Теория функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании (материалы Всероссийского научного семинара 19 декабря 2005 г.) / Под ред. проф. С.Г.Светунькова. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006. 68 с.

Приводятся материалы докладов Всесоюзного научного семинара, который был проведён в Санкт-Петербургском государственном университете экономики и финансов 19 декабря 2005 г. На семинаре обсуждались основные проблемы и задачи формирования новой научной парадигмы, формирующейся трудами учёных СПбГУЭФ – экономико-математического моделирования с помощью комплексных переменных.

В сборнике представлены основные доклады, стенограмма обсуждения докладов на семинаре и новые материалы, которые были получены по результатам реализации тех идей, которые были высказаны и обсуждены на научном семинаре.

Публикуемые материалы семинара будут интересны специалистам в области экономико-математического моделирования, учёным и студентам, использующим в своей работе экономико-математические методы.

ВВЕДЕНИЕ

Экономико-математические методы сегодня широко используются во всех разделах экономической науки, и представить себе грамотного специалиста в области экономики, который бы не владел этим важным инструментом её исследования, достаточно сложно. В то же время, экономико-математические методы продолжают развиваться. Учёные строят новые модели, применяют новые подходы к экономическим задачам, используя хорошо разработанный математический результат, и получают новые, более точные результаты.

Принципиально важно, что вся огромная совокупность методов и подходов экономико-математического моделирования базируется в области действительных чисел. Области комплексных чисел в экономике до сих пор не использовались.

На Всероссийском научном семинаре "Теория функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании", который состоялся 19 декабря 2005 г. под научным руководством профессора С.Г.Светунькова, впервые были открыто обсуждены в ходе научной дискуссии возможность трансформации совокупности методов и подходов экономико-математического моделирования в область комплексных чисел, проблемы, которые при этом возникают, и открывающиеся перспективы.

Отмечая существенную научную новизну самой постановки проблемы, собравшиеся на семинар учёные, по-разному оценивают перспективы развития этого нового научного направления. Здоровый скептицизм ("надо доказать, что использование комплексных переменных в моделировании даёт лучшие результаты, чем моделирование в действительной области чисел") сочетался с выдвижением научных гипотез о необычных перспективах исследований в этой области. Эта дискуссия определила ряд новых направлений научных исследований в области экономико-математического моделирования с использованием комплексных переменных, которые впервые начали проводиться в Санкт-Петербургском государственном университете экономики и финансов. К моменту окончательной подготовки в печать Материалов этого всесоюзного семинара, были получены новые результаты, которые приводятся после стенограммы заседания.

Нам стало известно, что проведённый научный семинар положил начало научным исследования в этой области и в других вузах страны, там, где оказались рукописные копии докладов. Различные аспекты научной проблематики использования комплексных переменных в экономике легли в основу нескольких тем кандидатских диссертаций.

Часть материалов формируемой в стенах Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов новой научной парадигмы была доложена на Всероссийских конференциях в 2005 году, есть несколько публикаций в журналах и сборниках на эту тему, ем не менее, широкого знакомства научной общественности с полученными результатами ещё не произошло. Именно это явилось основной причиной опубликования материалов Всероссийского научного семинара "Теория функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании" (19 декабря 2005 г.) в виде отдельной монографии.

Монография состоит из двух логически связанных частей. В первой части приводятся тексты докладов, которые были предварительно розданы всем присутствовавшим на семинаре, для ознакомления с материалами перед семинаром. Во второй части монографии приводится та часть стенограммы проведения семинара, которая фиксирует научную дискуссию по сделанным научным докладам.

Проведение самого семинара, как и опубликование его материалов, было бы невозможно без активной поддержки данного направления исследований ректором Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов профессора Леонида Степановича Тарасевича, которому мы выражаем глубокую признательность.

Светуньков С.Г.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ЭКОНОМИКЕ КАК НОВАЯ ПАРАДИГМА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Определение комплексного числа и его основные свойства

В математике довольно часто приходится сталкиваться с необходимостью решения задач, не имеющих корней в области действительных (вещественных) чисел, например, необходимо найти корень уравнения:

$$x^2+4=0$$

Решая это уравнение, получим такие корни

$$x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{-16}}{2}=\pm 2\sqrt{-1}$$

Очевидно, что в области действительных чисел это уравнение не имеет решения, поскольку квадратного корня из минус единицы в этой области не существует. Но, так как невозможность решения подобных задач зачастую приводила к существенному ограничению возможностей, в математике были принято решение ввести так называемую "мнимую единицу", то есть число i=$\sqrt{-1}$. Квадрат этого числа, очевидно, будет равен минус единице. Тогда, уравнение, приведённое выше, имеет следующее решение:

$$x_{1,2}=\pm 2i$$

С полученным мнимым числом уже можно работать дальше, как с решением приведённого выше уравнения. Введение в научный оборот мнимой единицы позволяет решать более сложные уравнения, чем то, что приведено выше, например, уравнение:

$$x^2+x+2{,}5=0.$$

Корнями данного уравнения с учётом введённого понятия "мнимое число" являются:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times 1\times 2{,}5}}{2}=0{,}5\pm 1{,}5i$$

Так как корни уравнения представляют собой число, в котором есть как действительная (вещественная), так и мнимая части, это число получило название "комплексного числа".

Таким образом, комплексное число представляет собой числовую пару, состоящую из двух частей – вещественной и мнимой:

$$Z=a_0+ia_1, \quad (1)$$

где a_0 – вещественная часть комплексного числа, ia_1- мнимая часть комплексного числа, a_0 и a_1 – вещественные числа, i – мнимая единица, которая удовлетворяет равенству:

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2=-1. \quad (2)$$

С комплексными числами можно выполнять все те же действия, что и с вещественными, но с учётом специфики комплексных чисел эти действия имеют оригинальный характер.

Комплексное число можно представить графически. На графике рисунка 1 нанесены две ортогональные оси – ось действительной части комплексного числа и ось мнимой части комплексного числа.

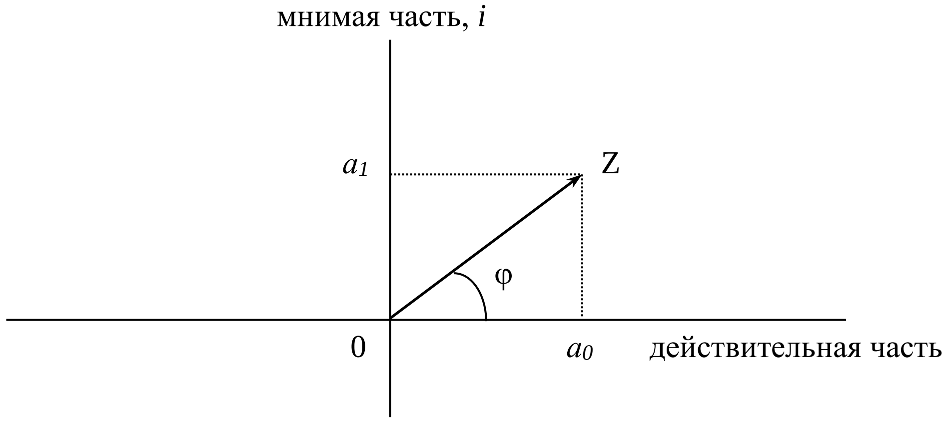


Рисунок 1. Изображение комплексного числа на плоскости

Любая точка, лежащая на плоскости, определяемой указанными осями, представляет собой комплексное число, даже если эта точка лежит на оси вещественных чисел. Она в данном случае представляет собой комплексное число с нулевой мнимой частью.

Так как действительное число состоит только из одной части, а комплексное состоит из двух частей, то комплексное число, по содержанию, очевидно, более богато, чем действительное. А это значит, что с помощью комплексного числа можно более точно описать объект исследования и построить более точные математические модели этого объекта, чем в области действительных чисел. Изучением математических аспектов работы с комплексными числами занимается теория функции комплексного переменного, которая позволяет использовать в исследованиях модели любой сложности. К настоящему времени комплексные числа нашли широкое применение в физике, механике, машиностроении, электротехнике и других науках, но не нашли применения в экономике.

Комплексное число (1) можно рассматривать как вектор (рисунок 1), который выходит из начала координат и заканчивается в точке (a_0,

a_1). Тогда комплексное число можно представить в полярных координатах:

$$Z = a_0 + ia_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ . \ (3)$$

Здесь φ – полярный угол (рисунок 1), r – полярный радиус, который в данном случае получил название модуля комплексного числа (длина вектора).

Модуль комплексного числа равен:

$$r = \sqrt{a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2}} \ . \qquad (4)$$

Тригонометрическая форма особенно удобна для умножения комплексных чисел. Пусть помимо комплексного числа (3) имеется ещё одно комплексное число:

$$w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Вычислим произведение комплексного числа z на комплексное число w:

$$zw = r\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = r\rho(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) \ . \ (5)$$

Эта формула известна как формула Муавра, которая существенно облегчает такие операции с комплексными числами, как возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа.

В 1748 году Л.Эйлер в своём "Введении в анализ бесконечно малых" привёл формулу, носящую его имя, а именно:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (6)$$

С помощью формулы Эйлера любое комплексное число Z с модулем r и аргументом φ (3) можно записать в следующей показательной форме (экспоненциальной форме):

$$z = re^{i\varphi}, \ (7)$$

Эта форма записи оказывается также очень удобной, например, для перемножения двух комплексных чисел z_1 и z_2. Действительно, воспользовавшись (7) имеем:

$$z_1 \times z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \ (8)$$

Модуль комплексного числа может быть также представлен в экспоненциальной форме:

$$r = e^u \ . \qquad (9)$$

Тогда комплексное число (2.1.7) может быть представлено в другом виде, а именно:

$$z = e^{u+i\varphi}, \qquad (10)$$

что позволяет вычислять логарифмы комплексного числа.

Таким образом, воспользовавшись теорией комплексных чисел, можно, по крайней мере, связать функциональной зависимостью любую пару действительных чисел. В экономике редко когда приходится иметь дело с однофакторными зависимостями. В подавляющем случае приходится работать с многофакторными зависимостями. При этом многофакторная зависимость определяет некий результат, который, опять же, является многофакторным. В действительной области описать такую зависимость одним уравнением невозможно – необходимо строить систему уравнений. В области комплексных чисел можно связать математическим уравнением, по крайней мере, пару комплексных чисел – результат w, как комплексную переменную, и причину z как комплексный аргумент.

Любой экономист скажет, что ситуации, когда в экономике можно поставить в функциональное соответствие друг другу пару значений, встречаются достаточно часто, но эти ситуации отнюдь не превалируют в экономике. Как правило, это происходит при агрегировании показателей и достаточно высокой степени абстрагирования. Функциональной зависимостью хорошо бы связать совокупность из множества (более чем двух) показателей, то есть, хорошо было бы использовать гиперкомплексные перемнные.

Попытка ввести систему чисел, содержащую три единицы, не дала положительных результатов[1]. Удалось построение системы чисел с четырьмя единицами. В этом случае получается так называемая система кватернионов, то есть чисел вида:

$$A = a + ib + jc + kd, \quad (11)$$

где a,b,c,d – вещественные числа, i, j, k - мнимые единицы.

Действия с кватернионами носят оригинальный характер. В поле кватернионов не выполняется, например, свойство коммутативности умножения, что приводит к многочисленным курьёзам. Так, для уравнения:

$$x^2 + 1 = 0$$

имеется бесконечное множество корней:

$$X = ip + jq + kr, \text{ где } p^2 + q^2 + r^2 = 1.$$

Пока что кватернионы не нашли широкого применения в практике и остаются теоретическим разделом математики, правда встречаются успешные попытки их использования в теории фракталов. Но желание описать зависимость некоторого комплексного показателя, представленного в виде кватерниона (11), от другого экономического показателя, представленного в виде другого кватерниона, пока что не осуществимо.

2. Основные направления использования комплексных переменных в экономике: пара экономических показателей как комплексная переменная

[1] Малая математическая энциклопедия. – Издательство Академии наук Венгрии, Будапешт, 1976. - С. 60.

Первым очевидным направлением использования комплексных переменных в экономике является применение моделей там, где пара некоторых экономических показателей отражает некоторые характерные черты объекта экономического исследования. Эту пару можно рассматривать как одну комплексную переменную и осуществить исследование свойств этой переменной.

Наиболее просто оказалось использовать это направление применительно к теории индексов. Действительно, ситуация торгов на любом рынке в момент времени t описывается двумя основными показателями: объёмом продаж Q_{kt} k-го вида товара и ценой P_{kt} за единицу этого k-го изделия. Обычно эту пару значений связывают друг с другом перемножением, получая при этом стоимость продаж:

$$S_{kt} = Q_{kt} P_{kt} . \qquad (12)$$

Но можно связать эту пару значений показателей, представив их как комплексную переменную:

$$\dot{Z}_{kt} = Q_{kt} + iP_{kt} . \qquad (13)$$

Какую переменную отнести к мнимой части, а какую - к действительной части комплексного числа, не принципиально, поскольку для сложения комплексных чисел выполняются переместительный и сочетательный законы, а для умножения комплексных чисел - переместительный, сочетательный и распределительный.

Теперь можно сравнить друг с другом значение (13) в момент времени t и в предыдущий момент времени $t-1$. Это сравнение даст возможность оценить направление изменений торгов данным товаром на рынке. Если же просуммировать (13) по всем товарам, то можно говорить о том, что возникает возможность добавить теорию индексов новым инструментом. В докладе "Комплексные переменные в теории индексов" об этой возможности будет сказано подробно, и будут показаны открывающиеся здесь перспективы.

Интересным представляется и построение новой модели спроса. Ведь спрос как экономическая категория отражается двумя показателями - объёмом спроса Q и ценой P за единицу изделия. Специалисты в области экономической теории до сих пор спорят о том, какой из показателей от какого зависит. А.Маршалл, например, говорил о функциональной зависимости объёма спроса от цены, а построил график обратной зависимости – цены от объёма. Специалист по микроэкономики обоснует как первую, так и вторую виды зависимости. Представляется, что это как раз тот случай, когда эти две Действительные переменные должны быть представлены как одна комплексная переменная. Но исследования в этом направлении ещё предстоит провести.

Несколько иным является другой подход в данном направлении, когда экономические показатели можно рассматривать как характеристики некоторых комплексных чисел. Так, известный экономический показатель рентабельности по себестоимости, который определяется как отношение прибыли к затратам:

$$R = \frac{\Pr}{C} \qquad (14)$$

можно рассмотреть как тангенс полярного угла следующего комплексного числа:

$$\dot{Z} = \Pr + iC = re^{i\varphi} = \sqrt{\Pr^2 + C^2}\, e^{iarctg\frac{\Pr}{C}}. \qquad (15)$$

То есть, прибыль и себестоимость представляют собой пару, составляющую новую комплексную переменную. Если тангенс полярного угла этой комплексной переменной имеет ярко выраженный экономический смысл – он характеризует рентабельность по себестоимости, то экономический смысл модуля этой комплексной переменной не столь очевиден и над этим стоит подумать. По принципу (14) – (15) можно описать множество других экономических показателей (производительность, фондоотдача и т.п.) и исследовать их новые свойства, которые вытекают из их нового представления.

В любом случае, эти пары показателей уже могут быть рассматриваемы в экономико-математическом моделировании как одна из переменных, то есть, можно находить зависимости этой переменной от затрат труда, фондов, инвестиций и т.п., что относится уже ко второму направлению, рассматриваемому ниже.

3. Взаимосвязь двух пар экономических показателей, рассматриваемых как комплексные переменные

Вторым очевидным направлением является ситуация, когда одна пара экономических показателей отражает характерные черты экономического объекта, а пара других экономических показателей предопределяет поведение этого объекта. Если и ту, и другую пару представить в виде двух комплексных переменных, то первая пара значений может рассматриваться как зависимая комплексная переменная от второй. Эта зависимость может описываться различными функциями.

В этом направлении удалось с особой тщательностью изучить аддитивные производственные функции комплексных переменных, которые в общем случае будут иметь вид:

$$Q_t + iC_t = F\left(L_t + iK_t\right),$$

где ресурсы труда и капитала рассматриваются как одна комплексная переменная $L_t + iK_t$, а результаты производства - как другая комплексная переменная: $Q_t + iC_t$.

Полученные результаты оказались весьма интересными и теперь ясно, что с помощью таких моделей существенно расширяется аппарат теории производственных функций. Подробный доклад о результатах проведённых исследований производственных функций комплексных переменных сделает мой соавтор И.С.Светуньков поэтому я не буду останавливаться на этой теме.

Несмотря на то, что эти два направления открывают перед нами огромную область для исследований, она всё же ограничена тем, что для моделирования необходимо иметь пару показателей.

Но те же самые производственные функции могут использовать не два ресурса, а три, четыре и т.д. Для подобных многофакторных зависимостей второе направление оказывается неприемлемым, поэтому возникла необходимость разработки *третьего направления использования* комплексных переменных в экономико-математическом моделировании – представлении экономических переменных в области комплексных чисел, так, чтобы можно было их использовать в экономико-математическом моделировании комплексных переменных.

