Но в любом случае можно утверждать, что за моделями $CARIMAk(p,d,q)$ – будущее краткосрочного моделирования и прогнозирования сложных взаимосвязанных стохастических процессов.

Свойства и преимущества одномерных комплекснозначных моделей не столь очевидны, как преимущества $CARIMAk(p,d,q)$ перед векторными авторегрессиями. Впрочем, модели $ReCARE(p,d,g)$, как это было показано в параграфах 2.7 – 2.10, обладают очень хорошими аппроксимационными

и прогнозными свойствами. В исследованных в монографии случаях они оказались лучше моделей $ARIMA(p,d,q)$. Это, правда, вовсе не означает, что эти модели и во всех других случаях будут лучше, чем $ARIMA(p,d,q)$. Но модели $ReCARE(p,d,g)$ могут успешно конкурировать с $ARIMA(p,d,q)$, и поэтому уже сегодня можно рекомендовать их к использованию в задачах краткосрочного экономического прогнозирования или моделирования стохастических процессов.

Другие типы одномерных комплекснозначных авторегрессий – $SMA(p,d,g)$, $STAR(p,d,g)$ и $GCAR(p,d,g)$ в одних случаях показывают хорошие результаты, а в других – не очень хорошие результаты. Все они могут быть развиты и модернизированы, в результате чего они могут принять вид моделей, которые также могут успешно конкурировать с лучшими моделями авторегрессий действительных переменных. Применительно к моделям $STAR(p,d,g)$ и $GCAR(p,d,g)$ направление такой модернизации очевидно – в них не используется ошибка ε_t . По сравнению с моделями такого же рода $AR(p)$ или $MA(q)$ эти новые модели выглядят очень достойно. Поэтому учёт ошибки ε_t в форме $MA(q)$ или $SMA(q)$ позволит сформировать и использовать новые классы моделей $STARMA(p,d,q,g)$ и $GCHARMA(p,d,q,g)$, которые при поддержке такой составляющей будут обладать и более высокими аппроксимационными свойствами, и более точными прогнозными свойствами. Но исследование этой возможности является предметом дальнейшей работы.

В любом случае инструменты моделирования стохастических процессов и их краткосрочного прогнозирования дополняются за счёт применения комплекснозначных авторегрессионных моделей. А это означает, что у исследователя появляется возможность более адекватного использования инструментов моделирования сложных процессов, чем прежде, ведь в природе невозможно найти два одинаковых процесса – для каждого из них необходимо подобрать из имеющегося набора моделей наилучшую из них. И чем разнообразнее и многочисленнее этот набор инструментов, тем проще подобрать наилучшую модель.

Библиографический список

1. **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. 11–е изд., стер., М.:КНОРУС, 2010. 664 с.
2. **Светуньков И.С.** Краткосрочное прогнозирование социально–экономических процессов с использованием модели с коррекцией. БИЗНЕС–ИНФОРМ, 2011, № 5 (1). С. 109 – 112.
3. **Светуньков С.Г.** Запредельные случаи метода Брауна. Экономические науки: Ученые записки УлГУ. Ульяновск: Изд-во СВНЦ, 1997. Вып.2. Часть 1
4. **Светуньков С.Г.** Количественные методы прогнозирования эволюционных составляющих экономической динамики. Ульяновск: Изд–во УлГУ, 1999. 207 с.
5. **Светуньков С.Г.** Комплексная дисперсия в современной эконометрике // Вопросы экономики, 2018, 4 (38), 2018. С. 371 – 379.
6. **Светуньков С.Г.** Основы эконометрики комплексных переменных. СПб.: ООО Медиапапир, 2019, 106 с.
7. **Светуньков С.Г.** Прогнозирование экономической динамики с помощью комплекснозначной авторегрессии с временной составляющей (STAR) // Современная экономика: проблемы и решения. 2020, № 9. С. 21–30.
8. **Светуньков С.Г.** Комплекснозначная авторегрессия в экономическом прогнозировании одномерных рядов. // Экономическая наука современной России. 2020;(4):51–62.
9. **Светуньков С.Г., Светуньков И.С.** Производственные функции комплексных переменных: Экономико–математическое моделирование производственной динамики. Изд.2, доп. М.: Ленанд, 2019. 170 с.
10. **Arens R.** Complex processes for envelopes of normal noise. // IRE Trans. Inform. Theory, Sept. 1957, vol. IT–3, pp. 204–207.
11. **Bliss, D. W.** Adaptive wireless communications. MIMO channels and networks. Cambridge University Press. 2013.
12. **Bombelli R.** L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna. Bologna, Coop. Tipografica Azzoguidi, IX 1929. 303 p.
13. **Box G.E. P., Jenkins G. M.** Time series analysis, forecasting and control. John Wiley & Sons, May 29, 2015. 712 p.