4. Отдельные экономические показатели на комплексной плоскости

Строго говоря, любой экономический показатель может рассматриваться как комплексная переменная, у которой действительная часть равна этому показателю, а мнимая часть равна нулю:

$$Э + i0. \qquad (14)$$

Какие особенности будет иметь функция от этой переменной? Математически она запишется так:

$$Q_t + iP_t = f(Э + i0) = f(Э). \qquad (15)$$

Эта функция, как видно, должна быть комплексной, для того, чтобы и в правой части равенства были действительная и мнимая части, например для линейного случая:

$$Q_t + iP_t = (a_0 + ia_1)Э.$$

Легко построить аналогичные модели и для многофакторных зависимостей, например:

$$Q_t + iP_t = (a_0 + ia_1)L_t + (b_0 + ib_1)K_t^{b_3} + (c_0 + ic_1)\ln M_t + ...$$

Но при этом совсем не видно преимуществ использования комплексных переменных вместо действительных переменных – последнее равенство легко представимо в виде двух равенств – отдельно для действительной и отдельно для мнимой частей.

Более продуктивным представляется другой способ представления экономического показателя на комплексной плоскости. Практически всегда, рассматривая временные ряды, экономисты представляют их на графике плоскости, по горизонтальной оси которой откладывают время, а по вертикальной – сам показатель. Этот способ изображения показан на рисунке 2, из которого видно, как именно можно представить экономический показатель в виде комплексной переменной. К мнимой части этой комплексной переменной следует отнести экономический показатель, а к вещественной части – время.

Математически эта комплексная переменная запишется так:

$$\dot{Y}_t = t + iY_t. \qquad (16)$$

Очевидно, что эта комплексная переменная может быть представлена как в экспоненциальной, так и в тригонометрической форме. Модуль такой комплексной переменной будет находиться так:

$$r_{Y_t} = \sqrt{t^2 + Y_t^2},$$

а полярный угол этой переменной будет определяться как арктангенс

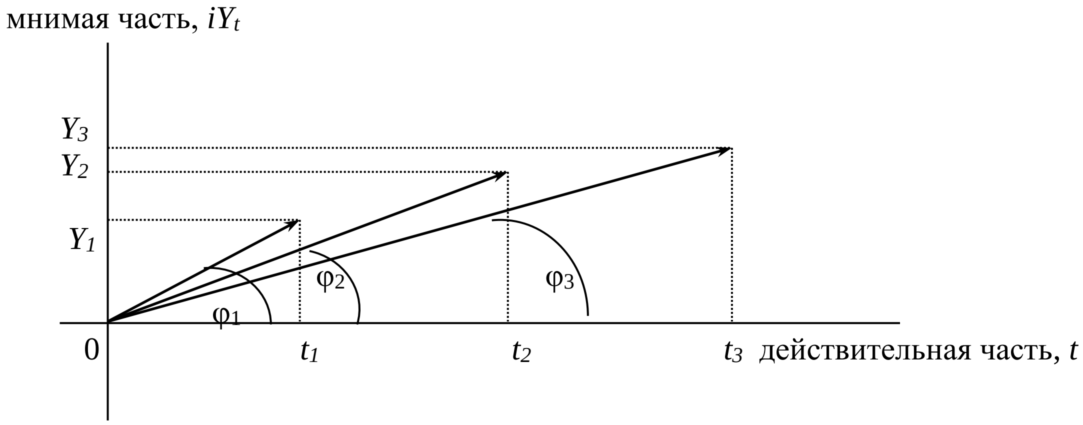


Рисунок 2. Экономические показатели как комплексные переменные

отношения экономической переменной ко времени:

$$\theta_{Y_t} = arctg\frac{Y_t}{t},$$

то есть – в определённой степени отражать скорость изменения показателя во времени, что само по себе вызывает интерес.

Такой подход уже открывает новые перспективы в отличие от предыдущего. Действительно, возможно построить производственную функцию комплексных переменных в мультипликативной форме с каким угодно числом экономических ресурсов:

$$re^{i\theta} = a_0\left(r_L e^{i\theta_L}\right)^{a_1}\left(r_K e^{i\theta_K}\right)^{a_2}...\left(r_E e^{i\theta_E}\right)^{a_n}. \qquad (17)$$

Эта модель, в соответствии со свойствами комплексного числа, представима как два уравнения. Первое уравнение записывается для модулей комплексных переменных:

$$r = a_0 r_L^{a_1} r_K^{a_2}...r_E^{a_n}. \qquad (18)$$

А второе уравнение - для их полярных углов:

$$e^{i\theta} = e^{i(a_1\theta_L + a_2\theta_K + ... + a_3\theta_E)} \Leftrightarrow \theta = a_1\theta_L + a_2\theta_K + ... + a_n\theta_E. \qquad (19)$$

Найти параметры этой модели достаточно просто, но эта задача осложняется тем, что параметры модели находятся при одновременном выполнении условий (18) и (19). Сейчас мы не будем показывать решение этой задачи. Важно то, что для случая одно- и двухфакторной модели требование выполнения двух равенств выступает в качестве очень хорошего подспорья, приводя задачу к очень интересным случаям. Рассмотрим эти случаи.

Первый из них – когда рассматривается однофакторная модель производственной функции. Пусть для определённости рассматриваются только трудовые ресурсы. Тогда модель этой производственной функции имеет вид:

$$Q_t + iC_t = a_0(t + iL_t)^{a_1}. \qquad (20)$$

Или при экспоненциальной форме записи комплексных переменных:

$$re^{i\theta} = a_0\left(r_L e^{i\theta_L}\right)^{a_1}. \qquad (21)$$

Параметры такой модели легко находятся с помощью (18) и (19):

$$a_1 = \frac{\theta}{\theta_L} \text{ и } r = a_0 r_L^{\frac{\theta}{\theta_L}} \rightarrow a_0 = r r_L^{-\frac{\theta}{\theta_L}}. \qquad (22)$$

Для демонстрации возможностей полученной модели воспользуемся статистическими данными Диатомового комбината по одному из наблюдений. Объём производства Q_t в относительных величинах за март 1999 года был равен 1,220428089, объём издержек C_t – равен 1,220430108, а численность занятых L_t – 1,083372365. Так как это – второе наблюдение, примем t=2. Тогда производственные результаты этого месяца как комплексная переменная будут иметь вид: $Q_2 + iC_2 = 1,7259e^{i0,785}$, а затраты трудовых ресурсов как комплексная переменная будут записаны так: $2 + iL_2 = 2,2746e^{i0,496}$.

Легко найти параметры производственной функции:

$$a_1 = \frac{\theta}{\theta_L} = \frac{0,785}{0,496} = 1,58 \text{ и } a_0 = \rho\rho_L^{-\frac{\theta}{\theta_L}} = 1,7259\left(2,2746\right)^{-1,58} = 0,4703.$$

Производственная функция (В.9) будет иметь вид:

$$Q_t + iC_t = 0,4703(t + iL_t)^{1,58}.$$

Если найденные параметры не меняются во времени, то легко решаются задачи прогнозирования производственных результатов. Для рассматриваемого случая параметры меняются во времени и это изменение можно также промоделировать. Но, тем не менее, в качестве демонстрации возможностей практического использования покажем, как это можно сделать. Пусть для десятого наблюдения t=10 численность занятых L_t планируется довести до величины, равной 2,3977. Какие при заданных параметрах производственной функции будут производственные результаты? Решим эту задачу. Математически она будет записана так:

$$Q_t + iC_t = 0,4703(10 + i2,3977)^{1,58}.$$

В экспоненциальной форме записи:

$$Q_t + iC_t = 0,4703\rho^{1,58}e^{i1,58\theta_L} = 18,6879e^{i0,3718}.$$

Для нахождения значений объёмов выпуска и затрат на выпуск продукции с помощью полученных значений проще всего воспользоваться тригонометрической формой записи комплексного числа. Тогда получим:

$$Q_t + iC_t = 18,6879(\cos 0,3718 + i\sin 0,3718) = 17,41 + i6,7891.$$

Здесь действительная часть соответствует прогнозному значению объёмов производства, а мнимая часть – прогнозируемым издержкам производства.

Если теперь вместо одного ресурса рассматривать два, то следует построить модель производственной функции типа:

$$Q_t + iC_t = a_0(t + iL_t)^{a_1}(t + iK_t)^{a_2},$$

которая в экспоненциальной форме будет иметь вид:

$$re^{i\theta} = a_0\left(r_L e^{i\theta_L}\right)^{a_1}\left(r_K e^{i\theta_K}\right)^{a_2}.$$

Если, как и в случае с функцией Кобба-Дугласа предположить, что сумма показателей степеней этой функции равна единице, то функция преобразуется к виду:

$$re^{i\theta} = a_0\left(r_L e^{i\theta_L}\right)^{\alpha}\left(r_K e^{i\theta_K}\right)^{1-\alpha}. \qquad (23)$$

Построить подобную функцию - означает найти два коэффициента этой функции – a_0 и α, а это означает для рассмотрения задачи в области комплексных переменных, что они будут находиться для каждого наблюдения. Действительно, раскрывая скобки в правой части равенства и группируя, получим:

$$re^{i\theta} = a_0 r_L^{\alpha} e^{i\alpha\theta_L} r_K^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta_K} = a_0 r_L^{\alpha} r_K^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta_K + \alpha\theta_L}. \qquad (24)$$

Теперь легко получить два равенства - одно для модуля мультипликативной производственной функции:

$$r = a_0 r_L^{\alpha} r_K^{1-\alpha}, \qquad (25)$$

а другое - для её полярного угла:

$$\theta = (1-\alpha)\theta_K + \alpha\theta_L = \theta_K + \alpha(\theta_L - \theta_K). \qquad (26)$$

Из (26) легко найти коэффициент

$$\alpha = \frac{\theta - \theta_K}{\theta_L - \theta_K}. \qquad (27)$$

Подставляя это значение в (25) не труднее найти коэффициент пропорциональности a_0:

$$\rho = a_0 \rho_L^{\alpha} \rho_K^{1-\alpha} \to a_0 = \rho \rho_L^{-\alpha} \rho_K^{\alpha-1}. \qquad (28)$$

Для демонстрации возможности построения такой функции вновь воспользуемся данными по Диатомовому комбинату. Оставим уже использовавшиеся данные: объём производства Q_t равен 1,220428089, объём издержек C_t равен 1,220430108, численность занятых L_t - 1,083372365, затраты капитальных ресурсов K_t -1,000000000. Так как это – второе наблюдение, то t=2.

Производственные результаты этого месяца и затраты трудовых ресурсов, представленные в виде комплексных переменных в экспоненциальной форме уже были найдены ранее:

$$Q_2 + iC_2 = 1,7259e^{i45,00} \text{ и } 2 + iL_2 = 2,2746e^{i28,44}.$$

Затраты капитальных ресурсов, представленные в виде комплексного переменного в экспоненциальной форме, будут иметь для второго наблюдения вид:

$$2 + iK_2 = 2,2359Ke^{i26,57}.$$

Теперь легко найти показатель степени функции (23), воспользовавшись для этого формулой (27):

$$\alpha = \frac{45,00 - 26,57}{28,44 - 26,57} = 9,83$$

Зная этот показатель, с помощью (28) найдём коэффициент пропорциональности:

$$a_0 = 1,7259 \rho_L^{-9,83} \rho_K^{8,83} = 0,6539.$$

Итак, искомая производственная функция имеет вид:

$$Q_t + iC_t = 0,6539(t + iL_t)^{9,83}(t + iK_t)^{-8,83}.$$

С её помощью можно находить интерполируемые или экстраполируемые значения производственных результатов, если известны значения производственных ресурсов. Из-за отсутствия времени о точности этой модели и способах её повышения говорить не будем.

5. Эконометрия комплексных переменных

Эконометрия работает с действительными числами и представляет собой достаточно развитый раздел экономической науки. Самым любимым и наиболее распространённым способом оценки коэффициентов эконометрических моделей является метод наименьших квадратов.

Покажем способ использования МНК для эконометрической функции комплексных переменных. Для того чтобы понять, как МНК может быть использован в этом случае, рассмотрим графическую постановку задачи (рисунок 3). Вообще говоря, когда одной комплексной переменной поставлено в функциональное соответствие другая комплексная переменная, то говорят о том, что определена комплеснозначная функция. А для комплекснозначной функции комплексного переменного известно, что её можно рассматривать как пару действительных функций двух действительных переменных, к которым применим МНК. Но для более наглядного понимания этого, мы обоснуем применение МНК с помощью графической интерпретации.

Пусть имеется комплексное число

$$x_0 + iy_0. \qquad (29)$$

Необходимо оценить насколько близко к этому числу другое комплексное число

$$x_1 + iy_1. \qquad (30)$$

Эти оба числа изображены на рисунке 3. Каждое из них представляет собой вектор, выходящий из точки начала координат, и заканчивающийся в точке с координатами (x_0,y_0) или (x_1,y_1).

Числа будут равны друг другу только тогда, когда оба вектора совпадут друг с другом. Во всех других случаях разность этих двух чисел

$$(x_0 + iy_0) - (x_1 + iy_1) = (x_0 - x_1) + i(y_0 - y_1) \qquad (31)$$

будет представлять собой комплексное число, графически представимое как вектор, выходящий из начала координат и заканчивающийся в точке с координатами, определяемыми действительной и мнимой частями равенства (31) . Графически эта разность может быть найдена как разность двух исходных векторов (29) и (30) (рисунок 3). Разностью векторов, очевидно, является вектор, который выходит из точки с координатами (x_1,y_1), а заканчивается в точке с координатами (x_0,y_0).

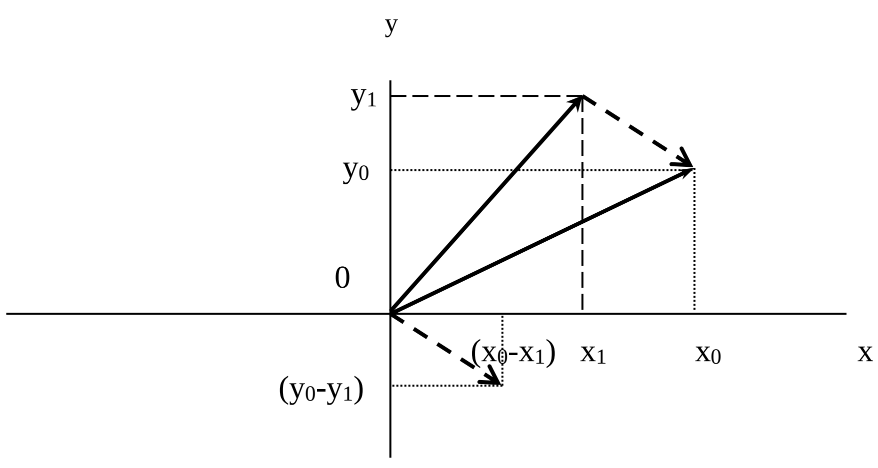


Рисунок 3. Графическая интерпретация степени приближения одного комплексного числа к другому

Если два комплексных числа равны друг другу, то, как уже говорилось, (31) превращается в нуль. Чем более далеки друг от друга два комплексных числа, тем большей длины вектор, определяемый (31).

Если перед исследователем находится совокупность комплексных переменных

$$x_t + iy_t, \qquad (32)$$

которую надо описать некоторой моделью

$$\hat{x}_t + i\hat{y}_t, \qquad (33)$$

то эту модель надо построить так, чтобы расстояния между (32) и (33) было минимально возможно для всех t. Это расстояние, как легко следует из приведённых выше рассуждений, представляет собой разность (37) и (38). При этом совершенно не важно направление полученного вектора. Важна его длина, а это - модуль комплексного числа. Для рассматриваемой разности между (32) и (33) модуль вектора будет равен:

$$r_t = \sqrt{(x_t - \hat{x}_t)^2 + (y_t - \hat{y}_t)^2}\,, \qquad (34)$$

Требование минимизации суммы квадратов отклонений для всех t в данном случае можно записать как:

$$\min \sum_t r_t^2 = \min \sum_t \left(\sqrt{(x_t - \hat{x}_t)^2 + (y_t - \hat{y}_t)^2}\right)^2 = \min\left(\sum_t (x_t - \hat{x}_t)^2 + \sum_t (y_t - \hat{y}_t)^2\right), \quad (35)$$

Условие (35) показывает нам способ оценки параметров функции комплексной переменной с помощью метода наименьших квадратов - минимизируются коэффициенты действительной и мнимой частей комплекснозначной функции.

Это условие неоднократно проверялось на примере производственной функции комплексных аргументов и производственной функции комплексных переменных. Оценки МНК, вытекающие из (35) были вполне достоверны.

Посмотрим теперь как модельный ряд эконометрики может быть Расширен за счёт применения комплексных переменных. Представление экономических показателей в виде (16) открывает возможности развить модельный ряд этого раздела.

Рассмотрим на первом этапе возможность применения моделей типа:

$$Y_{t0} + iY_{t1} = F(t + iX_t), \qquad (36)$$

где Y_{t0} и Y_{t0} – некая пара зависимых переменных.

Преимущества моделей (36) заключается в том, что они в явном виде включают в качестве одного из аргументов время, то есть, они являются динамичными и предназначены для вычислений экономических показателей, меняющихся во времени.

В ряду этих моделей первой стоит простая линейная модель:

$$Y_{t0} + iY_{t1} = (a_0 + ia_1)(t + iX_t). \qquad (37)$$

Коэффициент пропорциональности определяется из равенства:

$$a_0 + ia_1 = \frac{Y_{t0} + iY_{t1}}{t + iX_t} = \frac{(Y_{t0} + iY_{t1})(t - iX_t)}{t^2 - X_t^2}. \qquad (38)$$

Откуда легко найти формулы для вычисления действительной и мнимой частей коэффициентов линейной модели:

$$a_0 = \frac{tY_{t0} + Y_{t1}X_t}{t^2 - X_t^2} \text{ и } a_1 = \frac{tY_{t1} - Y_{t0}X_t}{t^2 - X_t^2}. \qquad (39)$$

Метод оценки коэффициентов для других моделей подобного типа очевиден: комплексные коэффициенты находятся как частное зависимых переменных и независимой. Если, например, модель (30) будет представлена уже как квадратичная зависимость, коэффициент пропорциональности находится с помощью формулы:

$$a_0 + ia_1 = \frac{Y_{t0} + iY_{t1}}{\left(t + iX_t\right)^2}. \qquad (40)$$

Аналогично можно найти параметры логарифмической, экспоненциальной, степенной и т.п. эконометрических однофакторных моделей. Если стоит задача найти комплексный коэффициент на всём множестве значений, то здесь применяется МНК, критерий которого уже сформулирован для комплекснозначных функций (35).

МНК необходимо использовать и для более сложных моделей, в которых встречаются два и более комплексных коэффициента, например, для модели типа:

$$Y_{t0} + iY_{t1} = (a_0 + ia_1)(t + iX_t) + (b_0 + ib_1)(t + iX_t)^2. \qquad (41)$$

или многофакторных моделей.

Покажем как использовать МНК применительно к двухфакторной линейной комплекснозначной функции:

$$Y_{0t} + iY_{1t} = (a_0 + ia_1)(t + iX_{1t}) + (b_0 + ib_1)(t + iX_{2t}). \qquad (42)$$

Для оценки её параметров с помощью МНК необходимо выделить действительную и мнимую части этой функции, что достигается элементарно, если раскрыть скобки в правой части равенства и сгруппировать вещественную и мнимые части. С учётом того, что имеется четыре неизвестных коэффициента, то применение МНК и для действительной части, и для мнимой части приведёт к получению двух систем по четыре нормальных уравнений в каждом.

Для вещественной части получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_t Y_{0t}t = a_0\sum\limits_t t^2 - a_1\sum\limits_t X_{1t}t + b_0\sum\limits_t t^2 - b_1\sum\limits_t X_{2t}t \\ \sum\limits_t Y_{0t}X_{1t} = a_0\sum\limits_t tX_{1t} - a_1\sum\limits_t X_{1t}^2 + b_0\sum\limits_t tX_{1t} - b_1\sum\limits_t X_{2t}X_{1t} \\ \sum\limits_t Y_{0t}t = a_0\sum\limits_t t^2 - a_1\sum\limits_t X_{1t}t + b_0\sum\limits_t t^2 - b_1\sum\limits_t X_{2t}t \\ \sum\limits_t Y_{0t}X_{2t} = a_0\sum\limits_t tX_{2t} - a_1\sum\limits_t X_{2t}X_{1t} + b_0\sum\limits_t tX_{2t} - b_1\sum\limits_t X_{2t}^2 \end{cases}. \qquad (43)$$

Для мнимой части:

$$\begin{cases} \sum_t Y_{1t}t = a_0\sum_t X_{1t}t + a_1\sum_t t^2 + b_0\sum_t X_{2t}t + b_1\sum_t t^2 \\ \sum_t Y_{1t}X_{1t} = a_0\sum_t X_{1t}^2 + a_1\sum_t X_{1t}t + b_0\sum_t X_{2t}X_{1t} + b_1\sum_t X_{1t}t \\ \sum_t Y_{1t}t = a_0\sum_t X_{1t}t + a_1\sum_t t^2 + b_0\sum_t X_{2t}t + b_1\sum_t t^2 \\ \sum_t Y_{1t}X_{2t} = a_0\sum_t X_{1t}X_{2t} + a_1\sum_t X_{2t}t + b_0\sum_t tX_{2t}^2 + b_1\sum_t X_{2t}t \end{cases}. \qquad (44)$$

Легко увидеть, что первые и третьи уравнения каждой из систем равны друг другу. Поэтому вместо восьми имеем только шесть независимых уравнений с четырьмя переменными (коэффициентами), а именно:

$$\begin{cases} \sum_t Y_{0t}t = a_0\sum_t t^2 - a_1\sum_t X_{1t}t + b_0\sum_t t^2 - b_1\sum_t X_{2t}t \\ \sum_t Y_{0t}X_{1t} = a_0\sum_t tX_{1t} - a_1\sum_t X_{1t}^2 + b_0\sum_t tX_{1t} - b_1\sum_t X_{2t}X_{1t} \\ \sum_t Y_{0t}X_{2t} = a_0\sum_t tX_{2t} - a_1\sum_t X_{2t}X_{1t} + b_0\sum_t tX_{2t} - b_1\sum_t X_{2t}^2 \\ \sum_t Y_{1t}t = a_0\sum_t X_{1t}t + a_1\sum_t t^2 + b_0\sum_t X_{2t}t + b_1\sum_t t^2 \\ \sum_t Y_{1t}X_{1t} = a_0\sum_t X_{1t}^2 + a_1\sum_t X_{1t}t + b_0\sum_t X_{2t}X_{1t} + b_1\sum_t X_{1t}t \\ \sum_t Y_{1t}X_{2t} = a_0\sum_t X_{1t}X_{2t} + a_1\sum_t X_{2t}t + b_0\sum_t tX_{2t}^2 + b_1\sum_t X_{2t}t \end{cases}. \qquad (45)$$

Подробное исследование этой и подобных систем для эконометрических комплекснозначных моделей ещё не удалось осуществить из-за отсутствия коллектива учёных, поскольку эта тема разрабатывается пока что в одиночку. Можно не сомневаться, конечно, что здесь исследователя ожидает целый букет проблем, но сомнений в том, что можно найти способ удачного решения поставленной задачи у меня лично нет. Принципиально важно, что задача (38) может быть решена, а это значит, что исследователь в состоянии прогнозировать пару экономических показателей с помощью многофакторной модели, где экономические показатели представлены в виде пары чисел в одной комплексной переменной, либо каждая из них представлена как комплексная переменная (16).

Этот подход применим практически ко всем экономическим задачам, например, легко может быть решена задача прогнозирования объёма продаж на рынке и цен за каждую единицу проданных товаров, если количество участников рынка увеличится или уменьшится, а также изменятся доходы у потребителей. Эта задача уже вызывает интерес в теории конкуренции, поскольку математическими методами в области действительных чисел решить её достаточно сложно.

Необходимо отметить, что сами экономические показатели, представленные как комплексные переменные с помощью вида (16), могут рассматриваться как динамический ряд. Исследование этого ряда также может принести много сюрпризов. Самостоятельный интерес здесь вызывает построение трендовых моделей, в которых экономический показатель, представленный в виде (16), описывается как некоторая функция от времени. Модели типа $t + iy_t = (a_0 + ia_1)t$ не имеет смысла рассматривать, поскольку они легко трансформируются в аналогичные модели действительных переменных и усложнение – переход в комплексную область – ничего нового не даст. Поэтому следует рассматривать изменение во времени комплексной переменной, представленной в форме (16), иначе.

Так как переменная $t + iy_t$ содержит в себе время, то для построения её трендовой модели (зависимости комплексной переменной от времени) достаточно оценить изменение во времени либо модуля комплексной переменной, либо её полярного угла.

Первый случай, когда рассматривается тренд модуля комплексного переменного, соответствует модели:

$$r_{Y_t} = \sqrt{t^2 + Y_t^2} = f(t). \qquad (46)$$

Если рассматривать изменение во времени полярного угла, то модели второго вида запишутся так:

$$\theta_{Y_t} = arctg\frac{Y_t}{t} = F(t). \qquad (48)$$

Понятно, что если с помощью (46) удастся получить для заданного t какую-либо оценку модуля комплексной переменной $t + iy_t$, то легко найти как величину полярного угла, так и величину прогнозируемого значения переменной y_t. То же самое можно сделать, зная полярный угол.

Поэтому просто покажем, почему имеет смысл исследовать эти модели. Простая линейная модель:

$$r_{Y_t} = \sqrt{t^2 + Y_t^2} = a_0 + a_1 t, \qquad (49)$$

коэффициенты которой находятся элементарно с помощью МНК соответствует в области действительных чисел модели:

$$Y_t = \sqrt{a_0^2 + 2a_0 a_1 t + (a_1^2 - 1)t^2}, \qquad (50)$$

коэффициенты которой не так то легко найти.

То есть, форма (49) открывает возможность для построения целого ряда новых, не применяемых пока эконометрических моделей в виде трендов.

Ещё более сложные модели в области действительных чисел удаётся построить, если использовать тренды полярного угла, коэффициенты которых с помощью (48) находятся достаточно легко.

Вывод

Таким образом, использование комплексных переменных в экономико-математическом моделировании, судя по имеющимся первым наработкам, действительно открывает новое и очень перспективное направление. Интересной, но пока не изученной является задача построения оптимизационных моделей. Интересно применить комплексные переменные к моделям межотраслевого баланса. Любопытно было бы посмотреть на возможности использования комплексных переменных в транспортных задачах.

О тех практических результатах, которые открываются перед исследователем с использованием комплексных переменных в экономико-математическом моделировании, будет рассказано в следующих докладах.

Светуньков С.Г., Светуньков И.С.

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1 Введение

Аппарат производственных функций – один из самых разработанных в экономическом анализе, и достаточно часто применяется в производственной практике.

Выделяют производственные функции в аддитивной и в мультипликативной форме. Например, наиболее известная производственная функция – функция Кобба-Дугласа – является мультипликативной производственной функцией.

О производственных функциях читают в курсах общей экономической теории, микроэкономики, макроэкономики. Информацию о них можно найти практически в любом учебнике по экономике. Ну, например, в учебнике по микроэкономике под редакцией Л.С. Тарасевича.

Производственные функции позволяют соединить между собой факторы производства и результаты производства с помощью неких математических аппаратов. Это даёт возможность регулировать использование тех или иных ресурсов в производстве, рассчитывая на определённый результат производства (например, объём производимого товара).

В производственной функции вещественных переменных обычно связывают объём (Q) выпуска с количеством затраченных на производство товара труда (L) и капитала (K):

$$Q = F(K, L).$$

Производственная функция комплексных переменных позволяет создавать более сложные модели. Например, связи объёма (Q) выпуска и производственных затрат (C) с трудом (L) и капиталом (K):

$$F(Q, C) = F(K, L)$$

Использование комплексных переменных, как видно, открывает новые перспективы в теории производственных функций, так как подобные модели ранее в математическом анализе никогда не использовались.

2. Производственная функция комплексного аргумента

Наиболее известной и изученной производственной функцией вещественного аргумента является производственная функция Кобба-Дугласа: $Q = aL^{\alpha}K^{1-\alpha}$. Здесь Q, L и K уже были введены ранее, a - параметр нейтральной эффективности (он определяет величину выпуска при единичных затратах ресурсов, не зависящую от прочих характеристик производственного процесса), α – коэффициент эластичности производственной функции.

Производственную функцию комплексного аргумента в аддитивной форме предлагается записывать следующим образом:

$$Q = (K + Li) * (a0 + a1i), (2.1)$$

где a0 и a1 – некие коэффициенты производственной функции комплексного аргумента. При этом отнесение Q, K и L в вещественную или мнимую часть комплексных чисел условно.

Коэффициенты a0 и a1 легко находятся:

$$a_0 = \frac{Q_t L_t}{L_t^2 + K_t^2} \qquad a_1 = \frac{Q_t K_t}{L_t^2 + K_t^2}, (2.2)$$

Естественно, в вычислениях следует использовать только относительные величины.

Полученные формулы позволяют не только найти численные значения коэффициентов по известным значениям затрат и результатов, но и дать экономическую интерпретацию значений каждого из коэффициентов a0 и a1.

Если все исходные переменные равны единице, то легко увидеть, что в этом случае коэффициент a0 и коэффициент a1 равны друг другу и принимают значение 0,5. Если с течением времени экономическая система не развивается во времени, затраты ресурсов и результаты остаются неизменными, то и коэффициенты остаются неизменными и равными 0,5. Следует признать этот случай чрезвычайно редким.

Равенство между коэффициентами, как это легко увидеть из (2.2), возможно только в том случае, когда равны друг другу значения ресурсов: Lt=Kt.

Во всех остальных случаях будет наблюдаться неравенство между коэффициентами. Когда Lt>Kt, то a0 > a1, а когда Lt<Kt то a0 < a1.

Как следует из (2.2) коэффициент a0 отражает изменение интенсивности использования трудовых ресурсов, а коэффициент a1 отражает изменение интенсивности использования капитальных ресурсов. Поэтому данные коэффициенты можно так и называть: коэффициенты использования ресурсов.

Из (2.2) следует ещё одно очевидное свойство коэффициентов, а именно:

$$\frac{L_t}{K_t} = \frac{a_0}{a_1}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим возможные пределы изменения коэффициентов (2.2) в зависимости от изменения того ресурса, поведение которого он отражает, то есть:

$$a_0 = f(L_t) \text{ и } a_1 = f(K_t).$$

Как следует из (2.2), каждый из коэффициентов при стремлении одного из параметров к нулю сам стремится к нулю, а при стремлении одного из параметров к бесконечности, вновь устремляется к нулю.

После определённых преобразований и вычислений были найдены точки экстремумы для функции (2.3) и условия, при которых a_0 и a_1 принимают максимальное значение:

$$a_0 = a_1 = \frac{Q_t}{2L_t} = \frac{Q_t}{2K_t}$$

Изокванты, как известно, показывают, как может меняться структура использования ресурсов – труда и основного капитала, - если объём производства сохраняется неизменным $Q_t=Q=const$. По сути, изокванты характеризуют изменение издержек производства при различных сочетаниях труда и основного капитала, если объёмы производства остаются неизменными. Графически изокванта представляет собой линию на плоскости ресурсов, все точки лежащие на которой характеризуют один и тот же объём производства. Чисто математически изокванты представляют собой зависимость затрат труда от затрат капитала при постоянстве объёмов производства. Для производственной функции Кобба-Дугласа уравнения изоквант будут иметь вид:

- для зависимости капитальных ресурсов от трудовых:

$$K_t = \left(\frac{Q}{a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_t^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

- для зависимости трудовых ресурсов от капитальных:

$$L_t = \left(\frac{Q}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} K_t^{1-\frac{1}{\alpha}}$$

Легко убедиться в том, что при *α = 0,5* уравнение изокванты представляет собой равнобочную гиперболу.

Для производственной функции комплексного аргумента изокванты будут иметь значительно более сложный характер. Для построения уравнения изокванты будем использовать зависимость трудовых ресурсов от капитала при постоянстве объёмов производства.

Производственная функция комплексного аргумента при постоянстве объёмов производства будет иметь вид в соответствии с (2.1):

$$Q = (L_t a_0 + K_t a_1) + i(K_t a_0 - L_t a_1).$$

Отсюда легко получить уравнение изокванты. Поскольку в правой части равенства нет мнимой части, то мнимая составляющая правой части равна нулю. Поэтому:

$$L_t a_0 = Q - K_t a_1 \to L_t = \frac{Q - a_1 K_t}{a_0}. \qquad (2.4)$$

Уравнение изокванты для производственной функции комплексного аргумента представляет собой прямую линию, имеющую отрицательный наклон к оси трудовых ресурсов. Увеличение объёмов производства означает сдвиг этой прямой линии вправо от начала координат плоскости труд-капитал (рисунок 1).

Тангенс угла наклона каждой изокванты определяется отношением двух коэффициентов использования ресурсов:

$$tg\alpha = -\frac{a_1}{a_0}$$

Как видно, уравнение Изокванты для производственной функции комплексного аргумента носит более сложный характер, нежели для функции Кобба-Дугласа.

Изоклинали, как известно, строятся для ситуации, когда при выбранной технологии производства неизменной остаётся себестоимость произведённой продукции, а её объём увеличивается с увеличением затрат ресурсов. Графически изоклиналь представляет собой линию на плоскости ресурсов, все точки на которой характеризуют такие объёмы производства (результаты) которые достигаются при одном и том же способе производстве, одной и той же пропорции между ресурсами, но разных величинах капитальных и трудовых ресурсов. Математическим условием для построения изоклинали выступает условие сохранения одной и той же пропорции между трудовыми и капитальными затратами, то есть:

$$\frac{L_t}{K_t} = \frac{a_0}{a_1} = const$$

.