14. **Brown R. G.** Exponential Smoothing for Predicting Demand. Cambridge, Massa-chusetts: Arthur D. Little Inc, 1956.
15. **Davis R. A., Pengfei Zang & Tian Zheng.** Sparse Vector Autoregressive Modeling // Journal of Computational and Graphical Statistics, 25:4, 2016, p.1077–1096.
16. **Euler L.** Introduction to the analysis of infinitesimal. Book I. Springer New York, 1988, 327 p.
17. **Feller W.** An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II. New York: Wiley, 1966.
18. **Fildes R.** Learning from forecasting competitions. // International Journal of Forecasting, 2020, N. 36, pp. 3–18.
19. **Gelper S. E. C., Wilms I., Croux C.** Identifying demand effects in a large network of product categories. // Journal of Retailing, 2016, 92 (1), 25–39.
20. **Goodman N.R.** Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution. // Ann. Math. Statist. , 1963, vol. 34, pp. 152–176.
21. **Halliwell Leigh J.** Complex Random Variables // Casualty Actuarial Society E-Forum, Fall 2015.
22. **Harter H.L., Lum M.D.** Partially Hierarchal Models in the Analysis of Variance. // The Second of a Series of Reports on Analysis of Variance. Wright Air Develop-ment the University of Michigan, 1955. 134 p.
23. **Holt C. C.** Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Averages. Pittsburgh, Pennsylvania: Carnegie Institute of Technology, 1957.
24. **Hotelling H.** Multivariate quality control // Techniques of Statistical analysis, McGraw-Hill, N.Y. 1947/ pp.11–84.
25. **Kammeyer K.-D., Kroschel K.** Digitale Signalverarbeitung, volume 5. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2002.
26. **Lu H., & Liu, H.** A Direct Estimation of High Dimensional Stationary Vector Autoregressions. // Journal of Machine Learning Research, JMLR., 2015, 16, 3115–3150.
27. **Ludvigson S.C., Sai Ma, Serena Ng.** Shock Restricted Structural Vector-Autoregressions. / NBER Working Paper No. 23225 March 2017, Revised January 2020.

28. **Lütkepohl H.** New Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer, Berlin, 2005, 764 p.
29. **M.Kay S.** Statistical Signal Processing. // Estimation Theory, volume 1. Prentice Hall PTR, 2010.
30. **Makridakis S., Hibon M.** The M3–Competition: results, conclusions and implications // International journal of forecasting, 2000, v. 16, pp. 451–476.
31. **Miyabe S.** Estimating correlation coefficient between two complex signals // Latent Variable Analysis and Signal Separation: 12th International Conference, LVA/ICA 2015, Liberec, Czech Republic, August 25–28, 2015, Proceedings.
32. **Ord K., Fildes R., Kourentzes N.** Principles of Business Forecasting. Wessex, Incorporated, 2017. 588 p.
33. **Panchev S.** Random functions and turbulence. Elsevier, 2013. 458 p.
34. **Park Ju H., Lee Tae H., Liu Yajuan, Chen Jun.** Dynamic Systems with Time Delays: Stability and Control. Springer Singapore, 2019, 335 p.
35. **Pearson K.** On the general theory of skew correlation and nonlinear regression. HardPress, 2013. 76 p.
36. **Pedzisz M., Mandic D.P.** Augmented Complex Statistics for Signal Prediction. Technical Report: TR–ICU–EPSRC–08–07–TR002, 2007. 16 p.
37. **Picinbono B., Bondon P.I.** Second–order statistics of complex signals. // IEEE Transactions on Signal Processing, volume 45(2) , 1997, pages 411–420.
38. **Reed I.S.** On a moment theorem for complex Gaussian processes. // IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT–8 , Apr. 1962., pp. 194–195.
39. **Schreier P.J., Scharf L.L.** Statistical Signal Processing of Complex–Valued Data: The Theory of Improper and Noncircular Signals. Cambridge University Press, 2010. 309 p.
40. **Soroush J.** Adaptive Signal Processing Algorithms for Noncircular Complex Data. PhD thesis, Imperial College London, August 2010.
41. **Svetunkov I., Kourentzes N.** Complex Exponential Smoothing. Working Paper of Department of Management Science, Lancaster University 2015, 31 p.
42. **Svetunkov S.** Complex–Valued Modeling in Economics and Finance. Springer Science+Business Media, New York, 2012. 318 p.