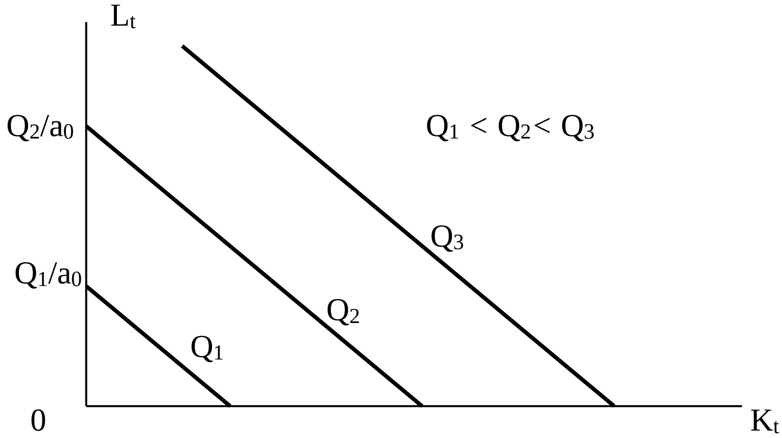


Рисунок 1. Изокванты производственной функции комплексного аргумента

Подставляя это значение в (2.1), получим уравнение изоклинали:

$$Q_t = \frac{a_1^2 + a_0^2}{a_0} L_t . \quad (2.5)$$

Оно, как и следовало ожидать при линейном характере изоквант, представляет собой линейную зависимость. Эта зависимость представляет прямую линию, выходящую из нулевой точки на плоскости трудовых ресурсов - объёма, тангенс угла наклона которой равен сомножителю перед ресурсом L_t. Так как коэффициенты производственной функции комплексного аргумента характеризуют степень использования ресурсов, при различном сочетании ресурсов эти прямые линии будут иметь различные углы наклона.

Поскольку графики изоквант и изоклиналей обычно располагаются на плоскости ресурсов, то уравнение изоклинали следует представить не как зависимость объёмов от трудовых ресурсов (2.5), а как зависимость величины трудовых ресурсов от капитальных ресурсов при росте объёма производства. С учётом того, что изокванты представляют собой прямые линии, любая касательная к ним совпадёт с ними, а изокванта строится для функции Кобба-Дугласа с помощью таких касательных.

В нашем случае изокванты будут представлять собой семейство прямых линий, выходящих из точки начала координат плоскости ресурсов. Уравнение таких линий очевидно:

$$L_t = \frac{a_0}{a_1} K_t . \qquad (2.6)$$

На рисунке 2 изображены изокванты и изоклинали производственных функций. Каждой изоклинали, помеченной номером 1, 2 или 3, соответствует тот или иной тип производства. Изоклинали, помеченной номером 1, соответствует трудоинтенсивный процесс. Изоклинали, отмеченной на рисунке номером 3, соответствует капиталоинтенсивный процесс производства. Изоклиналь под номером 2, угол наклона которой к оси трудовых ресурсов равен 45 градусам, характеризует путь производства, при котором использование ресурсов осуществля-

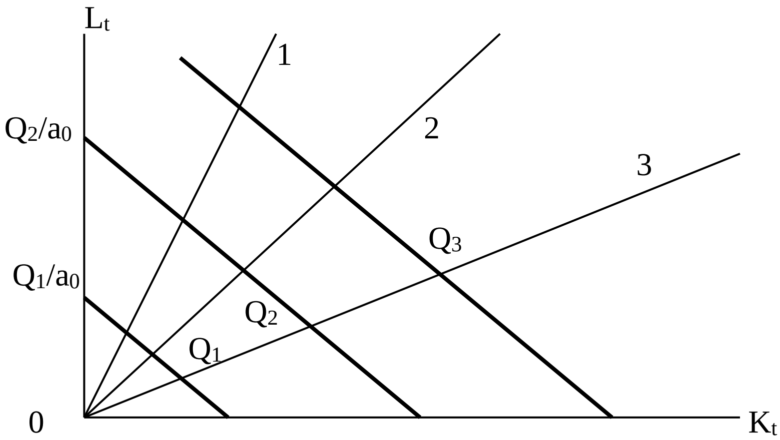


Рисунок 2. Линии изоквант и изоклиналей производственной функции комплексного аргумента

ется в одинаковой степени.

3. Производственная функция комплексной переменной

Производственная функция комплексной переменной уникальна и в области вещественных чисел не имеет аналогов:

$$Q + Ci = (K + Li)(b_0 + b_1 i)$$

Однако, в то время как экономический смысл коэффициентов многих других производственных функций достаточно легко определить, в случае с производственной функцией комплексной переменной всё намного сложнее, и дать экономическую интерпретацию коэффициентам невозможно:

$$b_0 = \frac{Q_t L_t + C_t K_t}{L_t^2 + K_t^2} \qquad (3.1),$$

$$b_0 = \frac{Q_t K_t - C_t L_t}{L_t^2 + K_t^2} \qquad (3.2)$$

Однако найти эти коэффициенты достаточно просто, если имеются необходимые статистические данные. Аспирантка СПбГУЭФ И.Е.Никифорова предоставила в распоряжение статистические данные о производственной деятельности одного из отечественных заводов, которые представлены в таблице 1 (см. приложение).

Воспользовавшись значениями выручки, издержек производства, фондом оплаты труда и величиной основных производственных фондов, построим производственную функцию. Для этого приведём все значения к безразмерным относительным величинам.

За основу возьмём данные по первому наблюдению за февраль 1999 года, которые будут равны единице. Все остальные значения исходных переменных приводятся к этим данным.

Так как формулы (3.1) и (3.2) предоставляют возможность находить соответствующие коэффициенты для каждого момента наблюдений, получим на исходных данных два ряда коэффициентов, которые представлены в таблице 2 (см. приложение).

Легко убедиться в том, что коэффициенты функции меняются во времени и это изменение можно описать, например, моделями трендов.

Если менеджменту данного комбината необходимо определить условия роста производства, то можно произвести многовариантные расчёты, изменяя в полученной модели как величину фонда оплаты труда (а значит, и количества занятых в производстве), так и величину основных производственных фондов.

При этом можно найти варианты минимальной себестоимости, максимальной прибыли, максимальной валовой продукции и т.п.

Стоит отметить, что другие производственные функции, представленные только с помощью вещественных чисел, не позволяют провести комплексные расчёты такого уровня. Для этого следует построить модель производственной функции в виде системы как минимум из двух уравнений, решая которые можно получить искомые результаты.

4. Метод наименьших квадратов применительно к ПФКА и ПФКП

Естественно, что нахождение коэффициентов не по конкретным разовым значениям, а по какому-то ряду предпочтительней. Наиболее эффективный метод нахождения коэффициентов какой-либо функции – метод наименьших квадратов.

Всего существует три метода нахождения коэффициентов производственной функции комплексного переменного методом наименьших квадратов.

Первый способ заключается в следующем. По каждому из имеющихся t наблюдений за производственным процессом находятся с помощью формул (2.2) коэффициенты a_0 и a_1. Затем полученные ряды значений этих коэффициентов, изменяющихся во времени, аппроксимируются с помощью наиболее подходящей модели. В самом простом случае, когда вариация коэффициентов объясняется действием только случайных факторов, рассчитывается их средняя арифметическая. Полученные значения подставляются в модель производственной функции (2.1) и эта модель используется для аппроксимации.

Так, например, по данным производства для бывшего СССР можно с помощью метода наименьших квадратов (МНК) построить трендовые модели изменения коэффициентов.

Анализ характера динамики каждого из коэффициентов использования ресурсов показал, что для коэффициента использования трудовых ресурсов может быть использован линейный тренд. Метод наименьших квадратов (МНК) даёт такие оценки значений его параметров:

$$\hat{a}_{ot} = 0,5121 - 0,0164t,$$

где t=T-1971, (T- текущий год от Р.Х.),

Для коэффициента использования капитальных ресурсов также может быть использован линейный тренд. С помощью МНК был получен линейный тренд следующего вида:

$$\hat{a}_{1t} = 0,5263 + 0,0052t.$$

Подставляя значения каждого из трендов в функцию (2.1), получим следующую модель, аппроксимирующую производственный процесс бывшего СССР с 1972 по 1989 год:

$$\hat{Q}_t = (L_t + iK_t)\left(\left(0,5121 - 0,0164t\right) - i(0,5263 + 0,0052t)\right), \qquad (4.1)$$

Эту модель можно использовать для самых различных целей.

Аналогично по данным для современной России (с 1998 по 2003 год) можно найти тренды коэффициентов использования ресурсов. Анализ их динамики показал, что для коэффициента использования трудовых ресурсов наилучшим образом подходит степенная функция. Оценка МНК её параметров позволяет получить тренд следующего вида:

$$\hat{a}_0 = 1,0746t^{-0,9808}.$$

Здесь t=T-1997, T – текущий год.

Анализ характера коэффициента использования капитальных ресурсов современной России показал, что он меняется во времени так, что лучше всего это изменение опишет линейный тренд. Применение МНК в данном случае позволило получить такой тренд:

$$\hat{a}_1 = 6,7528 - 0,1278t\,.$$

Тогда, с учётом полученных значений параметров использования ресурсов, можно использовать следующую модель производственной функции комплексного аргумента, параметры которой найдены с помощью первого подхода по использованию МНК:

$$\hat{Q}_t = (L_t + iK_t)(1,0746t^{-0,9808} - i(6,7528 - 0,1278t))\,. \qquad (4.2)$$

Эта модель может использоваться, например, для многовариантного прогнозирования роста ВВП в зависимости от различных сочетаний инвестиций и численности занятых.

Покажем, как это можно сделать, и насколько пригодна модель производственной функции комплексного аргумента для этих целей.

Первый возможный вариант – когда ни инвестиции, ни численность занятых не меняются во времени и их значения остаются равными значениям за 2003 год. Меняются только технологии производства за счёт каких-то внутренних источников, что отражается изменением коэффициентов использования ресурсов.

Этот вариант экономической динамики при современной благоприятной экономической конъюнктуре, связанной с невиданным ростом цен на нефть на мировых рынках, можно считать кране не благоприятным. Прогнозируя изменение на перспективу коэффициентов использования ресурсов, и подставляя в (4.2), можно получить прогнозные значения изменения ВВП с 2004 года по 2010 год при этом наихудшем варианте развития (таблица 1).

Эта модель может использоваться, например, для многовариантного прогнозирования роста ВВП в зависимости от различных сочетаний инвестиций и численности занятых.

Покажем, как это можно сделать, и насколько пригодна модель производственной функции комплексного аргумента для этих целей.

Первый возможный вариант – когда ни инвестиции, ни численность занятых не меняются во времени и их значения остаются равными значениям за 2003 год. Меняются только технологии производства за счёт каких-то внутренних источников, что отражается изменением коэффициентов использования ресурсов. Этот вариант экономической динамики при современной благоприятной экономической конъюнктуре, связанной с невиданным ростом цен на нефть на мировых рынках, можно считать кране не благоприятным. Прогнозируя изменение на перспективу коэффициентов использования ресурсов, и подставляя в (4.2), можно получить прогнозные значения изменения ВВП с 2004 года по 2010 год при этом наихудшем варианте развития (таблица 1).

Таблица 1. Прогноз роста ВВП России с помощью модели (4.2) при наихудшем сценарии развития

Год	a_0	a_1	ВВП (относительные значения)	ВВП (абсолютные значения)
2004	0,174	0,987	5,01819068	13198
2005	0,160	1,015	4,61607861	12140
2006	0,148	1,039	4,28822233	11278
2007	0,139	1,062	4,01472667	10559
2008	0,131	1,082	3,78237739	9948
2009	0,124	1,100	3,58202089	9420
2010	0,118	1,117	3,40709636	8961

В таблице 1 и последующих расчётах для динамики ВВП России специально в качестве границы прогноза выбран 2010 год, к которому ВВП России по неоднократному высказанному желанию Президента РФ должен удвоится.

В качестве прогнозного варианта, приближенного к реальности, следует рассматривать вариант, когда помимо сохранения динамики коэффициентов использования ресурсов сохраняется тенденция динамики использования самих трудовых и капитальных ресурсов. Для реализации такого варианта следует найти и описать тренды капитальных ресурсов и трудовых ресурсов.

Инвестиции, меняющиеся во времени, лучше всего описываются линейным трендом. МНК даёт следующие оценки для этого тренда:

$$K_t = 0{,}8781t + 0{,}0775. \quad (4.3)$$

Численность занятых в производстве также может быть описана линейным трендом, оценки параметров которого с помощью МНК дают следующий тренд:

$$L_t = 0{,}0098t + 0{,}9799. \qquad (4.4)$$

Подставляя эти значения в (4.2), можно получить прогноз и для этого варианта динамики ВВП России. Результаты расчётов сведены в таблицу 2. Здесь же в качестве ориентира приведены прогнозные значения для ВВП при использовании производственной функции Кобба-Дугласа. Прогнозные оценки по этой функции осуществляются также с учётом (4.3) и (4.4). Здесь же для верификации прогноза приведён прогноз изменения ВВП с помощью линейного тренда изменения ВВП во времени, оценки которого также найдены с помощью МНК:

$$Q_t = 2084{,}2t + 675{,}73$$

Таблица 2. Прогноз роста ВВП России при сложившихся тенденциях (абсолютные значения)

Год прогноза	Прогноз с помощью функции Кобба-Дугласа	Прогноз с помощью производственной функции комплексного аргумента	Линейный тренд
2004	29574	16627	15265
2005	37935	19397	17349
2006	47221	22233	19434
2007	57404	25128	21518
2008	68454	28075	23602
2009	80344	31068	25686
2010	93050	34104	27770

Мы не будем сейчас говорить о том, какому прогнозу отдаём предпочтение – сейчас следует просто подтвердить вывод о том, что данный способ оценивания производственной функции комплексного аргумента имеет право на существование и сама модель вполне может использоваться в экономической практике. Зная (4.2), можно выполнить и другие расчёты при различном сочетании ресурсов.

Отмечая высокую эффективность первого подхода – анализа динамики изменения коэффициентов модели и моделирование этой динамики, следует указать и на то, что возможен и другой подход, который и используется в экономике при прогнозировании производственных процессов с помощью производственной функции Кобба-Дугласа. По статистическим данным с помощью метода наименьших квадратов находят значения постоянных a и α функции Кобба-Дугласа, после чего полученные расчётные значения можно использовать и для анализа сути происходящих процессов, и для их прогнозирования.

МНК чаще всего используют следующим образом. Функцию Кобба-Дугласа линеаризуют с помощью логарифмирования по какому-либо основанию, а уже параметры такой линеаризированной функции оценивают с помощью МНК. После этого определяют уже параметры исходной функции Кобба-Дугласа. Как было показано в параграфе 1.4 данной работы, эти параметры являются смещёнными, а значит, и точность как аппроксимации, так и интерполяции с помощью такой функции окажется очень невысокой. Кроме того, важным ограничением использования функции Кобба-Дугласа является требование положительности коэффициента α. А это не всегда встречается. Вот, например, на относительных данных таблицы 2.3 с помощью метода наименьших квадратов можно получить:

$$Q_t = 0.3303 L_t^{-0.954} K_t^{1.954}.$$

Отрицательность одного из коэффициентов противоречит условиям существования самой функции Кобба-Дугласа. Следовательно, использовать аналитические свойства функции в данной ситуации невозможно.

Что касается производственной функции комплексного переменного, то её параметры, как было об этом сказано в начале параграфа, можно оценить и иным способом.

<u>Второй способ</u> оценки параметров с помощью МНК заключается в следующем.

Производственная функция комплексного аргумента состоит из двух частей: вещественной и мнимой. Из формулы (2.2):

$$a_0 = \frac{Q_t L_t}{L_t^2 + K_t^2}$$

легко найти значение объёма производства через коэффициент использования трудовых ресурсов и сами ресурсы:

$$\hat{Q}_t = a_0 \frac{L_t^2 + K_t^2}{L_t}. \qquad (4.5)$$

Так как в задаче МНК переменными являются коэффициенты модели, то в данном случае получаем элементарное линейное уравнение. Задача нахождения оценки параметра a_0 с помощью МНК при этом сводится к нахождению условия минимизации суммы квадратов отклонений:

$$\sum_t \left(Q_t - a_0 \frac{L_t^2 + K_t^2}{L_t} \right)^2. \qquad (4.6)$$

Минимизируя эту функцию по единственному параметру a_0 и приравнивая нулю первую производную, получим уравнение для оценки этого параметра с помощью МНК:

$$\hat{a}_0 = \frac{\sum_t Q_t L_t \left(L_t^2 + K_t^2 \right)}{\sum_t \left(L_t^2 + K_t^2 \right)^2}, \qquad (4.7)$$

Помимо коэффициента использования трудовых ресурсов в производственной функции комплексного аргумента имеется ещё один коэффициент, а именно – коэффициент использования капитальных ресурсов. Его можно найти аналогично из формулы (2.2.11):

$$a_1 = \frac{Q_t K_t}{L_t^2 + K_t^2}.$$

Объёмы производства можно определить через коэффициент использования капитальных ресурсов и сами ресурсы – трудовые и капитальные следующим образом:

$$\hat{Q}_t = a_1 \frac{L_t^2 + K_t^2}{K_t}. \quad (4.8)$$

В данном случае необходимо найти такие значения коэффициента a_1, чтобы минимальной была сумма квадратов отклонений:

$$\sum_t \left(Q_t - a_1 \frac{L_t^2 + K_t^2}{K_t} \right)^2. \qquad (4.9)$$

Минимизируя эту функцию по переменной a_1 и приравнивая нулю первую производную для поиска этого минимума, получим уравнение для оценки этого параметра с помощью МНК:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_t Q_t K_t \left(L_t^2 + K_t^2\right)}{\sum_t \left(L_t^2 + K_t^2\right)^2}, \quad (4.10)$$

Полученные формулы для оценки коэффициентов производственной функции комплексного аргумента можно использовать для самых разных целей, в том числе и для прогнозирования.

Так, по исходным статистическим данным таблицы 2.3 для экономики современной России были найдены оценки коэффициентов производственной функции с помощью МНК. Она имеет вид:

$$\hat{Q}_t = (L_t + iK_t)(0,203 - i0,894). \quad (4.11)$$

С учётом того, что коэффициенты a_0 и a_1 за исходный период существенно менялись, как это видно из таблицы 2.3, и именно это изменение позволило аппроксимировать динамику во времени коэффициентов использования ресурсов соответствующими трендами $\hat{a}_{0t} = 1,0746t^{-0,9808}$ то $\hat{a}_{1t} = 6,7528 - 0,1278t$ модель (4.11) даст иные, чем прежде, результаты. Проверим, как поведёт себя эта модель при выполнении прогнозов. При этом для значений трудовых и капитальных ресурсов будем подставлять их модели в виде трендов (4.3) и (4.4). Результаты прогноза сведены в таблицу 3.

Полученная функция может использоваться как для многовариантных прогнозов, так и для некоторых аналитических выводов относительно происходивших в период с 1998 по 2003 год в России процессов.

Третий способ использования МНК для производственной функции комплексного аргумента заключается в том, чтобы его применить к самой производственной функции непосредственно.

Таблица 3. Прогноз роста ВВП России с помощью модели (4.11)

Год	ВВП (относительные значения)	ВВП (абсолютные значения)
2004	5,77878767	15198
2005	6,56596912	17268
2006	7,35315057	19339
2007	8,14033203	21409
2008	8,92751348	23479
2009	9,71469494	25550
2010	10,5018764	27620

Этому методу посвящён доклад "Применение теории комплексного переменного в экономике как новая парадигма экономико-математического моделирования". Применительно к нашей задаче он привёл к необходимости решения системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_t Q_t L_t = a_0(\sum_t L_t^2 + \sum_t K_t^2) \\ \sum_t Q_t K_t = a_1(\sum_t L_t^2 + \sum_t K_t^2) \end{cases}. \quad (4.12)$$

Откуда легко найти каждый из коэффициентов. Коэффициент использования трудовых ресурсов равен:

$$a_0 = \frac{\sum_t Q_t L_t}{\sum_t L_t^2 + \sum_t K_t^2}. \quad (4.13)$$

Коэффициент использования капитальных ресурсов:

$$a_1 = \frac{\sum_t Q_t K_t}{\sum_t L_t^2 + \sum_t K_t^2}. \quad (4.15)$$

На тех же данных экономики России с 1998 по 2003 год с помощью полученных формул для оценок МНК легко рассчитать значения коэффициентов использования ресурсов. Коэффициент использования трудовых ресурсов равен $a_0=0,234$, а коэффициент использования капитальных ресурсов $a_1= 0,876$, то есть модель производственной функции комплексного аргумента для экономики России теперь выглядит так:

$$\hat{Q}_t = (L_t + iK_t)(0,234 - i0,876). \quad (4.16)$$

В таблице 4 приведён прогнозный расчёт значений ВВП России на перспективу до 2010 года для модели (4.16) с помощью тех же трендов, что и для прогнозов, проведённых ранее.

Таблица 4. Прогноз роста ВВП России с помощью модели (4.16)

Год	ВВП (относительные значения)	ВВП (абсолютные значения)
2004	5,69928153	14989
2005	6,47098206	17019
2006	7,2426826	19048
2007	8,01438313	21078
2008	8,78608367	23107
2009	9,55778421	25134
2010	10,3294847	27167

Сложно делать вывод о том, какой из способов оценивания параметров производственных функций оказался лучшим для целей прогнозирования. Да мы и не ставили перед собой такую задачу. Мы лишь показываем, что параметры предлагаемых производственных функций могут быть оценены на статистических данных, и эти оценки не вызывают особых нареканий. Конечно, следует провести дополнительные исследования о достоверности оценок, их доверительных границах и т.п. Но это – задачи дальнейших исследований.

Покажем, как можно оценить параметры производственных функций комплексных переменных, рассмотренных в третьей части.

Мы будем рассматривать функциональную зависимость одного комплексного числа от другого:

$$Q_t + iC_t = F\left(L_t + iK_t\right). \qquad (4.17)$$

Функций, которые связывают зависимостью (4.17) две комплексные переменные $Q_t + iC_t$ и $L_t + iK_t$ бесконечно много. Так как производственные процессы отличаются друг от друга:

- уровнем иерархии (предприятие, группа предприятий, региональное производство, национальное производство, мировое производство и т.п.),

- спецификой производства (сельскохозяйственное производство, машиностроение, лёгкая промышленность, нефтедобыча, производство электронергии и т.п.),

- национально-географическими особенностями (трудоизбыточное население или трудодефицитное; наличие источников сырья и транспортных узлов; тёплый, жаркий или холодный климат и т.п.),

то в единой производственной функции комплексных переменных, которая наилучшим образом описывает эти производственные процессы, меняя лишь в зависимости от ситуации значения своих коэффициентов, не существует. Это может быть линейная функция, а может быть и, например, логарифмическая функция комплексных переменных. В каждом случае экономист должен выбрать из имеющегося множества возможных функций наилучшую.

Самая простая – линейная, - функция типа:

$$Q_t + iC_t = b_0 + b_1\left(L_t + iK_t\right)$$

не представляет интереса, поскольку, раскрыв скобки, получим элементарное равенство:

$$Q_t + iC_t = b_0 + b_1 L_t + i b_1 K_t .$$

Откуда получаем, что

$$Q_t = b_0 + b_1 L_t , \text{ а } C_t = b_1 K_t .$$

Конечно, в определённых случаях эта модель может быть использована в экономической практике, но универсальной её назвать нельзя.

Как раз универсальной для целого ряда случаев может быть линейная функция, рассмотренная ранее, а именно:

$$Q_t + iC_t = \left(L_t + iK_t\right)(b_0 - ib_1) . \qquad (4.18)$$

Коэффициенты этой модели легко определить (3.1) и (3.2), но покажем, как их найти на множестве значений с помощью МНК.

Для этого находим первые производные функции, минимизирующей комплексный параметр по переменным b_0 и b_1, после чего приравниваем эти производные нулю. После небольших преобразований и сокращений получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} b_0(\sum_t L_t^2 - \sum_t K_t^2) = \sum_t Q_t L_t + \sum_t K_t C_t \\ b_1(\sum_t L_t^2 + \sum_t K_t^2) = \sum_t C_t L_t - \sum_t K_t Q_t \end{cases} . \qquad (4.19)$$

Теперь достаточно легко найти формулы для вычисления коэффициентов производственной функции комплексной переменной с помощью МНК. Для коэффициента b_0:

$$b_0 = \frac{\sum_t Q_t L_t + \sum_t K_t C_t}{\sum_t L_t^2 - \sum_t K_t^2} , \qquad (4.20)$$

Для коэффициента b_1:

$$b_1 = \frac{\sum_t C_t L_t - \sum_t K_t Q_t}{\sum_t L_t^2 + \sum_t K_t^2} . \qquad (4.21)$$

По данным таблицы 1 приложения были найдены коэффициенты производственной функции комплексной переменной с помощью (4.20) и (4.21). Подставляя их в 4.18, получим модель следующего вида:

$$Q_t + iC_t = \left(L_t + iK_t\right)(2{,}319 - i0{,}087) . \qquad (4.21)$$

Теперь с помощью этой модели можно проводить различные модельные эксперименты.

Вывод

Как видно, производственные функции комплексного аргумента и комплексной переменной позволяют решать более сложные задачи, нежели, производственные функции вещественных переменных, например, такие как функция Кобба-Дугласа. К тому же, производственные функции комплексного аргумента в силу своей специфики позволяют находить коэффициенты функции при минимальном числе наблюдений (даже при одном).

Но у производственных функций комплексной переменной в аддитивной форме есть значительный недостаток: невозможность включения в них дополнительных переменных. Эта проблема разрешима только с помощью мультипликативных функций комплексных переменных, о возможности построения которых говорится в докладе "Применение теории комплексного переменного в экономике как новая парадигма экономико-математического моделирования".

Приложение

Таблица 1

Производственная деятельность Диатомового комбината за 1999 год

1999 г.	Выручка, тыс .руб.	Издержки, тыс.руб.	ФОТ, тыс.руб.	Трудозатраты, чел-час	Численность, чел.	ОПФ, тыс.руб.
февраль	2663	2604	213,5	52100	354	4263
март	3250	3178	231,3	51347	357	4263
апрель	1172	1146	289,1	57095	364	4263
май	2106	2059	246,1	62898	401	4263
июнь	918	897	266,6	62742	400	4263
июль	3275	3202	294,1	57005	404	5684
август	2092	2045	396,4	61662	437	5684
сентябрь	2201	2152	310,2	64484	457	5684
октябрь	1845	1804	402,4	63071	454	5684
ноябрь	2675	2615	511,9	64599	465	5684
декабрь	4843	4736	439,4	63905	460	5684

Таблица 2

Коэффициенты производственной функции (2.7)

1999 г.	Коэффициент a_0	Коэффициент a_1
февраль	1,000	0,000
март	1,170	-0,047
апрель	0,366	-0,055
май	0,731	-0,052
июнь	0,303	-0,033
июль	0,907	-0,015
август	0,480	-0,079
сентябрь	0,592	-0,025
октябрь	0,418	-0,072
ноябрь	0,498	-0,142
декабрь	1,026	-0,219

С.Г.Светуньков

КОМПЛЕКСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В ТЕОРИИ ИНДЕКСОВ

Для успешного применения теории комплексного переменного в экономике, следует, прежде всего, выявить такую пару экономических значений, которая описывает основные свойства экономического объекта, не являясь при этом прямо пропорциональными друг другу. Её можно будет представить как одно комплексное число. Эти два экономических значения должны по своей сути отражать две стороны одного целого. Рассмотрим возможность использования математического аппарата комплексных переменных применительно к теории индексов. Здесь легко определяется пара экономических показателей, отражающих различные стороны одного целого, но не являющихся при этом пропорциональными друг другу. Это объём продаж товара Q_j и цена за единицу этого проданного товара P_j. Именно эта пара значений используется в теории индексов – одного из старейших разделов экономики.

В соответствии с его основными положениями, общую формулу индексов, используемых в различных прикладных задачах экономики, записывают в следующем виде:

$$I_t = \frac{\sum_{j=1}^{m} P_t^j Q_t^j}{\sum_{j=1}^{m} P_{t-1}^j Q_{t-1}^j}. \qquad (1)$$

Здесь P_j – цена j–го товара, реализованного на рынке,

Q_j – объём j–го товара, реализованного на рынке,

j – номер товара (или предприятия, реализующего товар), который реализуется на рынке, $j = 1, 2, 3, \ldots m$,

t – показатель времени.

Следует отметить, что теория индексов имеет чёткие логические параллели с известными в экономической теории кривыми и поверхностями безразличия. Сумма стоимостей на товары в замкнутой системе при разных ценах при неизменности прочих условий, в соответствии с выводами экономической теории, будет одинаковой (постоянный уровень потребления). Поэтому если меняется ситуация в этой замкнутой системе, будет меняться и совокупная стоимость. Именно поэтому в теории индексов в качестве обобщающей величины в каждый момент времени t используется совокупная стоимость всех покупок на данном рынке:

$$\sum_{j=1}^{m} P_t^j Q_t^j = P_t^1 Q_t^1 + P_t^2 Q_t^2 + P_t^3 Q_t^3 + \ldots + P_t^m Q_t^m . \qquad (2)$$

и осуществляется сравнение совокупных стоимостей в данный момент времени t с совокупной стоимостью в предыдущий момент времени *(t-1)* так, как это показано в (1).

Если экономическая конъюнктура на рынке улучшилась по сравнению с предыдущим моментом, то и количество сделок увеличилось по сравнению с предыдущим моментом, значит, совокупная стоимость продаж также увеличилась и индекс (1) становится больше единицы. Если конъюнктура ухудшилась, число сделок и объёмы продаж уменьшились, то уменьшилась и совокупная стоимость. Это приводит к тому, что числитель (1) оказывается меньше знаменателя, а сам индекс становится меньше единицы. Если же конъюнктура не изменилась, индекс оказывается равным единице. Таким образом, различные значения индекса позволяют интерпретировать состояние экономической конъюнктуры рынка в данный момент по сравнению с предыдущим моментом.

Теория индексов предусматривает возможность использования и других формул, являющихся различными модификациями формулы (1). Обсуждение их преимуществ и недостатков не входит в задачи данной доклада. Покажем только, как можно использовать комплексные переменные в теории индексов.

Прежде всего, представим пару – цена j–го товара, реализованного на рынке P_j, объём j–го товара, реализованного на рынке Q_j как две части комплексной переменной. Для дальнейшей работы с этими переменными следует обязательно их привести к безразмерному виду.

Продажи j–го товара на рынке могут быть представлены в виде комплексной переменной следующего вида:

$$Z_t^j = Q_t^j + iP_t^j . \qquad (3)$$

Здесь i – мнимая единица, которая удовлетворяет равенству:

$$i = \sqrt{-1} \text{ или } i^2 = -1. \quad (4)$$

Комплексная переменная (3) характеризуется модулем:

$$r_t^j = \sqrt{(Q_t^j)^2 + (P_t^j)^2} . \qquad (5)$$

и полярным углом

$$\varphi_t^j = \operatorname{arc} tg \frac{P_t^j}{Q_t^j} . \qquad (6)$$

Теперь можно представить переменную (3) в экспоненциальной форме:

$$Z_t^j = r_t^j e^{i\varphi_t^j} . \qquad (7)$$

Индекс должен содержать в себе информацию обо всех продажах на рынке, которые уместно учитывать, то есть – необходимо использовать для этого m комплексных переменных (7). Тогда, перемножив комплексные переменные продаж всех m товаров на данном рынке, получим новую комплексную переменную:

$$\dot{Z}_t = \prod_{j=1}^{m} Z_t^j = \prod_{j=1}^{m} (r_t^j e^{i\varphi_t^j}) = e^{i\sum_{j=1}^{m}\varphi_t^j} \prod_{j=1}^{m} r_t^j . \qquad (8)$$

Аналогично можно найти произведение комплексных переменных продаж на этом же рынке всех товаров в предыдущий момент времени t-1:

$$\dot{Z}_{t-1} = \prod_{j=1}^{m} Z_{t-1}^j = \prod_{j=1}^{m} (r_{t-1}^j e^{i\varphi_{t-1}^j}) = e^{i\sum_{j=1}^{m}\varphi_{t-1}^j} \prod_{j=1}^{m} r_{t-1}^j . \qquad (9)$$

Отношение (8) к (9) будет также являться комплексной переменной и будет характеризовать ситуацию на рынке, то есть, выступать уже в качестве некоторого индекса:

$$\dot{I}_t = \frac{\dot{Z}_t}{\dot{Z}_{t-1}} = \frac{\prod_{j=1}^{m} Z_t^j}{\prod_{j=1}^{m} Z_{t-1}^j} = \frac{e^{i\sum_{j=1}^{m}\varphi_t^j}}{e^{i\sum_{j=1}^{m}\varphi_{t-1}^j}} \times \frac{\prod_{j=1}^{m} r_t^j}{\prod_{j=1}^{m} r_{t-1}^j} = E_t \times R_t . \qquad (10)$$

Сам этот индекс, в соответствии со свойствами комплексных переменных, является комплексной переменной с действительной и мнимой частью, модуль и полярный угол.

Полярный угол индекса как комплексной переменной (10) находится как показатель степени выражения:

$$E_t = e^{i\theta_t} = e^{i\sum_{j=1}^{m}(\varphi_t^j - \varphi_{t-1}^j)} , \qquad (11)$$

то есть, полярный угол равен $\theta_t = \sum_{j=1}^{m} (\varphi_t^j - \varphi_{t-1}^j)$

Модуль индекса комплексной переменной определяется из (10) по формуле:

$$R_t = \frac{\prod_{j=1}^{m} r_t^j}{\prod_{j=1}^{m} r_{t-1}^j} = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{r_t^j}{r_{t-1}^j}\right) . \qquad (12)$$

Каждая из полученных составляющих имеет свой математический и экономический смысл. Для их выявления воспользуемся графическим представлением комплексного числа (рисунок).