43. **Tavares G.N., Tavares L.M.** Statistical Characterization of the Sum of Squared Complex Gaussian Random Variables. Instituto Superior Tecnico. Internal Report # 3036/2006. 23 p.
44. **Tavares G.N., Tavares L.M.** On the Statistics of the Sum of Squared Complex Gaussian Random Variables. // IEEE Transactions on Communications, 55(10), 2007. – pp 1857–1862.
45. **Trampitsch S.** Complex–Valued Data Estimation Second–Order Statistics and Widely Linear Estimators. Masterarbeit. Alpen–Adria–Universität Klagenfurt, 2013. 123 p.
46. **Tuelay Adili, Schreier P.J., Scharf L.L.** Complex–valued signal processing: The proper way to deal with impropriety. // IEEE Transactions on Signal Processing, volume 59(11), pages 5101–5125, 2011.
47. **Tülay Adali.** Adaptive Signal Processing. Next Generation Solutions. Wiley, 2010. 424 p.
48. **Wang D., Zheng Y., Lian H., Li G.** High–Dimensional Vector Autoregressive Time Series Modeling via Tensor Decomposition. // Journal of the American Statistical Association, 2021.
49. **Wilms I., Barbaglia L., Croux C.** Multi–Class Vector Autoregressive Models for Multi–Store Sales Data. KU Leuven, Faculty of Economics and Business. 2016
50. **Wooding R.A.** The multivariate distribution of complex normal variables. // Biometrika, 1956, vol. 43, pp. 212–215.
51. **Yanfei Jia, Xiaodong Yang.** Adaptive Complex–Valued Independent Component Analysis Based on Second–Order Statistics. // Journal of Electrical and Computer Engineering Volume 2016, Article ID 2467198.

Оглавление

Введение	3
Часть первая. Статистика комплексной случайной переменной	11
1.1. Основные понятия теории функций комплексного переменного, применимые в экономике	11
1.2. Комплекснозначная экономика	20
1.3. Случайная величина на комплексной плоскости.....	25
1.4. Дисперсия комплексной случайной величины в представлении современной математической статистики	35
1.5. Комплексная дисперсия.....	39
1.6. Свойства комплексного коэффициента парной корреляции	42
1.7. Нелинейные корреляции либо отсутствие корреляции	45
1.8. Корреляционная функция.....	51
1.9. Доверительные границы комплексной случайной величины	57
Часть вторая. Комплекснозначные авторегрессии	64
2.1. Авторегрессии в экономическом прогнозировании	64
2.2. Векторные авторегрессии.....	72
2.3. Комплекснозначная авторегрессия как конкурент модели $VAR^k(p)$	74
2.4. $CARMA^k(p,q)$ в экономическом прогнозировании	85
2.5. Основные свойства комплекснозначной авторегрессии.....	88
2.6. Разновидности одномерных комплексных авторегрессий	96
2.7. Модель авторегрессии с ошибкой $CARE(p)$	98
2.8. Модель со сдвигом $ReCARE(p,g)$	103
2.9. Модели с нелинейными ошибками	109
2.10. Модель $ReCARNE(p)$ с чётными числами в показателях степени	116
2.11. Модель $CMA(q)$	119
2.12. Модель $STAR(p)$ и влияние текущего времени.....	127
2.13. Комплекснозначная авторегрессия с приростом. Общий вид.....	133
2.14. Модель $GCAR(p,g)$	140
Заключение	147
Библиографический список	151