Пусть первый из нанесённых на график векторов - $\dot{z}_t$, представляет собой произведение (8), а второй $-\dot{z}_{t-1}$,- произведение (9). Модуль их отношения (12) будет равен единице только в том случае, если равны модули исходных векторов $\dot{z}_t$ и $\dot{z}_{t-1}$.

Полярный угол первого вектора φ_t, представляющий собой сумму полярных векторов исходных векторов продаж всех товаров в момент времени t, будет равен полярному углу второго вектора φ_{t-1} только в том случае, когда направления исходных векторов каждого товара в среднем совпадают в оба момента времени.

Из графика рисунка становится очевидным, что возможны три варианта значений полярного угла индекса (10).

1) $\theta_t < 0$, когда полярный угол φ_t вектора $\dot{z}_t$ оказывается меньше, чем полярный угол φ_{t-1} вектора $\dot{z}_{t-1}$. Это возможно, когда по сравнению с предыдущим моментом наблюдается общее понижение цен по сравнению с динамикой объёмов продаж на рынке;

2) $\theta_t = 0$, когда полярный угол φ_t вектора $\dot{z}_t$ оказывается равен полярному углу φ_{t-1} вектора $\dot{z}_{t-1}$. Это означает совпадение векторов в пространстве, которое возможно только в том случае, когда либо ситуация на рынке в среднем не изменилась, либо, когда и цены, и объёмы продаж изменились пропорционально. В последнем случае меняет свои значения модуль вектора;

3) $\theta_t > 0$, когда полярный угол φ_t вектора $\dot{z}_t$ оказывается больше, чем полярный угол φ_{t-1} вектора $\dot{z}_{t-1}$. Этот случай соответствует ситуации роста цен на товары в момент времени t по сравнению с предыдущим моментом по сравнению аналогичной динамикой объёмов продаж.

Изменяется и модуль индекса (10). Он может принимать три принципиально различные значения, а именно:

1) $R_t <1$, когда модуль вектора $\dot{z}_t$ оказывается меньше, чем модуль вектора $\dot{z}_{t-1}$. Это может случиться в ситуации, когда стоимость покупок на рынке в целом снизилась;

2) $R_t =1$, когда модуль вектора $\dot{z}_t$ оказывается равен модулю вектора $\dot{z}_{t-1}$. Эта ситуация в общем случае свидетельствует, что стоимость покупок на рынке остаётся неизменной;

3) $R_t >1$, когда модуль вектора $\dot{z}_t$ оказывается больше, чем модуль вектора $\dot{z}_{t-1}$. В целом это характеризует ситуацию роста стоимости покупок.

Из всего вышесказанного следует, что с помощью полярного угла и модуля индекса (10) можно диагностировать множество различных ситуаций на рынке и делать это более точно, чем, например, с помощью индекса, вычисляемого в области действительных чисел. Покажем, как можно использовать предложенный метод на условном примере. Пусть в нашем распоряжении имеются данные о ценах и объёмах продаж товаров на некотором рынке (таблица).

Как легко увидеть из таблицы, данные в ней подобранны так, чтобы цены на все товары к моменту времени t выросли, а объёмы продаж товаров снизились, но так, чтобы совокупные продажи на рынке не изменились.

Рассчитаем в начале простой индекс (1). Получим, что он равен единице - $I_t = 1{,}00$. Это свидетельствует о стабильности на рынке и об отсутствии каких-либо изменений на нём.

Применим теперь индекс комплексной переменной (10).

Для первого товара модуль комплексной переменной будет равен в момент времени *t*:

$$r_t^1 = \sqrt{11^2 + 10^2} = 14{,}87\,.$$

В момент времени *t-1*:

$$r_{t-1}^1 = \sqrt{10^2 + 11^2} = 14{,}87$$

При этом полярный угол комплексной переменной первого товара в момент *t* будет равен:

$$\varphi_t^1 = \operatorname{arc}tg(\frac{11}{10}) = 0{,}8329\,,$$

а в предыдущий момент времени *t*-1:

$$\varphi_{t-1}^1 = \operatorname{arc}tg(\frac{10}{11}) = 0{,}7378\,.$$

Тогда комплексные переменные первого товара в экспоненциальной форме в моменты времени *t* и (*t*-1) будут иметь вид:

$$\dot{Z}_t^1 = 14{,}87e^{i0{,}8329} \text{ и } \dot{Z}_{t-1}^1 = 14{,}87e^{i0{,}7378}\,.$$

Аналогично получим комплексные переменные для второго товара в разные моменты времени:

$$\dot{Z}_t^2 = 12{,}81e^{i0{,}8961} \text{ и } \dot{Z}_{t-1}^2 = 12{,}81e^{i0{,}6747}\,.$$

Для третьего товара:

$$\dot{Z}_t^3 = 8{,}60e^{i0{,}9505} \text{ и } \dot{Z}_{t-1}^3 = 8{,}60e^{i0{,}6376}\,.$$

Для четвёртого товара:

$$\dot{Z}_t^4 = 18{,}05e^{i0{,}9828} \text{ и } \dot{Z}_{t-1}^4 = 18{,}05e^{i0{,}5880}\,.$$

Теперь найдём модуль индекса (10). Он будет равен единице:

$$R_t = \frac{14{,}87 \times 12{,}81 \times 8{,}60 \times 18{,}05}{14{,}87 \times 12{,}81 \times 8{,}60 \times 18{,}05} = 1{,}00,$$

что свидетельствует о стабильности продаж на рынке

Полярный угол индекса в радианах определяется из формулы:

$$E_t = e^{i((0{,}8329-0{,}7378)+(0{,}8961-0{,}6747)+(0{,}9505-0{,}6376)+(0{,}9828-36{,}53))} = e^{i1{,}0242}\,.$$

Он, как видно, равен 1,0242 радиана или 58,68°.

Полученным значениям можно дать следующую интерпретацию.

Значение модуля индекса как комплексной переменной равно единице ($R_t=1{,}00$), что свидетельствуют о стабильности объёмов продаж на рынке. В то же время положительный характер полярного угла комплексного индекса и его значение свидетельствует о том, что цены на товары выросли по сравнению с изменением объёмов продаж. Действительно, как и следует из данных таблицы, цены на все товары выросли, а объёмы продаж на все товары уменьшились. Таким образом, факт изменения ситуации на рынке при равенстве объёмов продаж предлагаемый индекс отразил. А это значит, что индекс, представляемый как комплексная переменная, оказывается более информативным по сравнению с индексом, рассчитываемым только в области действительных чисел.

Дополнительное изучение свойств индекса (10) и интерпретация его значений не входит в задачу данного доклада. Но очевидно, что индекс (10) и вытекающие из него различные модификации следует рассматривать не в качестве альтернативы индексу (1), а в качестве дополнения в теорию индексов.

С Т Е Н О Г Р А Ф И Ч Е С К И Й   О Т Ч Е Т

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ»
19 декабря 2005 года

Всероссийский научный семинар

«ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ»

Присутствуют:

1. Бутуханов Александр Владимирович, кандидат экономических наук, доцент, зав. магистратурой СПбГУЭФ;
2. Дмитриев Сергей Викторович, ст.преподаватель ИжГТУ ("Ижевский государственный технический университет");
3. Иванов Евгений Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, профессор, и.о. зав. каф. Экономической кибернетики и экономико-математических методов СПбГУЭФ;
4. Кузютин Денис Вячеславович, кандидат физико-математических наук, доцент Международного банковского института (Санкт-Петербург), заведующий кафедрой Математических методов исследования экономики,
5. Левин Аркадий Исаакович, доктор экономических наук, профессор БГА РФ (Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота, Калининград);
6. Пастернак Павел Петрович, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой Экономико-математических методов и статистики СПГАУ (Санкт-Петербургский государственный аграрный университет);
7. Савинов Геннадий Володарович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Высшей математики СПбГУЭФ
8. Светуньков Сергей Геннадьевич, доктор экономических наук, профессор, проректор СПбГУЭФ;
9. Силкина Галина Юрьевна, доктор экономических наук, профессор кафедры «Информационные системы в экономике и менеджменте», СПбГПУ (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет),
10. Соколов Дмитрий Викторович, доктор экономических наук, профессор кафедры Экономической кибернетики и экономико-математических методов СПбГУЭФ;
11. Фридман Григорий Морицович, доктор технических наук, профессор кафедры Экономической кибернетики и экономико-математических методов СПбГУЭФ;
12. Чернов Виктор Петрович, доктор экономических наук, профессор кафедры Экономической кибернетики и экономико-математических методов СПбГУЭФ;

Студенты СПбГУЭФ:

Светуньков И.С., Хотимская О. Е., Николаев А.С., Минаева Н.С., Захарова С.К., Михайлов А.В., Мартынюк И.И., Завгородний С.В., Русанова М.О., Михайлова И.Б., Зайцева М.Н., Городницкая А.А., Гузов М.С., Петров Ю.В. , Гусев О.И., Хорева О.А., Убайдуллаев Х.А., Русанова М.О., Николаев А.С., Орлова А.А.

Проф. СОКОЛОВ Д.В.

Разрешите начать заседание нашей научной конференции. Слово предоставляется научному руководителю семинара, инициатору его проведения профессору Светунькову Сергею Геннадьевичу.

Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.

Ровно год назад в декабре 2004 года нам вместе с Иваном Светуньковым, студентом нашего университета, после нескольких лет поиска и научных исследований удалось построить модель производственной функции комплексного аргумента, которая открыла нам путь того, как можно использовать комплексные переменные в экономике.

Наши исследования в библиотеках и в Интернет показали, что никто из отечественных и зарубежных учёных не работал в этом направлении, поэтому наши исследования носят пионерный характер. Для того чтобы познакомить научную общественность с сутью новой научной концепции, мы и проводим данный семинар. Он проводится благодаря поддержке со стороны ректора нашего университета профессора Тарасевича Леонида Степановича.

На семинаре присутствуют учёные из разных вузов Санкт-Петербурга и других городов России, не только из Петербурга, поэтому всесоюзный характер семинара имеет место.

Сегодня на семинаре будет сделано три доклада. Первый доклад концептуального плана сделаю я. Он называется так: **«ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ЭКОНОМИКЕ КАК НОВАЯ ПАРАДИГМА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»**. После доклада выступит в качестве оппонента профессор Савинов Геннадий Володарович.

Второй доклад, подготовленный мною совместно с Иваном Сергеевичем Светуньковым, называется: **"ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ".** В нём обобщается опыт нашей годовой работы над этой темой. В качестве оппонента любезно согласился выступить профессор Виктор Петрович Чернов.

Третий доклад, который вновь сделаю я, называется: **"КОМПЛЕКСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ В ТЕОРИИ ИНДЕКСОВ"**. Я попросил выступить в качестве оппонентов кого-нибудь из учёных кафедры Статистики нашего университета, но те из них, кого предложила заведующая кафедрой Ирина Ильинична Елисеева, ознакомившись с текстом доклада, не смогли дать ему научную оценку именно из-за незнания теории функции комплексного переменного. Поэтому оппонирующего доклада по этой теме не будет. В этой связи я объединю первый и третий доклады в один.

А теперь о применении теории комплексного переменного в экономике как новой парадигме экономико-математического моделирования.

(Делает доклад)

ПРОФ. СОКОЛОВ Д.В.

У кого есть вопросы к Сергею Геннадьевичу?

Проф. ЛЕВИН А.И.

Может быть, мы сначала заслушаем оппонирующий доклад, и оппонент тогда будет в выгодном положении к докладчику? Или можно так, если вопрос уточняющий, то задавать сейчас, а провокационные - задавать потом?

ПРОФ. СОКОЛОВ Д.В.

Давайте так.

Проф. ЛЕВИН А.И.

Сергей Геннадьевич, поскольку у Вас подход чисто статистический, динамика появляется на рисунке 2. При этом говорите, что время - действительная переменная, а затраты - мнимая переменная, а почему?

Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.

В подавляющем большинстве случаев не принципиально, что относить к действительной, а что - к мнимой части. В данном случае, это принципиально. Почему? Потому что время объективно, а экономические показатели - субъективны. Это, во-первых. Во-вторых, можно говорить, что время является общей переменной для всех экономических показателей, поэтому, как общая интегрирующая переменная, она также имеет право находиться в действительной области.

Проф. ЛЕВИН А.И.

Я записывал по ходу Вашего доклада. Когда Вы говорили о других примерах, то Вы время вообще выбросили, а потом говорите, вот, когда много переменных, их можно во времени рассмотреть, и написали длинную-длинную формулу, и вдруг время - появилось. Получается, что время не такая уж фундаментальная константа, раз Вы ею так свободно оперируете, то она есть, когда Вам выгодно, а то ее нет, когда Вам это невыгодно. Так это?

Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.

Правильно. Когда нет смысла вводить время в модель, то я её не ввожу.

Проф. ЛЕВИН А.И.

Но время является субстанцией пространства-времени, её никуда не денешь!

Проф. ПАСТЕРНАК П.П.

Сергей Геннадьевич, Вы рассматриваете два числа. Действительно, комплексное число, имеющее действительную и мнимую часть, рассматривается на плоскости. Любой экономический показатель, можно рассматривать, как это следует из рисунка 2 и других, как комплексное число. А в принципе, каждую пару таких комплексных чисел можно соединить так, чтобы они составляли оси гиперплоскости. Вы, строго говоря, имеете право для двух комплексных переменных построить одну плоскость, еще для двух - вторую плоскость, еще для двух - следующую. Я в своих рассуждениях хочу перейти к многомерному гиперпространству, ведь необязательно привязываться к плоскости. То есть, это будет семейство каких-то гиперплоскостей, исходящих из начальных точек, и там могут быть связи между двумя комплексными числами в одной плоскости с двумя комплексными числами другой плоскости. Вы сейчас рассматриваете, строго говоря, только взаимосвязи между мнимой и действительной частью, на одной плоскости. А вот такой подход Вы продумали? Здесь можно было бы рассмотреть взаимосвязь между количественным значением этих мнимых и действительных частей разных показателей, семейства показателей или целого комплекса показателей.

Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.

Идея интересная, я ею не занимался. Я думаю, что при реализации этого подхода возникнет очень много проблем, но сама научная гипотеза жизнеспособна и весьма продуктивна.

Проф. ЧЕРНОВ В.П.

Я не понял, как Вы собираетесь промоделировать с помощью комплексных переменных спрос? Объём и цена измеряются в разных единицах?

Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.

В разных. Можно сказать так: Z – это спрос как комплексная единица, целое, это тело. А вот объём спроса и цена за единицу изделия - это левая и правая части одного целого. Я здесь исхожу из того, что спрос на товар, это некое целое и это целое должно быть окаймлено двумя составляющими: объемом спроса и ценой спроса.

С места

А как Вы различаете спрос от объема спроса?

Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.

Есть спрос и у него две характеристики: объем спроса и цена спроса. В микроэкономике эти две переменные строят, как функциональную зависимость - одна от другой. Объем спроса есть функция цены, либо цена, как функция от объема. Мы знаем, что и ту, и другую точки зрения экономисты обосновывают. У Маршалла, если помните, он пишет так, что объем определяется ценой, а на графике рисует обратную зависимость - зависимость цены от объема. Я вот одного специалиста в области экономической теории спрашивал, а вот так или так? И, будучи специалистом в области экономической теории, он мне обосновал как ту зависимость, так и другую зависимость. Я думаю, что это вызвано не тем, что здесь есть какая-то неправота, а тем, что спрос есть целое и этот спрос имеет две характеристики - объём спроса и цену за единицу изделия. Нет функциональной зависимости одного от другого, это две части одного целого – в этом их взаимосвязь.

Проф. ЧЕРНОВ В.П.

Все-таки, Вы на слайде показали формулу, которой нет в тексте доклада, и именно: функциональная зависимость комплексной переменной от функции Z?

Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.

Я сейчас Вам объясню. Линия спроса, которая изображается на графике с координатами объёма и цены, имеет нелинейный характер. Каждая точка на этой линии представляется как комплексное число. Вместе они представляют собой комплексную переменную. Функциональная зависимость, описывающая все точки на линии спроса будет представлять некую модель спроса, которая определяется другими факторами. Например, изменился доход, изменились коэффициенты функции и линия спроса сдвинулась на графике. У меня есть ощущение, что здесь наилучшими будут логарифмические модели спроса, но ни их вид, ни общее представление мне пока не ясны…

<u>Проф. ИВАНОВ Е.Е.</u>

У меня вопрос такой: Вы используете метод наименьших квадратов. Насколько я понимаю, получается точечная оценка, но вся беда в том, что точность любого прогноза зависит от свойств прогноза. Рассматривался ли такой вопрос: в какой мере свойства этих оценок меняются в связи с тем, что Вы представляете в двумерном виде существующие модели? Рассматривали Вы это или не рассматривали, если да, то как?

<u>Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.</u>

Этот вопрос у меня стоит на повестке дня. На самом деле, я его просто не успел рассмотреть. Здесь принципиально новый аппарат статистической обработки комплексных переменных и руки пока не дошли до полной адаптации аппарата математической статистики к эконометрии комплексных переменных, здесь много всего пока ещё неизвестного. Но раз МНК может быть использован для этого случая, то и все остальные элементы – корреляционного и регрессионного анализа, - вполне могут быть использованы.

<u>ПРОФ. СОКОЛОВ Д.В.</u>

Есть еще вопросы?

У меня есть такой вопрос, ответ на который будет интересен нашим студентам, которые несколько лет изучали довольно большой аппарат экономико-математического моделирования. Что нового для практики предлагается, какие есть экономические задачи, которые не могли бы быть решены существующими методами?

<u>Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.</u>

Вы предваряете доклад Ивана, он как раз будет говорить о производственной функции комплексных переменных, при применении которых получаются такие результаты, которые в области вещественных чисел никогда не получатся. Мы ведь находимся только в начале большого и сложного пути экономико-математического моделирования комплексными переменными, и здесь нас ожидает множество интересных открытий.

<u>ПРОФ. СОКОЛОВ Д.В.</u>

Если больше вопросов к докладчику нет, заслушаем оппонирующий доклад профессора Геннадия Володаровича Савинова.

<u>Проф. САВИНОВ Г.В.</u>

Я, как оппонент, отмечу свое отношение к докладу Сергея Геннадьевича.

Мне представляется, что Сергей Геннадьевича на самом деле в своем докладе пытался обрисовать возможности, которые открывает применение комплексной переменной в экономике. Нужно заметить, что, вообще говоря, мы после знакомства с публикациями Светуньковых смотрели в Интернете, таких работ там нет, не было ни одной работы непосредственно экономического характера, где предлагалось бы использовать комплексные переменные для математического моделирования. Это есть первое предложение в данном научном направлении и, собственно говоря, в докладе обрисовывались принципиальные возможности, которые дает применение этих комплексных переменных. Конечно, модели все носят, мягко говоря, прикидочный характер и принципиально показывают, что вот здесь можно использовать комплексные переменные, здесь, здесь и здесь. И, вообще говоря, следует ожидать каких-то результатов. Поэтому сами трактовки моделей могут быть различными. Я читал доклад и не со всеми трактовками Сергея Геннадьевича согласен. Это такая дискуссионная вещь и здесь вот высказывались замечания по поводу последней модели спроса и предложения, что они должны быть независимы, но эту дискуссию по конкретным моделям я хотел бы отложить, поскольку модели не носят такого конкретно-прикладного характера, где можно обсуждать полученные результаты.

Я хотел бы остановиться на двух вещах, которые, с моей точки зрения, в докладе не были рассмотрены. Первое - это простая вещь: когда можно считать, что использование комплексных переменных дает новые результаты? Вообще говоря, ясное дело, что можно и без них обойтись, а, с другой стороны, когда появятся новые результаты? На самом деле, можно ответить на этот вопрос. Чтобы было понятно, о чем я говорю, я приведу пример издалека: вот матричные исчисления, с какого момента начинают давать новый результат? Если мы запишем линейную систему уравнений в матричном виде - это не новый результат, ничего нового здесь нет. Если мы решим систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы, то все равно ничего нового здесь нет. Новые результаты появляются тогда, когда мы говорим, что у нас однородная система, есть собственные значения матрицы, есть собственные вектора, которые иногда образуют там базисы, ортогональные и т.д., и получаются новые результаты, которые были упущены в теории линейных чисел. То же самое, с моей точки зрения, и здесь, когда мы говорим о комплексной переменной, то новые результаты появятся с того момента, когда мы будем использовать в большом объеме различные функции комплексной переменной, и еще было бы хорошо, если бы мы использовали дифференциальные исчисления. Если бы мы написали комплексную переменную, то это действительно была бы новая модель, как бы качественно отличающаяся и никак не удалось бы ее обойти с помощью сложных операций. Это вот первый момент - к чему надо стремиться.

Второе, зачем это нужно, зачем нужно выдумывать эти модели и в чем проблема? Это совсем не было затронуто. Расскажу это с моей точки зрения, ведь мне когда-то пришлось заниматься и производственными функциями, и факторным анализом. В чем здесь проблема, с которой сталкиваются при моделировании экономических систем?

Если мы рассмотрим простейшую модель производственной функции - она связывает ресурсные показатели с результативными, труд и капитал с каким-то конечным продуктом. Тогда мы сразу же столкнемся со следующей вещью - трудовые затраты. На самом деле, это один показатель, но это сумма каких-то мелких составляющих и при одной и той же сумме, но при разной структуре этой суммы мы всегда получаем на практике разные результаты. Необходимо смоделировать структуру, либо отказаться от этой интегральной характеристики. Если мы откажемся от интегральной характеристики трудовых ресурсов, начнем их разбивать на части в рамках предприятия: производственные рабочие, управленческий персонал и т.д., то роль управленческого персонала смоделировать очень трудно, вкупе с производственными работниками они дают результат, а отдельно, если его выделить как фактор, то он, вроде бы, ничего не дает. И возникает такая парадоксальная ситуация, что необходимо на самом деле смоделировать структуру этого показателя, а структуры моделируются непонятно каким образом в математике. То же самое относится и к производственному процессу: у нас есть производственная функция, а моделирующий процесс - производство, но параллельно с производственным процессом идут как бы теневые, эффективные процессы по организации этого производственного процесса. От этих процессов очень многое зависит, а они вообще выпадают, как их учитывать? От них зависит очень многое, к примеру, маркетинговые процессы, логистические процессы и т.д., которые сами не производят никакой продукции, но обеспечивают основной процесс. Поэтому экономические модели достаточно сложны в том плане, что их не так просто смоделировать. Здесь как раз комплексные переменные и могут использоваться, облегчая процесс моделирования.

И еще один момент, о котором я забыл сказать, это присутствие человеческого фактора. Как правило, люди склонны действовать своекорыстно и влиять на экономические процессы в свою пользу. Когда их достаточно много, то вроде как возникают некоторые стохастические процессы, а на самом деле это не совсем стохастический процесс, а результат целенаправленной деятельности отдельных людей, если они между собой договорятся, то все случайные факторы перестанут быть случайными. Это тоже сложно моделируемые вещи аппаратом теории вероятности.

С моей точки зрения, применение комплексных чисел вносит свежую идею в процесс моделирования - есть нетривиальная операция умножения комплексных чисел, которая не моделируется с помощью действительных чисел, минус единицу никак нельзя получить, сколько бы мы не умножали числа, поэтому те модели, которые предлагаются, они, возможно, приведут к каким-то, с моей точки зрения, новым результатам. Если даже они не приведут к новым результатам, то рассмотрение этих моделей поможет по-другому взглянуть на старые модели. В этом есть огромная польза.

Неожиданной и представляющей отдельный интерес мне показалась идея о представлении динамических рядов экономических показателей в виде комплексных переменных, расположенных на комплексной плоскости, где сам показатель является мнимой частью, а время – действительной. Это неожиданно, такого я не встречал, и здесь могут быть самые разные результаты.

Подводя итоги, я считаю, что доклад был интересный, в нём обозначены основные направления и проблемы использования комплексных переменных в экономике. А сама тематика, на сегодняшний день новая, мы даже не обсуждаем конкретных сложных моделей, а обсуждаем перспективу создания этих моделей. Я считаю, что это перспективно и с практической точки зрения, и с методологической, поскольку анализ этих моделей принесет всем большую пользу.

ПРОФ. СОКОЛОВ Д.В.

Спасибо, Геннадий Володарович. Есть ли вопросы к оппоненту?

Проф. ЛЕВИН А.И.

Я так понял, что Вы первую часть выступления отдали перспективе развития этого дела с той точки зрения, найдутся ли в дальнейшем какие-то трансформации этого метода? А вторую часть я не понял. Вы говорите, что в Вашем понимании экономико-математические методы не приведут к достоверным результатам?

Проф. САВИНОВ Г.В.

Я думаю, что экономико-математические методы никогда не приведут к достоверным результатам, этот результат всегда будет приближенным. Невозможно смоделировать деятельность человека отдельно.

Проф. ЛЕВИН А.И.

А я Вам должен сказать, что прогнозируется индекс Доу-Джонса на мировых рынках, и если Вы там что-то покупаете. Прогнозируются курсы ценных бумаг, имеются разные методы и модели для биржевой игры. И все это прогнозируется очень четко, потому что эти биржи используют экономико-математическое моделирование.

Проф. САВИНОВ Г.В.

Я не могу с Вами согласиться, потому что есть биржа Forex, где еще ни одному человеку не удавалось точно спрогнозировать курс доллара не только на сутки вперед, но и на час вперед. И никакие математические методы это не позволят сделать.

Проф. ЛЕВИН А.И.

Цент биржевых технологий работает с нашей кафедрой в Калининграде. Они купили автоматизированную программу и вообще не сами работают, а компьютер по закупленной технологии работает, и все время эта фирма в непрерывной прибыли. Фирма эта собирает и обрабатывает статистику. В данный момент Вы конечно не угадаете точно, но в процессе деятельности за неделю, месяц, год фирма всегда в прибыли и экономико-математические модели работают прекрасно.

ПРОФ. СОКОЛОВ Д.В.

Аркадий Исаакович, мы будем считать, что это у Вас выступление?

Проф. САВИНОВ Г.В.

Да, такие фирмы работают, но периодически они разоряются.

Проф. ЧЕРНОВ В.П.

Я не знаю к кому вопрос, но комплексная переменная - это пара вещественных переменных, поэтому все, что говорится о терминах комплексных переменных можно отнести к вещественным переменным, разница не очень-то и видна. Поэтому мне кажется, что эффект от моделирования с помощью комплексных переменных появился бы в том случае, если бы Вы моделировали такие экономические процессы, в которых проявляются свойства, связанные с произведением комплексных чисел, то есть, если бы были какие-то комплексные процессы и такие стороны, что какие-то характеристики получились бы путем умножения, тогда комплексной переменной оказалось бы нечего делать.

Проф. САВИНОВ Г.В.

Я отвечу. Я тоже когда-то задавал такой вопрос. Есть целая наука, которая решает дифференциальные уравнения, и сначала непонятно, где там произведение, где используется соотношение, что углы не меняются. Сразу не скажешь, что там применимы комплексные числа и это все связано с "произведением" в том смысле, который Вы имели в виду. Все это, тем не менее, выливается в такую нетривиальную вещь, когда у нас, вообще решение дифференциальных уравнений возможно через синусы и косинусы делать…

ПРОФ. СОКОЛОВ Д.В.

Давайте так: есть прения, и есть вопросы. Мы отошли от нашей процедуры. Давайте перейдём к прениям. Спасибо, Геннадий Володарович! Кто хочет выступить?

Проф. Пастернак П.П.

Нельзя думать так, что если с использованием математических методов мы что-то решаем, то это есть абсолютная вещь, это точно. Даже точный и совершенный математический расчет чего-то, он всегда имеет свою точность. Отсюда нельзя говорить о том, что если пользуешься математикой, то точно решаешь какие-то проблемы. Но если мы используем математику в экономических процессах, то надо иметь в виду, что экономические процессы и все остальные являются вероятностными процессами, то есть, они с определенной вероятностью реализуются в жизни. В принципе, с помощью математических методов можно строить и оптимизировать планы с заданной вероятностью их реализации. Я хотел бы сказать, Сергей Геннадьевич, что то, что Вы сказали в своем докладе, что донесли до нас вообще-то новое, уже может иметь практическое приложение при решении и моделировании отдельных задач.

Я приведу пример из аграрного сектора экономики - все едят продукты сельского хозяйства, но не все знают, как эти продукты производятся. К примеру, простая задача по оптимизации структуры посевных площадей в сельхозпредприятии, надо определить, какие должны быть площади сельскохозяйственных структур, если общая площадь вот такая-то, с тем, чтобы добиться производства объема кормов, добиться производства какой-то товарной продукции, лучшим образом использовать наличные ресурсы, с которыми связано это производство, и обеспечить прибыль. Здесь возникает вопрос при моделировании: сельскохозяйственная культура может быть представлена по-разному. Если есть мысль ставить сельскохозяйственную культуру в моделях, то мы что делаем? С какой-то урожайностью ее ставим, например, с такой-то вероятностью будет такая урожайность, и мы ставим ее. А можно эту вероятность, если мы ставим ее, и в детерминированной постановке - в соответствии с технологией возделывания этой культуры при данной урожайности будут такие затраты ресурсов, и такой-то выход продукции. Но если мы при той же технологии урожайность поставим другую, то уже возникает вопрос: сколько и каких ресурсов нужно изменить и, что в результате мы получим? Возникает вопрос: при моделировании и решении таких задач надо не только оптимизировать структуру посевных площадей, но и определить степень, с какой интенсивностью надо возделывать эту культуру, а именно, с какой урожайностью в рамках заданных границ? Заданная граница - действительная, и мнимая часть - ваша.

И вот переход от действительной к мнимой у Вас же он отражается действительно, так вот можно в модели учесть и таким образом, чтобы и эти переходы оптимизировались, чтобы одновременно решать задачу по оптимизации задачи структуры посевных площадей, и определять, какая должна быть оптимальной вообще-то урожайность сельхозкультуры при данных ресурсах, при данных условиях, чтобы действительно оптимизировать процесс по критерию максимума прибыли или другого экономического показателя. Вот и в таких уже вещах Ваше предложение может быть использовано. Может оно использоваться и при прогнозировании.

Прогнозирование, как вы все знаете, есть что? - предсказание будущего. Часто используется одномерное прогнозирование, когда прогнозируются отдельные показатели какого-то процесса. Наверное, когда в комплексе они прогнозируются, есть схема, и в целом, сквозное прогнозирование, когда, простите, в целом система прогнозируется. Стало быть, мы можем так: развитие всей системы и прогноз в целом системный осуществлять на основе использования информации по результатам одномерных прогнозов, а одномерные прогнозы мы можем строить, строго говоря, с разной степенью заданной надежности в реализации. И можно строить прогноз на основе одномерных всех прогнозов, которые с такой-то вероятностью будут реализуемы в будущем, и - с другой вероятностью. И для того чтобы эти прогнозы вот так строить, это очень трудная задача, потому что система моделей там очень сложная, а вот если рассматривать прогноз, как Ваше действительное число, а тот прогноз с другой вероятностью, как мнимое число, то можно строить такие прогнозы, без построения всей этой сложной системы моделей. А с учетом Вашего подхода, который бы обеспечивал этот прогноз в рамках заданной границы надежности - с любой степенью надежности. Понимаете? Вот такой практический выход здесь может быть. Ну и, наверное, даже в прогнозировании, когда тот же тренд мы считаем. Есть доверительная граница, с какой надежностью он должен реализоваться, и среднее значение есть. Если двигаться в этом коридоре доверительной таблицы вверх или вниз, степень надежности меняется, но на границе этой надежности тоже стоят действительные или мнимые числа. Поэтому и здесь по-другому тоже можно строить прогнозные модели. Очень интересно.

Конечно, я говорил экспромтом, но я считаю, Сергей Геннадьевич, что Вы сделали доклад очень интересный, который наводит на многие мысли, кстати, кто действительно занимался уже многими задачами моделирования, видит, что есть практическое приложение этих вещей.

Спасибо.

Проф. ЛЕВИН А.И.

Должен отметить, что мне очень понравилось оппонирование профессора Савинова доклада Светунькова, очень понравилось. И, конечно, профессор Савинов прав: все подходы профессора Светунькова чисто статические. Профессор Светуньков мне друг, но я должен сказать, что он представляет суть своих предложений не в целом, не в системе. Он даже сам не понимает, что именно он открыл. Он вспомнил, что есть одна экономико-математическая задача, применил к ней комплексную переменную – получилось. Вспомнил, что есть другая – снова применил, и получилось. Фигурально говоря, он видит гору - о горе поет, видит поле - о поле поет, видит речку - о речке поет, и т.д. Был такой акын Джамбул, он о Сталине песни пел, получил орден Ленина.

Конечно, функция комплексного переменного при моделировании экономических процессов должна быть применена не для статического моделирования. Есть факторный анализ, есть дискриминантный анализ, есть кластерный анализ, боже ты мой, да это можно перечислять до скончания века. И везде можно применить комплексные переменные, это теперь ясно. Если Вы вспомните свою электрическую специальность, Сергей Геннадьевич, вспомните передачу трехфазного электрического тока, а если вспомните физико-математические модели импульсного тока, вы увидите, сколько оно все строится на функциях комплексного переменного, и этого всего так много сделано, что экономистам еще на 200 лет разбираться с их знанием математики. А если еще добавить физические процессы, где происходят колебания и возникают фигуры Лиссажу, тогда все, погибель для экономистов. Погибель полная. Поэтому, конечно, Вы правы, профессор Савинов, правы. Это только начало.

В чем же здесь суть, которую профессор Светуньков не увидел? Экономисты не знают, что Эйнштейн в 1905 году написал свою знаменитую статью, а через 8 лет Минковский, используя плоскость комплексной переменной, смог объяснить постоянство этой скорости света, мог объяснить эту константу, которую ввел Герц. И все стало на место, и не надо было эфира, не надо было ничего, свет потерял свои векторные свойства. И все стало на свои места, всех это потрясло.

В чем же дело? Ведь там же тоже комплексная переменная, что же сделал Минковский? Может быть, то, что сделал Минковский можно сделать для экономики? Но это уже по-крупному, тогда вся экономическая наука, все моделирование, все летит в тартарары. Когда я читал выдающуюся книжку Светуньковых - маленькую брошюрочку по производственной функции комплексного аргумента, я читал между строк, я видел, что можно и надо сделать. Боже мой... Ведь экономисты, макроэкономика, микроэкономика, да этого ничего нет, если объединить это все вместе с точки зрения функции комплексного переменного! Вот основа основ. На этой основе и вырастет новое научное знание. Всё надо перестраивать. Так давайте прямо и открыто скажем: ребята, давайте возьмемся перестроить всю эту эклектику.

Ведь Самуэльсон, спасая микро- и макроэкономику, как он сделал: он взял микропроцесс спроса и говорит, тут много рынков! А откуда их много? Да, много, их миллионы, давайте мы их просуммируем. И начал это дело суммировать. Когда он все это просуммировал, у него получился совокупный спрос, но, когда у него появился совокупный спрос, у него асимптотически вытянутая кривая вытянулась по одной ординате, и по другой, а иначе как? Но вы меня извините, сейчас все выдающиеся мужи, все пишут книжки по макроэкономике, откройте книжку по макроэкономике и вы увидите, что там закона спроса и предложения нет. А что, закона спроса и предложения нет? Есть! Он действует в элементарных своих частях, так давайте поблагодарим Сергея Геннадьевича и Ивана Сергеевича Светуньковых, и тихо, молча, спокойно беремся за экономико-математическое моделирование, и начинаем аксиоматически, как положено, а не парадигмально, как сформулировал Сергей Геннадьевич, парадигмы - это глупости, но почему-то в России у нас всё стремятся обобщать.

Аксиоматический метод отличается от парадигмального тем, что можно научное знание построить в миллионах вариантов, какое хочу, такое и строю, если беру исходные неделимые понятия. Беру одни неделимые понятия и аксиомы, строю одну геометрию, добавляю там параллельность или убираю параллельность и еще какой-то признак, строю другую геометрию. В физике то же самое: добавляю, что электроны квантованные в реальном пространстве - одна физика, молекулярная физика, статистическая физика, квантовая физика, атомная физика. Их же море, море всяких физик. Электродинамика квантовая отдельно, ведь получается, что нельзя связывать себя какими-то рамками, особенно в моделировании какими-то определенными рамками.

Что же сделал Минковский, чтобы понять, что же сделали Светуньковы? Минковский сделал очень простую вещь: (рисует на доске), Минковский сказал, что пространство трехмерно, и не более того. Время, между нами говоря, тоже трехмерно, но никто этого не знает кроме Минковского. Когда он это опубликовал, потом это все забыли, сделали время одномерным, но одномерно оно, уважаемые коллеги, оно одномерно только при условии, что оно для оси x - одно, для оси z - такое же, и для оси y - такое же, тогда его можно принимать одинаковым. И Минковский говорил это, чтобы связать этот самый простейший случай, и все на этом в экономике остановились, потому что экономисты «тупые» и не могут в этом разобраться, (Председатель: Коллеги, я напоминаю, что Аркадий Исаакович - доктор экономических наук! (Смех в зале)). А я всегда говорил, что я – тупой!

Минковский рассматривал, почему и был задан мною вопрос Светунькову, что t - действительная переменная, а x - это мнимая переменная, здесь еще у Минковского добавлено - минус единица. И Светуньков каким-то чутьем угадал, что время - всегда действительная переменная. Почему? Потому что время всегда связано с ритмикой, время - это объективно существующая субстанция, не зависящая от природы, и от всего. Время надо изменять, измеряя колебания: зима-лето, зима-лето, а большая часть животных на земле живет от приливов и отливов, а дождевым червям на это, извините, начхать, их не интересует - ни как солнышко трудится, не интересуют ни приливы, ни отливы.

Что я хочу сказать? Я хочу сказать, что, используя преобразования Минковского, можно получить любую комплексную переменную. Если вы берете комплексную переменную: трудовые затраты, фонд зарплаты, объем производства, реализация, она - переменная меняющаяся во времени, действительная. И вот оттого, что она колеблется, она создает этот фактор ритмики. Если вы развернете эту ритмику, то все они одинаковы и не нужно это перечислять, нужно один раз сказать, что все они одинаковые… Давайте построим научное знание таким путем, и комплексная переменная тогда обобщает всю вашу теорию, и создается единая теория, единая математическая модель для всех экономических, социальных, любых процессов. И с помощью комплексных переменных мы обеспечиваем принцип аксиоматического построения всей теории экономики, что всю экономическую науку наконец, приведёт в систему.

Спасибо.

ПРОФ. СОКОЛОВ Д.В.

Спасибо. Мы заслушали основной доклад, доклад оппонента, много было выступлений в прениях. Мое личное мнение, что, с моей точки зрения, в плане прикладных аспектов, уже есть элементы некой новой теории. Теория, что здесь имеется в виду? Во-первых, понятийный аппарат. Понятийный аппарат здесь есть и понятен. Второе в теории - подходы, здесь Сергей Геннадьевич в докладе наметил направления движения. Третья составляющая - инструментарий. С точки зрения инструментария, здесь есть большое поле деятельности. Я бы еще сказал, что теории появляются в соответствии с какими-то потребностями. Есть потребности, я недаром задавал вопросы. Но теории могут возникнуть не только в качестве потребности, а усовершенствовать те методы, которые есть. В этом направлении разрабатываемая в стенах финэка теория должна иметь место и находить всяческую поддержку.

Слово предоставляем второму нашему докладчику - «Производственные функции комплексных переменных». Особо хочу подчеркнуть, что доклад делает студент 5 курса нашей специальности – Математические методы в экономике.

СВЕТУНЬКОВ И.С.

(Делает доклад)

ПРОФ. СОКОЛОВ Д.В.

Спасибо. Есть вопросы?

Проф. ЧЕРНОВ В.П.

Там мелькнули формулы: 3.1 и 3.2. Мне представляется, что там неверно написано.

СВЕТУНЬКОВ И.С.

Здесь техническая ошибка.

Проф. ЛЕВИН А.И.

Вы вообще учили или слышали о такой теории катастроф?

СВЕТУНЬКОВ И.С.

Слышал и что-то читал, но у нас в учебном плане она не предусмотрена и мы ее не изучали.

Проф. САВИНОВ Г.В.

Как Вы интерпретируете модуль комплексной переменной? Здесь получается, что само комплексное число имеет экономическую интерпретацию, а модуль комплексного числа - не понятен.

СВЕТУНЬКОВ И.С.

Я не задавал себе этот вопрос, поэтому ответить на него сейчас не могу. Это направление будущих исследований.

Проф. Чернов В.П.

Все модели, которые Вы построили, линейные. Делались ли расчёты для нелинейных моделей?

СВЕТУНЬКОВ И.С.

Нет, такие расчёты пока мы ещё не делали. Рассматривались только линейные функции комплексных переменных, но при этом получались нелинейные результаты. Единственная нелинейность, которая была задана в явном виде в модели, связана с описанием нелинейной динамики коэффициентов использования ресурсов. Здесь получены хорошие аппроксимирующие и прогнозные свойства моделей.

С места

Вы делали прогнозы ВВП России в производственных функциях комплексной переменной. Как по расчётам получается: будет удвоение ВВП России к 2010 году?

СВЕТУНЬКОВ И.С.

Тенденции роста ВВП 1998-2004 года линейны и простой линейный тренд прогнозирует удвоение ВВП без каких-либо усилий со стороны правительства. Надо только сохранять сложившуюся ситуацию - слабый рубль и высокую цену на нефть. Наши модели производственной функции подтверждают это, а функция Кобба-Дугласа вообще «задирается» и прогнозирует учетверение ВВП. Тенденции, похоже меняются, если будут в нашем распоряжении новые данные, их легко подставить в модель и уточнить прогноз.

Проф. СОКОЛОВ Д.В.

Больше вопросов нет? Слово для оппонирующего доклада предоставляется профессору Чернову Виктору Петровичу.

Проф. ЧЕРНОВ В.П.

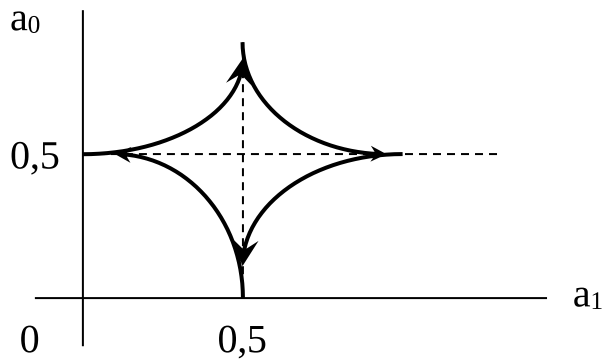
Я хотел сказать, что буду краток. Мне кажется, что мы прослушали интересный доклад, в котором мы увидели попытку применить развитый математический аппарат в новой области. Вообще говоря, если мы хотим получить какие-то новые результаты, то можно двигаться разными путями. Обычно возникает какая-то содержательная проблема, и ее пытаются решить, ищут математический или какой-то другой аппарат, позволяющий решить эту проблему, анализировать, приблизиться к решению. Возможен и другой ход мыслей, когда есть готовый аппарат и можно попытаться применить его в новой области. Какие-то новые эффекты могут при этом возникнуть, а могут и не возникнуть, но любопытно посмотреть. Здесь, как мне кажется, мы видим такую попытку применения и поиска. Как поиск, это интересно, возможно, что эффективно. Эффект был бы виден, мое сердце это как бы не очень затрагивает, но если бы я это делал, я бы пытался искать такие возможности, такие экономические процессы, в которых модуль комплексной переменной имеет экономический смысл, то есть, такой процесс, в котором что-то мультиплицируется, а что-то - складывается. Исходя из этого, можно найти какие-то интересные, любопытные и перспективные применения. Пока я такого не вижу, но в этом направлении можно было бы двигаться, но авторам, возможно, видна перспектива. И то, что я сказал верно и по поводу производственной функции. В качестве замечания скажу, что надо сравнивать всё же однородные функции, то есть, если сравнивать функцию Кобба-Дугласа в вещественной области, то только с комплекснозначной функцией, взятой аналогичной по форме. А линейные функции комплексных переменных сопоставлять с линейными производственными функциями вещественных переменных. Это будет корректно, и мне кажется, что это будет любопытно. Пожелаем участникам этого процесса успеха.

Проф. СОКОЛОВ Д.В.

Есть ли желающие выступить в дискуссии по второму докладу?

Проф. ЛЕВИН А.И.

Я уже давал свою оценку той брошюрки Светуньковых, в которых опубликована часть материалов, которые сейчас доложены. Поэтому остановлюсь только на том, что можно сделать дальше. Я не случайно задал вопрос о теории катастроф, потому что её использование может дать здесь интересные результаты. Если рассмотреть производственную функцию комплексного аргумента, то мы увидим, что Светуньковы, приведя исходные переменные к начальным безразмерным величинам, в качестве точки отсчёта динамики коэффициентов использования ресурсов получают точку (0,5; 0,5). И в зависимости от того, как будут меняться коэффициенты в дальнейшем говорят о трудо- или капиталоинтенсивном процессе, интенсивном или экстенсивном пути. Всё это хорошо, но если бы они взяли другую точку отсчёта, то могли бы получить другой результат. Здесь в докладах вскользь говорилось о возможности с помощью комплексных переменных исследовать цикличные процессы. Производство по природе своей циклично. А если взять точку отсчёта, например, такую, чтобы первоначальные значения коэффициентов использования ресурсов были равны соответственно 0,5 и 0,0? Убеждён, что получится такой график:



Вот эти точки перелома представляют для исследования особый интерес, так что, Иван Сергеевич, у Вас есть большое поле для дальнейших научных исследований, в том числе и с использованием теории катастроф.

Проф. СОКОЛОВ Д.В.

Есть ещё желающие выступить? Нет.

Тогда завершаем наш семинар и предоставим возможность для завершающего выступления профессору Светунькову Сергею Геннадьевичу – инициатору семинара.

Проф. СВЕТУНЬКОВ С.Г.

Уважаемые коллеги!

Я очень рад, что наш первый семинар не получился комом. Я благодарен оппонентам за то, что они внимательно изучили материалы докладов, и сделали интересные оппонирующие доклады, которые не только дали их авторам новое понимание научной проблематики исследования, но и позволили всем присутствующим получить более системное представление о сути нового научного направления.

Для меня главный вывод, который со всей очевидностью следует из нашего семинара, из выступлений присутствующих, обсуждения сложных задач применения комплексных переменных в экономике, заключается в том, что мы получили подтверждение того, что то новое научное направление, которое нам удалось открыть, не ошибочно.

Были сомнения, что может быть мы ошибаемся в понимании места и роли экономико-математического моделирования с помощью комплексных переменных. Именно поэтому, для широкого и открытого обсуждения я пригласил всех на семинар. Жаль, что не все желающие смогли приехать, мне звонили коллеги из Москвы, Ставрополя, Новосибирска, Екатеринбурга других городов. Не могут приехать, нет в вузовской и академической науке денег на командировки на подобные мероприятия. Жаль! Но всё равно, получилось живое обсуждение, своеобразные мозговой штурм. Очень рад, что мы не ошиблись в своих ожиданиях, что перед нами открываются перспективы сложного, но очень интересного пути по созданию новой парадигмы в экономико-математическом моделировании - применении теории комплексного переменного в экономике!

Благодарю всех за участие и активное обсуждение, до свидания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главная цель проведения научного семинара в стенах Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов – обсуждение принципиальной возможности формирования новой научной парадигмы, которая следует из применения теории функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании. Эта цель была достигнута, поскольку в ходе научной дискуссии сама идея о применении теории функции комплексного переменного в экономике не была отвергнута.

В выступлениях профессоров Г.В.Савинова, П.П.Пастернака, А.И.Левина, Д.В.Соколова содержатся не только утверждения о том, что созданы элементы новой теории экономико-математического моделирования, но и ряд предложений и научных гипотез, которые открывают перед исследователями, желающими применить теорию функции комплексного переменного в экономико-математическом моделировании, заманчивые перспективы.

В то же время в выступлении проф. В.П.Чернова сквозит нотка скептицизма, поскольку, по его мнению, элементы теории функции комплексного переменного следует применять в том случае, когда будут в результате моделирования получены не столько альтернативные существующим, сколько принципиально новые результаты. При этом проф. В.П.Чернов не отвергает саму возможность использования теории комплексного переменного в экономико-математическом моделировании.

Обобщая предложения, высказанные на научном семинаре, можно выделить ряд направлений, на которых участники семинара рекомендуют сконцентрировать усилия научных исследований.

Прежде всего, следует осмыслить роль и место формирующейся теории в системе экономико-математического моделирования. Следует более чётко и строго сформулировать аксиоматику новой теории, её понятийный аппарат, выявить научные разделы этой теории и обосновать взаимосвязь между ними. Принципиально важно дать экономическую интерпретацию как комплексным переменным, так и мнимым составляющим этих переменных (проф. А.И.Левин, проф. Г.В.Савин, проф. Д.В.Соколов).

Одно из важных направлений – моделирование рыночного взаимодействия, которое следует начинать с микро уровня, и на базе полученных результатов, переходить с помощью комплексных переменных к моделированию более высоких уровней экономической иерархии. При этом возможно рассматривать переход от одного пространства комплексных переменных к другому через общую ось – ось времени (проф. А.И.Левин, проф. П.П.Пастернак).

Следующим направлением научных исследований выступает эконометрия комплексных переменных. В первом докладе была показана сама принципиальная возможность использования метода наименьших квадратов применительно к комплексным переменным. Далее следует углубить эти теоретические основы для формирования системы регрессионно-корреляционного анализа, адаптированного к задачам эконометрии комплексных переменных и построить более сложные и более гибкие вероятностные модели прогнозирования в экономике (проф. П.П.Пастернак, проф. Е.Е.Иванов).

Другим направлением научных исследований является раздел, обобщённо называемый "Исследование операций". Работу в этом направлении предлагается начать с простых оптимизационных линейных моделей, в которых в качестве переменных следует использовать не вещественные, а комплексные переменные (проф. П.П.Пастернак).

Развитие теории производственных функций следует осуществить в направлении построения и исследования свойств нелинейных производственных функций комплексных переменных, поскольку исследование линейных производственных функций комплексных переменных показали наличие у них интересных свойств (проф. В.П.Чернов).

Литература

1. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Исследование свойств производственной функции комплексного аргумента (препринт). – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2005. – 24 с.
2. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. О возможности использования комплексных чисел в теории производственных функций // Известия Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов, 2005, № 4. – С. 5 -17.
3. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции в виде комплексного числа в прогнозировании // материалы Международной научно-практической конференции, 29-30 апреля 2005 г.- Воронеж, Изд-во ВГУ, 2005. – Ч.1. – С. 58-61.
4. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Прогнозирование бюджетных доходов с помощью производственной функции в виде комплексной переменной // Состояние и проблемы трансформации финансов и экономики регионов в переходный период. Материалы Второй Международной научно-практической конференции 12 мая 2005, г. Хмельницкий. Ч.1. – Черновцы – Букрек, 2005. – с. 330 – 331

Содержание